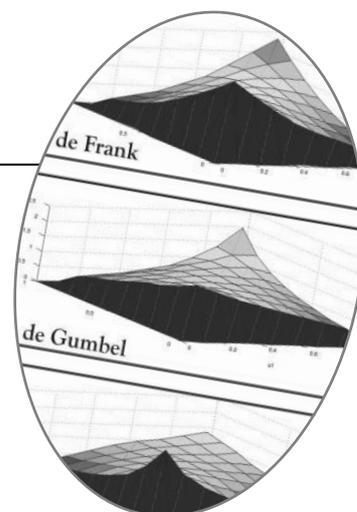


# Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas\*

## Value at risk from the viewpoint of copulas

Gabriel Ignacio Torres Avendaño\*\*  
Ana Milena Olarte Cadavid\*\*\*



Recepción: Agosto 11 de 2009

Aceptación: Noviembre 10 de 2009

### Resumen

El valor en riesgo –VaR– es una medida que cuantifica los riesgos enfrentados por un portafolio. Entre los métodos de medición del VaR están la simulación histórica, la Simulación Montecarlo, los modelos paramétricos y los modelos de duración y convexidad. Para el cálculo del VaR se requiere modelar los retornos del portafolio y hallar la distribución de pérdidas que los describe. Tradicionalmente, se han supuesto retornos con distribución normal, pero la evidencia empírica rechaza esta hipótesis. Durante los últimos años se han adelantado investigaciones para calcular el VaR utilizando “cópulas”. Estas determinan la estructura de dependencia del portafolio y de los activos riesgosos que lo conforman, sin partir de supuestos sobre sus distribuciones. De este modo se obtienen resultados más realistas y se evita la sobrestimación o subestimación del valor en riesgo del portafolio.

**Palabras clave:** Valor en Riesgo, simulación Montecarlo, simulación histórica, cópulas, distribución de pérdidas, estructura de dependencia.

\* Artículo derivado del trabajo de investigación del mismo nombre, desarrollado por los autores en el año 2007. Los autores agradecen la colaboración de Angélica Domínguez, estudiante de Contaduría y de José Luis García, estudiante de Ingeniería matemática de la Universidad EAFIT, en la elaboración de este trabajo.

\*\* Ingeniero industrial, Docente investigador del Departamento de Finanzas, Universidad EAFIT. [gtorres@eafit.edu.co](mailto:gtorres@eafit.edu.co)

\*\*\* Economista. Analista financiera. UNE- EPM Telecomunicaciones. [aolartec@eafit.edu.co](mailto:aolartec@eafit.edu.co)

## Abstract

The value at risk –VaR–, is a measure that quantifies the risks faced by a given portfolio. There are some methods to calculate the VaR: historical simulation, Montecarlo simulation, parametric models and duration and convexity models, among others. To calculate the VaR is required to model the portfolio returns and to find the loss distributions that describe them, traditionally those distributions are suppose to be normal distributed, but the empirical evidence shows the contrary. In the last few years, research in VaR calculation shows how copulas determine the dependence structure of a portfolio of the risky assets, without any assumptions regarding distributions, so you can find in it more realistic results and it is possible to avoid sub estimation of the value at risk of the portfolio.

**Key words:** Valor en Riesgo, simulación Montecarlo, simulación histórica, cópulas, distribución de pérdidas, estructura de dependencia.

## Introducción

El capital regulatorio de una entidad financiera está determinado por los riesgos que enfrentan sus portafolios. En el caso del mercado, tales riesgos se originan por variaciones en el precio de los activos financieros que componen el portafolio. Una medida de este tipo de riesgo, aceptada ampliamente en años recientes, es la denominada Valor en Riesgo –VaR–, herramienta importante en la determinación de los requerimientos mínimos de capital de las instituciones financieras. Más relevante aun cuando en enmienda del Acuerdo de capitales en 1996<sup>1</sup>, el Comité de Basilea sugirió el uso de metodologías de medición de riesgo alternativas al modelo estándar establecido para las entidades bancarias.

Para la medición del VaR se han definido cuatro grupos de modelos (Melo y Becerra, 2005): el primero se refiere a modelos por simulación, tales como el histórico o el de Montecarlo, muy utilizado en entidades bancarias; en el segundo grupo están los modelos analíticos de formas

<sup>1</sup> Reforma al Acuerdo de Capital de Basilea, llevada a cabo en 1996, según la cual el Comité de Basilea exige un cambio en las metodologías de medición del riesgo de mercado en las entidades financieras, en busca de una mejor gestión frente a los requerimientos mínimos de capital.

paramétricas con correlaciones, basados en análisis de varianzas y covarianzas, como los de mezcla de Normales y Delta Gamma; en el tercero se encuentran los modelos de duración y convexidades; el cuarto lo constituyen los modelos de Peor escenario (Max VaR).

En términos estadísticos, el VaR corresponde al  $\alpha$ -ésimo cuantil ( $q\alpha$ ) de la función de distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, es decir, el VaR es el menos malo de los  $(1 - \alpha)\%$  peores casos de la distribución, con lo cual la pérdida de una inversión no puede exceder el VaR con probabilidad  $\alpha$  (Melo y Becerra, 2005). Al observar la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, se puede verificar que es influenciada por caídas simultáneas en sus activos riesgosos. Por consiguiente, esta distribución depende de la distribución conjunta de los activos, fundamental para calcular el valor en riesgo (Giacomini, 2005).

En los métodos de medición de VaR tradicionales, la distribución conjunta de los retornos financieros ha sido modelada suponiendo normalidad. Esto implica una estructura de dependencia predeterminada que cumple algunos supuestos como simetría, colas livianas y dependencia lineal de los retornos, y puede

medirse a través de la correlación (Giacomini, 2005). Además, la inferencia sobre los retornos puede basarse en análisis de media-varianza.

Sin embargo, la evidencia empírica demuestra que tales supuestos son poco apropiados. Además, se necesita una herramienta más flexible para modelar la distribución marginal de los activos riesgosos, como insumo para obtener la distribución conjunta del portafolio. Se precisan también medidas de dependencia alternativas a la correlación lineal, dado que esta presenta algunas limitaciones; entre ellas, el coeficiente de correlación supone variables normalmente distribuidas. Empero, no es invariante ante transformaciones de la variable y está definida si la media y la varianza de las variables son finitas. Estas características hacen de la correlación una medida de dependencia poco adecuada para distribuciones de colas pesadas, donde las medias y varianzas pueden ser infinitas. Tampoco es conveniente, debido a que no captura las relaciones de dependencia no lineal que existen entre muchos activos financieros.

En este sentido, algunas medidas alternativas de dependencia son la correlación de Pearson, la correlación de Spearman y la correlación de Kendall<sup>2</sup>. Otra medida alternativa de dependencia muy útil para modelar la distribución multivariada es la Función Cópula. Este tipo de función une, en una distribución de probabilidad multivariada, una colección de funciones de probabilidad marginales

<sup>2</sup> Correlación de Pearson ( $r$ ): indica la calidad del ajuste del método de mínimos cuadrados aplicado a un conjunto de datos. Implica dirección de causalidad al asumir una relación lineal.

Correlación de Spearman: es una estadística no paramétrica que cuantifica la correlación entre dos variables. No implica relaciones causales o un modelo de probabilidad, no asume normalidad.

Correlación de Kendall ( $\tau$ ): es usada para medir el grado de correspondencia entre dos *rankings* y mide la significancia de esta correspondencia. No asume normalidad.

univariadas. De este modo determina la estructura de dependencia, tanto de la función de distribución conjunta del portafolio como de las marginales de cada activo riesgoso (Dowd, 2004b). Por lo demás, a través de las cópulas se libera la distribución de los retornos de un portafolio del supuesto general de normalidad. Así, las distribuciones marginales con diferentes estructuras de dependencia pueden unirse y darle una estructura de dependencia particular a la distribución conjunta del portafolio. Esto arroja una descripción más realista de las características empíricas de la distribución de los retornos de un portafolio.

En vista de que los retornos de las acciones colombianas analizadas no se ajustaban adecuadamente a otras distribuciones, en el presente estudio se utilizaron distribuciones marginales empíricas para modelar su comportamiento. No obstante, como ejercicio académico, se asumieron también distribuciones marginales uniformes y *t-student* para los retornos. Aunque el ajuste no era bueno, estas distribuciones fueron las más cercanas a la región de no rechazo dentro de las pruebas de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (Canavos, 1988)<sup>3</sup>. Por otra parte, el uso de la *t-student* se justifica porque los retornos de las acciones examinadas no presentaban independencia, pues la correlación de Kendall resultó positiva en todos los casos. Además, esta distribución permite modelar adecuadamente las colas pesadas. La distribución uniforme, por otro lado, fue utilizada como modelo de máxima incertidumbre, asignándole la misma probabilidad de ocurrencia a todos los eventos.

<sup>3</sup> Valores críticos para las pruebas de ajuste de Kolmogorov-Smirnov:

Para  $\alpha = 1\%$ , el valor crítico es  $1.63/\sqrt{n}$

Para  $\alpha = 5\%$ , el valor crítico es  $1.36/\sqrt{n}$

Para  $\alpha = 10\%$ , el valor crítico es  $1.22/\sqrt{n}$

## 1. Marco teórico

### 1.1 Valor en riesgo

El Valor en Riesgo (VaR) se define como la máxima pérdida posible de un portafolio, dados un nivel de confianza ( $\alpha$ )<sup>4</sup> y un periodo de tenencia. En términos estadísticos, el VaR corresponde al  $\alpha$ -ésimo cuantil ( $q\alpha$ ) de la función de distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, es decir, el VaR es el menos malo de los  $(1 - \alpha)\%$  peores casos de la distribución. De este modo, la pérdida de una inversión no puede exceder el VaR con probabilidad  $\alpha$  (Melo y Becerra, 2005).

En la literatura han sido ampliamente aceptados dos grandes grupos de modelos tradicionales

de medición del Valor en Riesgo: los modelos analíticos de formas paramétricas y los modelos por simulación.

**Modelos analíticos de formas paramétricas.** Entre estos, están los modelos que calculan el VaR a partir de una hipótesis para la función de pérdidas y ganancias. Comúnmente se suponen distribuciones normales o *t-student*, donde la distribución de la función de pérdidas y ganancias puede ser descrita por sus dos primeros momentos y a partir de estos se construye el VaR. En la *t-student*, para determinados grados de libertad, se presenta una curtosis más alta que la normal y, por tanto, los eventos extremos tienen mayor probabilidad de ocurrencia. Con ello, el VaR, suponiéndolo normal o *t-student*, puede ser calculado de la siguiente manera:

$$P[r_t \geq VaR] = P\left[\frac{r_t - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha \quad P[r_t \geq VaR] = 1 - \alpha$$

$$\frac{VaR - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \equiv Z_\alpha \quad VaR = \mu + \sigma Z_\alpha$$

$$VaR = t_v^{-1}(\alpha) \equiv t_{v,\alpha}$$

Donde:

$r_t$  son los retornos de los activos

$\Phi^{-1}(\bullet)$  es la función inversa de la distribución normal acumulada

$Z_\alpha$  es el  $\alpha$ -ésimo cuantil de una distribución normal estándar

$t_v^{-1}(\bullet)$  es la función inversa de la distribución *t*

$t_{v,\alpha}$  es el  $\alpha$ -ésimo cuantil de una distribución *t* con *v* grados de libertad

En la práctica se ha observado que el VaR con distribución *t* es más alto que el VaR que asume normalidad. En consecuencia, el VaR por normalidad subestima el riesgo en casos donde la distribución de pérdidas y ganancias presenta colas pesadas.

A este grupo pertenecen también los llamados modelos de varianzas y covarianzas, donde se parte de datos históricos para construir una matriz de correlaciones en un periodo de tenencia y los retornos de los activos se distribuyen normalmente. En este caso, el VaR es un múltiplo de la desviación típica del portafolio, que parte de la matriz de varianzas-covarianzas de los activos riesgosos que componen el portafolio. Así, el VaR será:

<sup>4</sup> El nivel de confianza se define como la probabilidad de que no se alcance el nivel de pérdida definido por el VaR.

$$VaR = P_o \alpha \sigma_p$$

Donde  $P_o$  es el valor inicial del portafolio,  $\alpha$  el nivel de confianza seleccionado y  $\sigma_p$  la desviación típica del portafolio. En estos modelos se supone que la volatilidad de los retornos es constante en el tiempo, lo que no es necesariamente cierto. Por tal motivo se hace la modelación de la volatilidad ( $\sigma$ ) a través de modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heterocedasticity Models) y GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) que suponen varianza condicional no constante (Tsay, 2002).

**Modelos por simulación.** El modelo por simulación histórica parte de datos históricos de la serie de retornos de los activos financieros, los cuales no dependen de ningún supuesto sobre su distribución. El VaR es calculado como el  $\alpha$ -ésimo percentil de la distribución empírica de pérdidas y ganancias, bajo el supuesto que la distribución no cambia en el tiempo (Melo y Becerra, 2005). En este caso, se utilizan datos del pasado como una predicción de lo que ocurriría en el futuro. Con eso se valoran los portafolios y se replican diferentes pautas temporales, de periodos anteriores, en las variables asumidas como activos riesgosos.

También hacen parte de este grupo los modelos de simulación Montecarlo. En esta se asume una distribución sobre los errores del modelo que describe la dinámica estocástica de los retornos, cuando esto es posible, y se supone, además, un modelo de comportamiento para cada activo riesgoso. La determinación de los movimientos de los activos riesgosos mediante Montecarlo,

se basa en la simulación de un elevado número de posibles valores para los activos riesgosos. Para ello se parte de la definición de un proceso estocástico y la estimación de sus parámetros, como la media y la varianza, a través del análisis de series históricas (por ejemplo, se presume que los precios del portafolio siguen un determinado proceso aleatorio) (Gento, 2001). Con esta hipótesis, los modelos tratan de estimar el cambio en el valor del portafolio a través de un gran número de escenarios generados aleatoriamente. Así, la simulación Montecarlo representa una cantidad de posibles trayectorias del proceso del valor del portafolio, y con base en ellas se determina la distribución esperada.

**Valor en Riesgo con Cópulas.** La función Cópula une en una distribución de probabilidad multivariada a una colección de funciones marginales univariadas. Se determina, de esta manera, la estructura de dependencia, tanto de la función de distribución conjunta del portafolio como de las marginales de cada activo riesgoso (Dowd, 2004b). La función Cópula se puede usar para resolver problemas de riesgo multivariado y calcular el VaR de un portafolio donde los activos riesgosos que lo componen se distribuyen de forma no normal. Permite calcular las relaciones de dependencia sin incurrir en las desventajas que presenta la correlación lineal, y posibilita, además, modelar la dependencia de valores extremos.

**Función cópula.** Una cópula d-dimensional es una función  $C:[0,1]^d \rightarrow [0,1]$  que cumple las siguientes propiedades para cada:

1. Si  $u_j = 0$  entonces  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$  para cada  $j = 1 \dots d$
2.  $C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j$
3. Para cada  $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T \in [0,1]^d$ ,  $v_j \leq u_j$ ,  $V_c(u, v) \geq 0$

Donde  $V_c(u, v)$  está dada por  $\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(g_{1i_1}, \dots, g_{di_d})$  y  $g_{j1} = v_j$  y  $g_{j2} = u_j$

Con estas propiedades se puede decir que las cópulas son funciones uniformes multivariadas, crecientes y no negativas.

El teorema de Sklar (Giacomini, 2005) muestra que es posible descomponer cada función de distribución en sus distribuciones marginales y, al menos, una cópula, la que será única si las distribuciones marginales y la multivariada son continuas.

Sea  $F$  una función de distribución  $d$ -dimensional con marginales  $F_1, \dots, F_d$ , entonces existe una cópula  $C$  con:  $F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ , para cada  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ . Si  $F_1, \dots, F_d$  son continuas, entonces  $C$  es única.

Por otro lado, si  $C$  es una cópula y  $F_1, \dots, F_d$  son funciones de distribución, entonces la función  $F$ , definida anteriormente, es una función de distribución conjunta con marginales  $F_1, \dots, F_d$ .

Así, para una distribución conjunta  $F$  con marginales continuas  $F_1, \dots, F_d$ , la cópula única  $C$  para todo  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)^T \in [0, 1]^d$  está definida como:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)\}$$

Para una cópula continua, la densidad cópula está definida por:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

**Cópula Gaussiana:** representa la estructura de dependencia para una distribución normal multivariada, lo que significa que distribuciones marginales normales combinadas con cópula gaussiana forman distribuciones normales multivariadas. Una expresión para la cópula gaussiana está dada por:

$$C_{\Psi}^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = F_Y\{\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)\} \\ = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} 2\pi^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{\text{abs}(\Psi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{1}{2} r^T \Psi^{-1} r} dr_1 \dots dr_d$$

Donde  $Y = (Y_1, \dots, Y_d)^T \sim N_d(0, \Psi)$  y  $r = (r_1, \dots, r_d)^T$ .

De manera específica, la cópula de una variable aleatoria se define de la siguiente manera (Giacomini, 2005):

Sea  $X = (X_1, \dots, X_d)^T$  un vector con distribución  $X \sim F_X$  y marginales continuas  $X_j \sim F_j$ . La cópula de  $X$  es la función de distribución  $C_X$  de  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)^T \in [0, 1]^d$  donde  $u_j = F_{X_j}(x_j)$ :

$$C_X(u_1, \dots, u_d) = F_X\{F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)\}$$

Para variables aleatorias independientes,  $X_1, \dots, X_d$ , la cópula de  $X$  es el producto definido por:

$$C_X(u_1, \dots, u_d) = F_X(x_1, \dots, x_d) \\ = \prod_{j=1}^d F_{X_j}(x_j)$$

La ecuación muestra cómo el producto cópula es el mismo para cualquier distribución marginal y determina la estructura de dependencia entre variables univariadas con marginales arbitrarias.

Para una variable aleatoria  $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ , la densidad cópula  $c_x$  está dada por:

$$c_X(u_1, \dots, u_d) = \frac{f\{F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)\}}{\prod_{j=1}^d f_j\{F_{X_j}^{-1}(u_j)\}}$$

Por otra parte, la función cópula puede asumir diferentes formas (Giacomini, 2005), entre las cuales, las más importantes son:

**t-cópula student.** La t-cópula que contiene la estructura de dependencia forma la distribución t multivariada. La t-cópula *student* está dada por:

$$C_{v,\psi}(u_1, \dots, u_d) = t_{v,\psi}\{t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)\}$$

Donde  $t_v^{-1}$  es la función cuantil para la distribución t univariada y  $t_{v,\psi}$  es la función de distribución de  $Y=(Y_1, \dots, Y_d)^T \sim t_d(v, 0, \psi)$ .

**Cópula arquimediana:**  $\phi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ . Son funciones continuas, estrictamente decrecientes y convexas con  $\phi(1)=0$ . La función  $C^d: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$

**Cópula de Frank.** La forma de esta cópula 2-dimensional está dada por:

$$C_{Frank}(u, v) = \begin{cases} -\frac{1}{\theta} \text{Ln} \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] & \forall \theta \in ]-\infty, \infty[ \setminus \{0\} \\ uv & \text{para } \theta = 0 \end{cases}$$

**Cópula de Gumbel-Hougaard.** La forma de esta cópula 2-dimensional está dada por:

$$C_{GH}(u, v) = \exp \left\{ - \left[ (-\text{Ln} u)^\theta + (-\text{Ln} v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$$

El parámetro  $\theta$  puede tomar todos los valores en el intervalo  $[1, \infty]$ .

**Cópula de Clayton.** La forma de esta cópula 2-dimensional está dada por:

$$C_{Clayton}(u, v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1/a}$$

El parámetro  $a$  puede tomar todos los valores en el intervalo  $]0, \infty[$ .

## 1.2 Estado del arte del valor en riesgo a través de cópulas

Una aplicación de cópulas utilizadas para la administración de riesgos la presenta la Banca Romana, donde Romero (2002), en su estudio *Applying copula function to risk management*, pretende mostrar el uso de una función cópula diferente de la gaussiana que captura eventos extremos de manera efectiva. El autor probó que cópulas elípticas son particularmente fáciles de implementar en modelos de simulación Montecarlo para estimar medidas de riesgo. Además, para 10 acciones italianas importantes,

$$C^d(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}\{\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)\}$$

es una cópula llamada cópula arquimediana y las funciones  $\phi$  sus generadoras.

En la literatura correspondiente se viene trabajando, recientemente, con cópulas que tienen una estructura más simple y que pertenecen a la familia de cópulas caracterizadas por un solo parámetro. Para el caso particular de cópulas 2-dimensionales, se tienen las siguientes formas de cópulas (Rank, 2002):

demonstró que asumir una distribución normal multivariada para los retornos subestima el VaR y la pérdida esperada de un portafolio, mientras que a través de una cópula *t-student* esta banca obtuvo una estimación más adecuada de las medidas de riesgo.

De igual manera, en la Universidad Humboldt de Berlín, Giacomini (2005), en su estudio *Risk management with copulae*, utilizó tres diferentes cópulas (Gumbel-Hougaard, Clayton y Gaussian) para estimar el valor en riesgo de un portafolio 2-dimensional. Verificó que la estructura de dependencia de los activos riesgosos que componían el portafolio estaba representada de forma similar en las tres cópulas. Sin embargo, la estimación por cópulas Clayton y Gaussian sobrestimaba el VaR, mientras que por Gumbel-Hougaard arrojaba resultados más cercanos a los deseables, debido a que parecía

representar más exactamente la relación de dependencia entre las variables. Lo anterior lo llevó a concluir que en la aplicación de cópulas es crucial para la obtención de resultados realistas y útiles la elección adecuada de la cópula que determine la estructura de dependencia de los activos riesgosos del portafolio, toda vez que de ello dependerá si los requerimientos de capital para las instituciones están subestimados o sobreestimados.

Por otra parte, en la Universidad de Cagliari, en Italia, Micocci y Masala (2004), en el estudio titulado *Backtesting value-at-risk estimation with non gaussian marginals*, usaron cópulas para modelar la estructura de dependencia entre los retornos de los activos, sin hacer uso de supuestos de normalidad en la distribución conjunta y en las marginales. Para tal efecto y para calcular la probabilidad de pérdida del portafolio, utilizaron las funciones cópula arquimediana y *t-student* en tres activos riesgosos que lo conformaban (luego ampliaron el portafolio a 22 activos riesgosos). Los autores compararon luego los resultados con una simulación Montecarlo clásica y llegaron a la conclusión que, evidentemente, los retornos de los activos riesgosos poseen colas pesadas que hacen inadecuados los supuestos de normalidad en la función de distribución marginal de estos. Por consiguiente, el Montecarlo clásico resultó ser poco adecuado para modelar distribuciones leptocúrticas, mientras que la cópula *t-student* parece ajustar mejor los cuantiles altos de la distribución de los retornos.

También en la Universidad de Oxford se han venido adelantando investigaciones para la aplicación de cópulas. Es el caso del estudio llamado *Improving VaR calculations by using copulas and non-Gaussian margins*, donde Rank (2002) tuvo como objetivo aplicar un método alternativo a los tradicionales para el cálculo del valor en riesgo de un portafolio financiero. Para ello se tomaron datos históricos de los tipos de cambio GBP/DEM y USD/DEM y se calculó el VaR del portafolio conformado por estos. Los

resultados se obtuvieron a través de simulación Montecarlo y de cópulas Frank y Gumbel-Hougaard, de tal manera que se pudieran comparar los dos métodos. Los investigadores concluyeron que la cópula Gumbel-Hougaard es adecuada para describir estructuras de dependencia positivas. Además, al comparar la cópula de Gumbel-Hougaard con la de Frank, se observa que son más realistas los resultados del VaR con esta última, por lo cual es de mayor aceptación. En general, concluyeron que el método de cópulas es necesario si se quiere considerar funciones de distribución arbitrarias para las marginales. Por lo demás, este método arroja resultados más realistas que los obtenidos por métodos tradicionales (Montecarlo o de varianza-covarianza), si se usa con marginales distribuidas como una *t-student*.

A los estudios anteriores sobre cópulas y valor en riesgo, se une el estudio realizado por la Reserva Federal de Nueva York llamado *A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risk*. En este, Rosenberg y Schuermann (2004) usan el método de cópulas para construir la distribución de riesgo conjunta para un banco activo internacionalmente, con el fin de poder combinar los diferentes tipos de riesgo en una sola distribución. Se obtuvo una distribución conjunta, formada por distribuciones marginales consistentes y realistas, la cual conserva importantes propiedades de los riesgos individuales. Sin embargo, advierten, la medida del riesgo es más exacta cuando se agregan el riesgo de mercado y de crédito que cuando se agregan el de mercado, de crédito y el operacional, ya que este último exige un trato especial cuando se pretende incluirlo.

Finalmente, al hacer un repaso general de los estudios que se han realizado recientemente sobre la utilización de cópulas, se verifica que Embrechts y Straumann (1999) estuvieron entre los primeros en introducir esta herramienta a la literatura financiera. Por su parte, Li (2000) generó una aplicación al riesgo de crédito y a derivados. Adicionalmente,

algunos trabajos se centraron en la agregación de diferentes tipos de riesgo. El de Wang (1999, 2000), por ejemplo, modeló la agregación del amplio portafolio de riesgo que enfrenta una aseguradora con un conjunto bastante diversificado de distribuciones marginales de los riesgos. Del mismo modo, Ward y Lee (2002) se aproximaron al problema de agregación de riesgos usando una cópula gaussiana.

## 2. Metodología

### 2.1. Descripción de las series

Como activos riesgosos se utilizaron datos diarios de cuatro acciones colombianas: Suraminv, Bogotá, Inverargos y Colinvers. Período comprendido entre el 15 de marzo de 2004 y el 15 de marzo de 2007, para un total de 733 días de negociación. Las acciones seleccionadas hacen parte de las de mayor bursatilidad en el mercado.

La clasificación de las acciones colombianas, basada en la bursatilidad de estas, se encuentra en el reporte mensual generado por la Superintendencia Financiera de Colombia<sup>5</sup>. A partir del reporte correspondiente a diciembre de 2006,

las acciones de alta bursatilidad en Colombia son: Almacenes Éxito S.A., Bancolombia S.A., Cementos Argos S.A., Compañía Colombiana de Inversiones S.A., Inversiones Argos S.A., Suramericana de Inversiones S.A., Grupo Nacional de Chocolates S.A., Interbolsa S.A., Tablemac S.A., Banco de Bogotá S.A., Coltejer, Paz del Río.

Si se tienen en cuenta las series de precios de las acciones seleccionadas, los retornos son calculados con la diferencia logarítmica (rendimientos), lo cual genera una serie de retornos compuestos continuos. Para los retornos diarios, solo se tomaron en cuenta los precios de cierre diarios, sin realizar interpolaciones o ajustes para los fines de semana y festivos (Maya & Torres, 2004). También se realizaron pruebas de normalidad y de mejor ajuste, mediante Best Fit, para los retornos de las acciones seleccionadas. Las pruebas rechazaron la existencia de normalidad, según el estadístico de Jarque Bera (tabla 1). El mejor ajuste lo presentaron distribuciones empíricas, seguidas de t-student y logística, aunque en todos los casos se rechazó la hipótesis con el estadístico de Kolmogorov-Smirnov (apéndice I).

**Tabla 1**  
Estadística descriptiva de retornos de las acciones, 2004-2007

	Suraminv	Bogotá	Inverargos	Colinvers
Media	0,0015	0,0013	0,0014	0,0015
Mediana	0,0011	0,0000	0,0011	0,0010
Máximo	0,1979	0,1196	0,2286	0,1955
Mínimo	-0,2050	-0,1050	-0,1610	-0,1858
Desviación estándar	0,0265	0,0196	0,0253	0,0260
Coeficiente de asimetría	-0,3980	-0,1334	0,2400	-0,5746
Curtosis	15,9085	13,3323	17,7228	16,7156
<b>Jarque-Bera</b>	<b>5108,5</b>	<b>3262,7</b>	<b>6600,2</b>	<b>5769,9</b>
<b>Probabilidad</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>

Fuente: Cálculos propios.

<sup>5</sup> De acuerdo con el artículo 1.2.1.1 de la resolución 1200 de 1995, modificado mediante resoluciones 638 del 29 de septiembre de 1998 y 521 del 30 de julio de 2002, la Superintendencia Financiera de Colombia informó el Índice de Bursatilidad Accionaria para las acciones que se negociaban en bolsa, correspondiente al mes de diciembre de 2006.

Tal como se observa en la tabla 1, el coeficiente de asimetría sugiere la existencia de colas en las distribuciones de los retornos. Al parecer, Suraminv, Bogotá y Colinvers presentan distribuciones con sesgo izquierdo, dado el signo negativo del estadístico. Entre tanto, Inverargos tiene distribución con sesgo derecho. En cuanto a la curtosis, parece que los retornos de las acciones poseen distribuciones leptocúrticas, dado que el valor del estadístico es mayor que tres en todos los casos. Se evidencia así la existencia de colas pesadas y la necesidad de implementar una metodología de cálculo del VaR sin partir de supuestos de normalidad para los retornos de las acciones.

## 2.2 Cálculo del VaR con cópulas

A partir de las series de los retornos de las acciones, se determina la distribución marginal que recoge más adecuadamente el comportamiento de cada activo riesgoso (retornos de las acciones). Para ello, se realiza un ajuste entre varias distribuciones que puedan describir a cada activo riesgoso. A través de pruebas estadísticas y con los valores críticos de Kolmogorov-Smirnov, Chi-cuadrado y Anderson-Darling se identifica cuál es la distribución que da mejor ajuste a las marginales de cada activo riesgoso.

Los parámetros  $\delta_j$  de las distribuciones marginales, determinadas para cada activo riesgoso, se estiman por máxima verosimilitud. Luego son usados en la determinación de la estructura de dependencia a través del parámetro  $\theta$  en la cópula. Por tanto, el problema de maximización a resolver será:  $\max_{\delta} \ell_j(\delta_j)$ . La función de log-verosimilitud de cada distribución marginal está dada por:

$$\ell_j(\delta_j) = \sum_{i=1}^T \ln f_j(x_{j,i}; \delta_j)$$

Se estiman los parámetros  $\hat{\delta}_j = \arg \max_{\delta} \ell_j(\delta_j)$ .

Una vez conseguidos los parámetros de las marginales, se selecciona la función de distribución conjunta de los activos riesgosos, es decir, se obtiene la cópula. Se calcula también el parámetro  $\theta$  que revela la estructura de dependencia de los activos riesgosos. Por tanto, la cópula está definida como:

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

Donde las  $F_1$  son las distribuciones marginales y las cópulas  $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$  utilizadas fueron la cópula de Gumbel-Hougaard, la cópula de Frank y la de Clayton, cuyo parámetro  $\theta$  debe ser estimado por máxima verosimilitud. Así, desde la probabilidad acumulada  $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$  se obtiene la función de densidad de probabilidad, a través del cálculo de la derivada parcial de  $C$  con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_1), v=F_2(x_2)} f(x_1) f(x_2) \end{aligned}$$

Para las cópulas de Frank, Gumbel-Hougaard y Clayton se calculó la derivada parcial y se obtuvieron los siguientes resultados (Apéndice II):

Cópula de Frank: 
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{Frank}(u, v) = \frac{e^{-\theta u} e^{-\theta v} (1 - e^{-\theta}) \theta}{[e^{-\theta} - 1 + e^{-\theta u} - 1 (e^{-\theta v} - 1)]^2}$$

Cópula de Gumbel-Hougaard:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{GH}(u, v) = \frac{(-\ln u)^{\theta-1}}{u} \frac{(-\ln v)^{\theta-1}}{v} \times e^{-\Sigma^{1/\theta}} \left( \Sigma^{-2(\theta-1)/\theta} + (\theta-1)\Sigma^{-(2\theta-1)/\theta} \right)$$

$$\text{Donde } \Sigma = (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta$$

$$\text{Cópula de Clayton: } \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{CL}(u, v) = (a+1)u^{-(a+1)}v^{-(a+1)} \left[ u^{-a} + v^{-a} - 1 \right]^{-\frac{(2a+1)}{a}}$$

Con estas ecuaciones se obtiene la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = L((x_{1,1}, x_{2,1}), \dots, (x_{1,N}, x_{2,N}); \theta) = \prod_{j=1}^N f(x_{1,j}, x_{2,j})$$

Con la maximización de  $L(\theta)$  se obtiene el parámetro estimado  $\hat{\theta}$  (Apéndice III).

Se generan así números pseudo-aleatorios que obedecen a la estructura de dependencia de la cópula seleccionada (donde están insertos el parámetro  $\hat{\theta}$  y las distribuciones marginales de los activos riesgosos), formando posibles escenarios para el portafolio. En este caso, son dos números pseudo-aleatorios  $u$  y  $w$  distribuidos uniformemente en  $[0,1]$ . Se calcula  $v = C_u^{-1}(w)$  para las cópulas de Frank, Gumbel-Hougaard y Clayton. De este modo, se determinan  $x_1 = F_1^{-1}(u)$  y  $x_2 = F_2^{-1}(v)$  para obtener un par  $(x_1, x_2)$  de números pseudo-aleatorios con la estructura de dependencia deseada.

Finalmente, se calcula el valor en riesgo del portafolio, para lo cual se obtiene el VaR a niveles de confianza del 90% ( $\alpha_1=10\%$ ), 95% ( $\alpha_2=5\%$ ), y 99% ( $\alpha_3=1\%$ ). El número de pérdidas subestimadas con relación al número total de valores testeados da tres resultados  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$  y  $\hat{\alpha}_3$  que pueden ser comparados con los tres cuantiles  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ .

### 3. Resultados empíricos

En este estudio se simularon diferentes portafolios conformados por dos activos riesgosos, que para el caso fueron las acciones colombianas Suraminv, Bogotá, Inverargos y Colinvers. Se utilizaron las cópulas de Frank, Gumbel-Hougaard y Clayton como distribuciones

conjuntas para el portafolio, mientras que las distribuciones marginales ajustadas a los retornos de las acciones fueron las distribuciones empírica, uniforme y *t-student*. Como se dijo anteriormente, la *t-student* fue implementada como ejercicio académico dado que las pruebas de ajuste fueron rechazadas. Es pertinente aclarar que en la literatura existente sobre cópulas es común encontrar el uso de distribuciones marginales *t-student*.

Para obtener el parámetro  $\theta$  de las cópulas, que representa la estructura de dependencia de los activos riesgosos del portafolio, es necesario encontrar la correlación de los activos a través del coeficiente Tao de Kendall<sup>6</sup>. Con base en este se estima por máxima verosimilitud el Theta para cada cópula, tal como se muestra en la tabla 2.

Como se aprecia en la tabla, las acciones que conforman cada portafolio están positivamente correlacionadas. La mayor correlación la presentan las acciones Suraminv-Inverargos y Suraminv-Colinvers. El parámetro  $\theta$  para cada cópula está dentro de los valores teóricos que pueden tomar en cada caso. Así,  $\theta_{Frank} \in ]-\infty, \infty[$ ,  $\theta_{Gumbel} \in [1, \infty[$  y  $\theta_{Clayton} \in ]0, \infty[$ . Este parámetro  $\theta$  es el que muestra la estructura de dependencia del portafolio.

<sup>6</sup> Medida de correlación alternativa a las correlaciones de Spearman y de Pearson. No supone normalidad en las variables y es usada para medir el grado de correspondencia entre dos rankings; mide la significancia de esta correspondencia.

**Tabla 2**  
Parámetros utilizados en las Cópulas

Portafolios	Tao de Kendall ( $\tau$ )	Theta ( $\theta$ )		
		Frank	Gumbel-H	Clayton
Suraminv-Bogotá	0,3756	3,8340	1,6015	1,2030
Suraminv-Inverargos	0,4888	5,5362	1,9561	1,9123
Suraminv-Colinvers	0,4886	5,5322	1,9553	1,9123
Bogotá-Inverargos	0,3210	3,1597	0,9456	1,4728
Bogotá-Colinvers	0,2884	2,7869	1,4052	0,8104
Inverargos-Colinvers	0,4247	4,5113	1,7382	1,4763

Fuente: Cálculos propios.

Con tal información y con las simulaciones de distribuciones marginales de los retornos, se calcularon las cópulas para cada portafolio (figura A1, apéndice IV). Con estas, se obtuvo el VaR de los portafolios seleccionados, donde se observan los porcentajes de pérdida que pueden obtenerse simultáneamente, en un día, en las acciones que conforman un portafolio a niveles de confianza del 99%, 97%, 95% y 90%.

Con el fin de hacer la comparación de resultados, se calculó el VaR por medio del método de simulación histórica. Se hicieron, entonces, visibles las diferencias entre el VaR con cópulas y el método tradicional de simulación histórica.

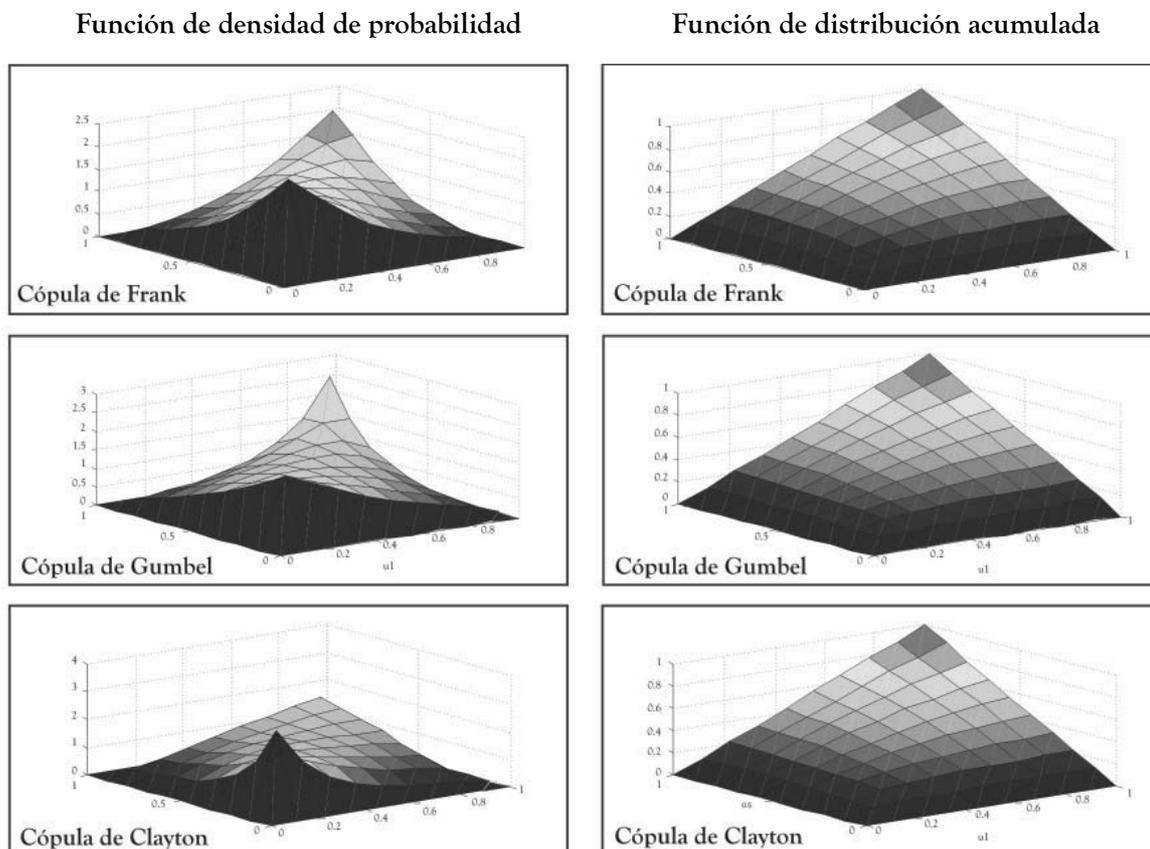
La tabla 3 resume los resultados del VaR mediante cópulas y de la simulación histórica para los seis portafolios conformados por dos acciones cada uno. Además, se observa allí el resultado para cada uno de los tipos de distribuciones marginales que se utilizaron, es decir, las cópulas de Frank, Gumbel- Hougaard y Clayton para los activos riesgosos con distribuciones marginales empíricas, uniformes y *t-student*.

De acuerdo con los resultados de la tabla 3, para el portafolio conformado por Suraminv-Bogotá,

el VaR calculado con distribuciones marginales empíricas de los retornos presenta un mayor porcentaje de pérdida con la cópula de Clayton a un nivel de confianza del 99%; por su parte, las cópulas de Frank y de Gumbel- Hougaard muestran igual porcentaje de pérdida al mismo nivel de confianza. Así, en este portafolio pueden perderse simultáneamente un 4,1% en Suraminv y un 1,3% en Bogotá según las cópulas de Frank y Gumbel- Hougaard, mientras que con Clayton la pérdida sería de 5,6% en Suraminv y de 2,2% en Bogotá con una probabilidad del 1%.

Al comparar estos resultados con la simulación histórica, se encuentra cómo este método sobrestima la pérdida en el portafolio, dado que el porcentaje de pérdida está muy por encima de los observados con las tres cópulas. En consecuencia, el valor del portafolio en un día es menor calculado con el método tradicional que con cópulas (tabla 4), por lo cual el capital regulatorio podría ser mayor al verdaderamente requerido. El que la simulación histórica sobrestime la pérdida de valor del portafolio también se debe a que el mercado colombiano estuvo afectado por momentos históricos muy extremos como la caída de las acciones en junio de 2006, lo que incide en la información recogida por este método de simulación para calcular el VaR.

**Figura 1**  
Cópulas de Frank, Gumbel- Hougaard y Clayton para Suraminv-Bogotá



De igual manera, para los demás portafolios con distribuciones marginales empíricas, la cópula de Clayton es la que mayor porcentaje de pérdida simultánea presenta para los retornos de las acciones y permanece la simulación histórica como la que sobrestima el valor en riesgo del portafolio (tabla 4).

Por otro lado, para el caso en que las distribuciones marginales son uniformes, el mayor porcentaje de pérdidas simultáneas en los retornos de las acciones de los portafolios lo presenta la cópula de Clayton, mientras que Frank y Gumbel- Hougaard continúan arrojando resultados muy cercanos. También en este evento, el VaR calculado por simulación histórica tiende a estar por encima de los demás resultados, por lo que el valor del portafolio

es menor con este método como lo muestra la tabla 4.

En cuanto al VaR calculado con marginales distribuidas *t-student*, se observa que este supera el porcentaje de pérdidas arrojado con las demás distribuciones a través de todas las cópulas y a cada nivel de confianza analizado. Se acerca, pues, a los valores arrojados por la simulación histórica. Si se tiene en cuenta que al hacer las pruebas de ajuste fue rechazada la *t-student* como la distribución que mejor ajustaba el comportamiento de los retornos, es razonable que a través de esta, al igual que mediante la simulación histórica, se sobrestimara el valor en riesgo de cada uno de los portafolios. El VaR obtenido con distribuciones marginales empíricas y uniformes presenta resultados muy

Tabla 3. Resultados del VaR calculado por el Método de Cópulas y por el Método de Simulación Histórica

Portafolio	Cuantiles	VaR																	
		Frank				Gumbel				Clayton									
		Marginales Empíricas		Marginales t-student		Marginales Empíricas		Marginales Uniformes		Marginales Empíricas		Marginales Uniformes		Marginales t-student					
Suraminv- Bogotá	1%	-4,13%	-3,61%	-2,16%	-15,21%	-8,58%	-1,37%	-1,37%	-3,71%	-2,32%	-2,32%	-16,70%	-9,41%	-5,62%	-2,20%	-1,16%	-5,60%	-6,73%	
	3%	-4,13%	-2,15%	-1,38%	-8,60%	-4,69%	-1,38%	-1,38%	-2,15%	-1,38%	-1,38%	-7,77%	-4,43%	-4%	-1%	-3,63%	-2,22%	-4,81%	-3,32%
	5%	-2,65%	-1,74%	-1,10%	-6,28%	-3,60%	-0,54%	-0,54%	-1,72%	-1,08%	-1,08%	-5,62%	-3,03%	-3%	2%	-2,61%	-1,58%	-3,69%	-2,32%
	10%	-1,09%	-0,67%	-0,67%	-0,67%	-0,67%	-0,67%	-0,67%	-1,01%	-0,63%	-0,63%	-3%	2%	2%	-1,46%	-0,88%	-5%	-2,26%	-1,40%
Suraminv- Inverargos	1%	-5,60%	-3,61%	-2,16%	-13,73%	-13,22%	-1,71%	-1,71%	-4,13%	-4,08%	-4,08%	-16,04%	-15,56%	-6,88%	-4,48%	-6,11%	-6,11%	-8,80%	-7,35%
	3%	-4%	-2,43%	-2,31%	-7,11%	-6,92%	0%	0%	-2,61%	-2,35%	-2,35%	-7,11%	-6,92%	-4%	0%	-3,84%	-3,82%	-4,81%	-4,48%
	5%	-1,91%	-1,91%	-1,89%	-5,62%	-5,48%	-1,91%	-1,91%	-1,91%	-1,89%	-1,89%	-5,62%	-5,48%	-3%	-3%	-1,72%	-1,66%	-3,69%	-3,46%
	10%	-1,30%	-1,28%	-1,28%	-3%	-3%	-1,22%	-1,22%	-1,22%	-1,23%	-1,23%	-3%	-3%	-3%	-4%	-1,72%	-1,76%	-2,26%	-2,23%
Suraminv- Colinvers	1%	-4,13%	-3,09%	-3,32%	-6,28%	-5,91%	-4,13%	-3,09%	-4,13%	-3,67%	-3,67%	-7,11%	-6,77%	-5,62%	-4,50%	-6,03%	-6,03%	-8,80%	-8,53%
	3%	-3%	-2,43%	-2,25%	-4,13%	-3,95%	-2%	-2%	-2,61%	-2,35%	-2,35%	-4,13%	-3,95%	-4%	-3%	-3,84%	-3,41%	-4,81%	-4,52%
	5%	-1,91%	-1,91%	-1,72%	-3,31%	-3,09%	-1,91%	-1,91%	-1,91%	-1,72%	-1,72%	-3,31%	-3,09%	-3%	-3%	-3,03%	-2,67%	-3,69%	-3,23%
	10%	-1,29%	-1,25%	-1,25%	-1,25%	-1,25%	-1,22%	-1,22%	-1,22%	-1,20%	-1,20%	-1,22%	-1,20%	-1,22%	-1,20%	-1,22%	-1,57%	-2,26%	-2,14%
Bogotá- Inverargos	1%	-2,20%	-2,10%	-3,11%	-8,01%	-14,12%	-2,20%	-1,71%	-1,32%	-2,06%	-2,06%	-4,43%	-7,46%	-6,03%	-4,69%	-5,16%	-5,94%	-6,73%	-7,35%
	3%	-1,32%	-1,32%	-2,06%	-4,43%	-7,46%	-1%	0%	-0,74%	-1,30%	-1,30%	-2,78%	-4,59%	-3%	-3%	-2,32%	-3,47%	-4,48%	-4,48%
	5%	-1,02%	-1,02%	-1,69%	-3,03%	-5,48%	-0,57%	-0,57%	-0,94%	-0,94%	-0,94%	-1,95%	-3,15%	-2,20%	-1,71%	-1,63%	-2,44%	-2,32%	-3,46%
	10%	-0,62%	-0,62%	-1,02%	-1,02%	-1,02%	-0,22%	-0,22%	-0,35%	-0,35%	-0,35%	-1%	-1%	-1%	0%	-0,96%	-1,57%	-1,40%	-2,23%
Bogotá- Colinvers	1%	-1,37%	-1,98%	-2,82%	-3,60%	-5,91%	-1,37%	-3,09%	-2,02%	-2,93%	-2,93%	-3,60%	-5,91%	-3,03%	-5,91%	-4,45%	-4,96%	-6,73%	-8,53%
	3%	-1,29%	-1,87%	-1,87%	-2,20%	-3,95%	-1,27%	-1,80%	-1,80%	-1,27%	-1,80%	-2,20%	-3,95%	-1%	-3%	-1,93%	-2,79%	-3,32%	-4,52%
	5%	-0,96%	-1,50%	-1,50%	-1,95%	-3,09%	-0,92%	-1,46%	-1,46%	-0,92%	-1,46%	-1,95%	-3,09%	-1%	-1,35%	-2,09%	-2,20%	-2,32%	-3,23%
	10%	-0,59%	-0,90%	-0,90%	-0,90%	-0,90%	-0,53%	-0,84%	-0,84%	-0,53%	-0,84%	-0,90%	-0,90%	-0,53%	-0,71%	-1,21%	-1%	-1,40%	-2,14%
Inverargos- Colinvers	1%	-1,71%	-3,24%	-3,11%	-6,03%	-5,91%	-3,15%	-5,91%	-3,62%	-3,33%	-3,33%	-6,03%	-5,91%	-4,59%	-7,31%	-5,94%	-5,87%	-7,35%	-8,53%
	3%	-2,27%	-2,27%	-2,18%	-4,03%	-3,95%	-2,27%	-2,27%	-2,20%	-2,20%	-2,20%	-4,05%	-3,95%	-3,47%	-3,47%	-3,47%	-3,28%	-4,48%	-4,52%
	5%	-0,27%	-3,09%	-1,80%	-1,65%	-3,15%	-0,27%	-3,09%	-1,80%	-1,63%	-1,63%	-3,15%	-3,09%	-0,27%	-3,09%	-2,44%	-2,59%	-3,46%	-3,23%
	10%	-1,20%	-1,16%	-1,16%	-1,16%	-1,16%	-1,12%	-1,07%	-1,07%	-1,12%	-1,07%	-1,12%	-1,07%	-1,12%	-1,07%	-1,57%	-1,50%	-2,23%	-2,14%

Fuente: Cálculos propios

Nota: Los grados de libertad que se utilizaron para obtener las distribuciones *t-student* fueron conseguidos del best fit realizado a las series. Los grados de libertad para cada acción fueron: Suraminv (1,6831), Bogotá (1,3014), Inverargos (1,5542) y Colinvers (2,0789).

**Tabla 4**  
Valor del portafolio estimado con los métodos tradicional y alternativo

Portafolios	Dato histórico en t	Dato histórico en t+1	Valor del portafolio en t+1 ( $\alpha=1$ )												Simulación Histórica
			Frank			Gumbel			Clayton			t-student			
			Empírica	Uniforme	t-student	Empírica	Uniforme	t-student	Empírica	Uniforme	t-student				
Suraminv	18.100	18.280	17.352	17.446	15.346	17.352	17.429	15.077	17.082	17.087	15.346	17.082	17.087	15.346	16.507
Bogotá	29.500	29.500	29.095	28.862	26.969	29.095	28.814	26.724	28.851	27.977	26.969	28.851	27.977	26.969	27.515
Portafolio completo	47.600	47.780	46.447	46.308	42.315	46.447	46.243	41.801	45.933	45.064	42.315	45.933	45.064	42.315	44.022
Suraminv	18.100	18.280	17.087	17.446	15.616	17.087	17.352	15.197	16.855	17.073	15.466	16.855	17.073	15.466	16.507
Inverargos	11.160	11.280	10.969	10.919	9.685	10.969	10.704	9.424	10.660	10.479	9.585	10.660	10.479	9.585	10.340
Portafolio completo	29.260	29.560	28.056	28.365	25.300	28.056	28.057	24.621	27.516	27.551	25.051	27.516	27.551	25.051	26.847
Suraminv	18.100	18.280	17.352	17.421	16.963	17.352	17.352	16.813	17.082	17.073	16.274	17.082	17.073	16.274	16.507
Colinvers	22.040	22.340	21.359	21.307	20.738	21.359	21.232	20.548	21.049	20.710	19.927	21.049	20.710	19.927	20.160
Portafolio completo	40.140	40.620	38.711	38.728	37.701	38.711	38.585	37.361	38.131	37.783	36.201	38.131	37.783	36.201	36.667
Bogotá	29.500	29.500	28.851	28.881	27.138	28.851	29.109	28.192	28.117	27.977	29.500	28.117	27.977	29.500	27.515
Inverargos	11.160	11.280	10.969	10.813	9.585	10.969	10.930	10.327	10.488	10.497	11.160	10.488	10.497	11.160	10.340
Portafolio completo	40.660	40.780	39.820	39.694	36.722	39.820	40.040	38.519	38.604	38.474	40.660	38.604	38.474	40.660	37.854
Bogotá	29.500	29.500	29.095	28.916	28.437	29.095	28.904	28.437	28.606	28.189	27.947	28.606	28.189	27.947	27.515
Colinvers	22.040	22.340	21.359	21.419	20.738	21.359	21.394	20.738	20.738	20.948	20.117	20.738	20.948	20.117	20.160
Portafolio completo	51.540	51.840	50.454	50.335	49.175	50.454	50.298	49.175	49.344	49.136	48.065	49.344	49.136	48.065	47.675
Inverargos	11.160	11.280	10.969	10.798	10.488	10.809	10.756	10.488	10.648	10.497	10.066	10.648	10.497	10.066	10.340
Colinvers	22.040	22.340	21.049	21.355	20.738	20.738	21.307	20.738	20.428	20.746	19.927	20.428	20.746	19.927	20.160
Portafolio completo	33.200	33.620	32.018	32.153	31.226	31.547	32.063	31.226	31.076	31.243	29.993	31.076	31.243	29.993	30.500

Fuente: Cálculos propios

**Nota:** Los grados de libertad que se utilizaron para obtener las distribuciones *t-student* fueron conseguidos del best fit realizado a las series. Los grados de libertad para cada acción fueron: Suraminv (1,6831), Bogotá (1,3014), Inverargos (1,5542) y Colinvers (2,0789).

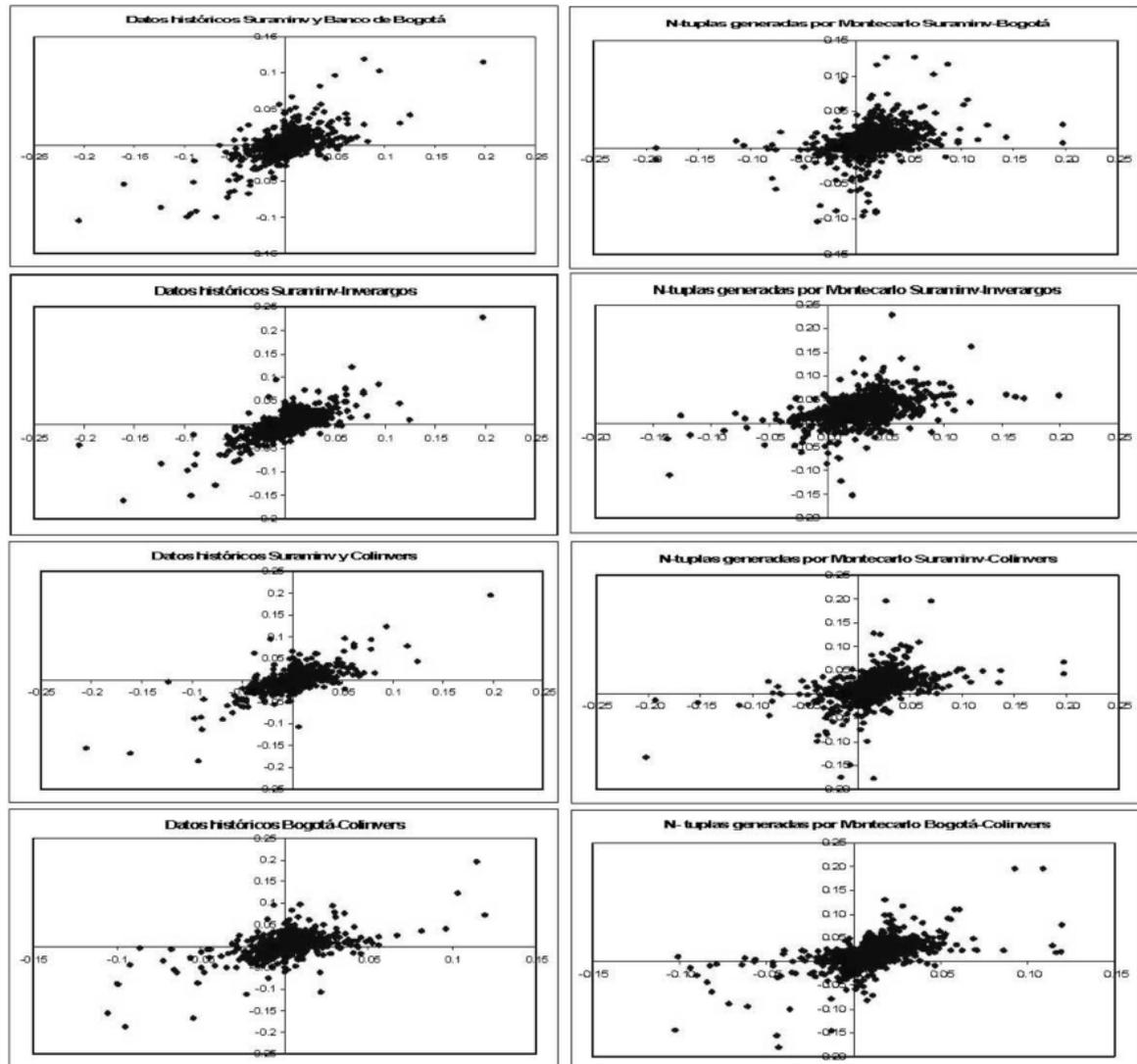
similares, con pequeños cambios, entre las cópulas de Frank y Gumbel-Hougaard; son más realistas los resultados con Gumbel-Hougaard, debido a que las correlaciones positivas entre las acciones de un portafolio son mejor modeladas con este método, tal como lo ha demostrado la evidencia empírica.

Con base en lo anterior, se puede deducir que el cambio del método tradicional de simulación histórica al método de cópulas con distribuciones empíricas y uniformes puede mejorar el cálculo del VaR, cuando se aplican las cópulas de Frank y Gumbel-Hougaard. Así se puede apreciar en la tabla 4 cuando se compara el valor estimado del portafolio a través de cópulas y de simulación histórica con el valor real tomado de los datos históricos. La estimación del VaR por el método de cópulas presenta resultados más cercanos a la realidad que la estimación por simulación histórica, pues las cópulas estimadas con marginales *t-student* son muy similares a las logradas por el método tradicional.

Adicionalmente, a partir de los parámetros obtenidos a través de las cópulas estimadas y con distribuciones marginales empíricas, se generaron, por simulación Montecarlo, n-tuplas de valores para los activos riesgosos, formando posibles escenarios para cada portafolio. De este modo, se determinan  $x_1 = F_1^{-1}(u)$  y  $x_2 = F_2^{-1}(v)$  y se obtiene un par  $(x_1, x_2)$  de números pseudo-aleatorios con la estructura de dependencia deseada como se muestra en la figura 2. Allí se comparan los valores simulados para los retornos de las acciones con los valores históricos de estos.

Al comparar las n-tuplas generadas por Montecarlo con los datos históricos, se encuentra la adecuada representación de las series con una distribución empírica, donde los datos extremos son importantes, dado que modelar las colas pesadas tiene un gran impacto en el VaR de cada portafolio.

Figura 2  
N-tuplas generadas por Simulación Monte Carlo



Fuente: Elaboración propia

### Conclusiones

Como se ha expuesto, en este estudio se han utilizado las cópulas en tanto método alternativo para calcular el valor en riesgo de un portafolio. Para tal efecto, se utilizaron portafolios conformados por dos activos riesgosos (acciones colombianas), pero el método puede ser perfectamente generalizado a un portafolio compuesto por  $n$  activos riesgosos.

Las cópulas que se aplicaron fueron las de Frank, Gumbel-Hougaard y Clayton, que pertenecen a la familia de cópulas de un solo parámetro. No fue necesario partir de supuestos de normalidad para los retornos de las acciones, y la correlación entre los activos riesgosos se calculó a través del Tao de Kendall, una medida alternativa que no exige la existencia de tales supuestos. Por consiguiente, la estructura de dependencia del portafolio y los activos que lo conforman no dependía de la correlación individual, sino de

la estructura de dependencia arrojada por el parámetro  $\theta$ , estimado a través de las cópulas.

Para los portafolios utilizados en el estudio, es claro que el método de cópulas presentó unos resultados más realistas que el método tradicional de simulación histórica, dado que este último sobrestimaba el valor en riesgo del portafolio. Más aun, entre las cópulas utilizadas, la de Clayton arrojó resultados muy cercanos a la simulación histórica para las tres distribuciones marginales asumidas en los portafolios (empírica, uniforme y *t-student*), por lo que, al parecer, es más adecuado el cálculo del VaR con las cópulas de Frank y Gumbel- Hougaard. Estas presentaron resultados muy similares cuando se calcularon con distribuciones marginales empíricas y uniformes.

La determinación de las distribuciones marginales que se ajusten al comportamiento de los retornos ejerce gran influencia en la valoración del VaR. Por tal razón se debe ser muy cuidadoso en su identificación. En el trabajo que se analiza se asumieron marginales empíricas, ya que las pruebas de ajuste rechazaban las demás distribuciones posibles. No obstante, como ejercicio académico, y siguiendo la literatura existente sobre cópulas, también se admitieron las distribuciones uniforme y *t-student*. El uso de la uniforme se explica por la necesidad de tener un punto de comparación con una medida de la máxima incertidumbre, donde se les da la misma probabilidad de ocurrencia a todos los eventos. Por otro lado, se recurrió a la *t-student* porque esta distribución representa adecuadamente las colas pesadas, que en la investigación se presentaron en todos los activos riesgosos analizados; además, por la no independencia de los datos.

Finalmente, en este estudio que ha mostrado que el uso de cópulas y distribuciones marginales no normales puede mejorar el cálculo del valor en riesgo de un portafolio financiero, sin necesidad de partir de supuestos que puedan llevar a una sub-estimación o sobre-estimación del VaR.

## Bibliografía

- Bouyé, Eric. (2000). "Copulas for finance: a reading guide and some applications", Financial Econometrics Research Centre]. First version: March 7, 2000. London: City University Business School, pp. 2-70.
- Bouyé, Eric et al. (2001). "Copulas: an open field for risk management", Working paper, 8. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.
- Canavos, George. (1988). Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos. México: McGraw Hill.
- Cherubini, Umberto et al. (2004). "Copula methods in finance, Wiley Finance. England: John Wiley & Sons, pp. 37-87.
- Di Clemente, Annalisa & Claudio Romero. (2003). "Measuring portfolio value at risk by a copula EVT based approach" Paper, First Draft: February 2003.]. Department of Economic Theory and Quantitative Methods for the Political Choices. University of Rome "La Sapienza". Italia, pp. 1-22.
- Dowd, Kevin. (2004a). "Evaluating copulas", Financial Engineering News. <http://www.fenews.com/fen46/risk-reward/risk-reward.html>, fecha de consulta: Enero 2 de 2007.
- \_\_\_\_\_. (2004b). "An informal introduction to copulas", Financial Engineering News. [http://www.fenews.com/fen36/topics\\_act\\_analysis/topics\\_act\\_analysis.html](http://www.fenews.com/fen36/topics_act_analysis/topics_act_analysis.html), fecha de consulta: Enero 2 de 2007.
- Embrechts, Paul et al. (1999). "Correlation: pitfalls and alternatives", Risk, Vol 12 No 5, Mayo, pp. 69-71.
- Fackler, Paul & Kevin Dowd . 2004. "Estimating VaR with copulas", Financial Engineering News, Vol 39 (septiembre-octubre), pp. 9-21. [http://www.fenews.com/fen39/one\\_time\\_articles/copula/copula-var.html](http://www.fenews.com/fen39/one_time_articles/copula/copula-var.html) Fecha de consulta: Diciembre 15 de 2006.
- Gento, Pedro. (2001). Comparación entre métodos alternativos para la estimación del valor en

- riesgo. Documentos de trabajo, serie 1 No 1. Castilla La Mancha, España: Universidad de Castilla-La Mancha, Facultad de derecho y ciencias sociales, pp. 1-43.
- Giacomini, Enzo. (2005). "Risk management with copulae", Center for Applied Statistics and Econometrics. Berlin, Humboldt – Universität zu Berlin, pp. 8-46.
- Hu, Ling. (2006). "Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach" Applied Financial Economics, Vol 16, Issue 10, pp. 717-729.
- Li, D. X. (2000). "On default correlation: a copula function approach", Riskmetrics, The Risk Metrics Group, Working Paper Number 99-07, New York, pp. 1-29.
- Maya, Cecilia & Gabriel Torres. (2004). "The unification of the colombian stock market: a step towards efficiency- empirical evidence", Latin American Business Review, 4(5), pp. 72-73.
- Melo, Luis Fernando & Oscar Becerra. (2005). "Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia", Borradores de economía, No 343 Banco de la República, pp. 1-71.
- Micocci, Marco & Giovanni Masala. (2004). Backtesting value at risk estimation with non Gaussian marginals., University of Cagliari, pp. 1-18. Proceedings of the IME 2004 International Congress, Roma (Italia).
- Parra, Helder & Liuz Koodi. (2006). "Using conditional copula to estimate value at risk", Journal of Data Science, 4). State University of Campinas Campinas, Brasil., pp. 93-115.
- Rachev, Svetlozar et al. (2005). "Fat-tailed and skewed asset return distribution: implications for risk management. Portfolio selection, and option pricing", John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, pp. 57-74.
- Rank, Jörn. (2002). Improving VaR calculations by using copulas and non-Gaussian margins. Mathematical Finance., noviembre, : University of Oxford, United Kingdom, pp. 1-54.
- \_\_\_\_\_. (2000). Copulas in financial risk management.: Department for Continuing Education, University of Oxford, United Kingdom, pp. 2-40.
- Romero, Claudio. (2002). Applying copula function to risk management. Roma: Italia, Banca di Roma.
- Rosenberg, Joshua & Til Schuermann. (2004). "A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risk", Staff Report, 185. Federal Reserve Bank of New York, pp. 3-56.
- Tsay, Ruey. (2002). Analysis of financial time series. Financial econometrics. United States of America: University of Chicago, Wiley-Interscience Publication, 443 p.
- Wang, Shaun. (2000). "A set of new methods and tools for enterprise risk capital management and portfolio optimization". CAS. 2000. <http://www.casact.org/pubs/forum/02sf043.pdf> Fecha de consulta: Enero 15 de 2007.
- \_\_\_\_\_. (1999). Aggregation of correlated risk portfolios: models & algorithms. CAS. Society of Risk Working Paper. <http://www.casact.org/cofor/Wang.pdf> Fecha de consulta: Enero 15 de 2007.
- Ward, Lisa & David Lee. (2002). "Practical application of the risk-adjusted return on capital framework". CAS, Forum Summer. <http://www.casact.org/pubs/forum/02sforum/02sftoc.htm> Fecha de consulta: Febrero 2 de 2007.
- Zhang, Xuping. (2002). "Value at risk for non-linear portfolios with non-normal financial returns", McMaster University, September, Ontario, Canadá, pp. 2-79.

## Apéndice I

**Tabla A1**  
Pruebas de mejor ajuste de las distribuciones de los retornos

Distribuciones	Suraminv	Bogotá	Inverargos	Colinvers
Normal	0,114	0,143	0,103	0,116
Triangular	0,307	0,293	0,377	0,310
Lognormal	~	~	~	~
Uniform	0,370	0,359	0,444	0,376
Exponential	~	~	~	~
Weibull	0,154	0,168	0,140	0,137
Beta	0,114	0,144	0,103	0,117
Gamma	0,141	0,164	0,120	0,146
Logistic	0,071	0,085	0,072	0,056
Pareto	~	~	~	~
Max Extreme	0,245	0,226	0,209	0,241
Min Extreme	0,235	0,238	0,264	0,242
Student's t	<b>0,063</b>	<b>0,106</b>	<b>0,076</b>	<b>0,061</b>

Valores críticos de Kolmogorov-Smirnov	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$
N = 733	<b>0,0369</b>	<b>0,0451</b>	<b>0,0602</b>

Fuente: Elaboración propia

## Apéndice II

Sea  $C(u,v)$  una cópula. Para cada  $u \in ]0,1[$ , la derivada parcial  $\partial C / \partial v$  existe para todo  $v \in ]0,1[$ . Así, para cada  $u$  y  $v$  se tiene (Rank, 2002):

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u,v) \leq 1$$

El resultado es análogo para la derivada parcial  $\partial C / \partial u$ . En consecuencia, las funciones  $C_v(u) \equiv \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)$  y  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)$  y están bien definidas en  $[0,1]$ ; además,  $C_v$  y  $C_u$  son no decrecientes en  $[0,1]$ . Con ésto, se presentan a continuación las derivadas parciales para las cópulas de Frank, Gumbel Hougaard y Clayton.

$$C_{Frank}(u,v) = \begin{cases} -\frac{1}{\theta} \text{Ln} \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] & \forall \theta \in ]-\infty, \infty[ \setminus \{0\} \\ uv & \text{para } \theta = 0 \end{cases}$$

La derivada parcial  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)$  está dada por:

$$C_u(v) = -\frac{1}{\theta} \left[ \frac{e^{-\theta} - 1}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)} \right] \left[ \frac{-\theta e^{-\theta u} (e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$$

$$C_u(v) = \frac{e^{-\theta u} (e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}$$

A partir de esta ecuación se obtiene la función de densidad de probabilidad de la cópula, a través del cálculo de la derivada parcial de C con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = \frac{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)] [-\theta e^{-\theta u} e^{-\theta v}] + \theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta v} - 1)(e^{-\theta u} - 1)}{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2}$$

$$= \frac{-\theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta} - 1) - \theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1) + \theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = \frac{e^{-\theta u} e^{-\theta v} (1 - e^{-\theta}) \theta}{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2}$$

La cópula de Gumbel Hougard está definida como:

$$C_{GH}(u, v) = \exp \left\{ - \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$$

La derivada parcial  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  está dada por:

$$C_u(v) = e^{- \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{1/\theta}} \left( -\frac{1}{\theta} \right) \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{1-\theta/\theta} \theta (-Lnu)^{\theta-1} \left( -\frac{1}{u} \right)$$

$$C_u(v) = e^{- \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{1/\theta}} \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{-(\theta-1)/\theta} \left( \frac{(-Lnu)^{\theta-1}}{u} \right)$$

A partir de esta ecuación se obtiene la función de densidad de probabilidad de la cópula, a través del cálculo de la derivada parcial de C con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = \frac{(-Lnu)^{\theta-1}}{u} \frac{(-Lnv)^{\theta-1}}{v} e^{- \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{1/\theta}} \left[ (\theta - 1) \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{-2\theta+1/\theta} + \left[ (-Lnu)^\theta \right]^{-2\theta+1/\theta} \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = \frac{(-Lnu)^{\theta-1}}{u} \frac{(-Lnv)^{\theta-1}}{v} e^{-\Sigma^{1/\theta}} \left[ \Sigma^{-2(\theta-1)/\theta} + (\theta - 1) \Sigma^{-(2\theta-1)/\theta} \right]$$

Donde  $\Sigma = (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta$

La cópula de Clayton está definida como:

$$C_{Clayton}(u, v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1/a}$$

La derivada parcial  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  está dada por:

$$C_u(v) = -\frac{1}{a} (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1-a/a} (-a) u^{-a-1}$$

$$C_u(v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-(a+1)/a} u^{-(a+1)}$$

A partir de esta ecuación se obtiene la función de densidad de probabilidad de la cópula, a través del cálculo de la derivada parcial de C con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = -\frac{(a+1)}{a} (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-(2a+1)/a} (-a) v^{-(a+1)} u^{-(a+1)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = (a+1) u^{-(a+1)} v^{-(a+1)} [u^{-a} + v^{-a} - 1]^{-(2a+1)/a}$$

### Apéndice III

Sean  $F_1$  y  $F_2$  las funciones de distribución de las marginales, cuyas funciones de densidad de probabilidad son  $f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$  y  $f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$ . A partir de la expresión  $f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_1), v=F_2(x_2)} f(x_1) f(x_2)$  se obtiene la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = L((x_{1,1}, x_{2,1}), \dots, (x_{1,N}, x_{2,N}); \theta) = \prod_{j=1}^N f(x_{1,j}, x_{2,j})$$

El logaritmo de la función de verosimilitud está dado por:

$$L(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_{1,j}), v=F_2(x_{2,j})} f_1(x_{1,j}) f_2(x_{2,j})$$

$$L(\theta) = \sum_{j=1}^N \ln \left( \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_{1,j}), v=F_2(x_{2,j})} \right) + \sum_{j=1}^N (\ln f_1(x_{1,j}) + \ln f_2(x_{2,j}))$$

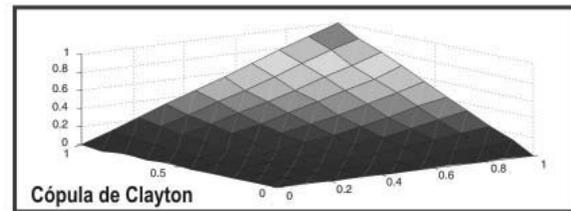
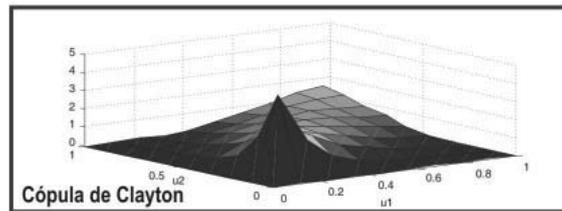
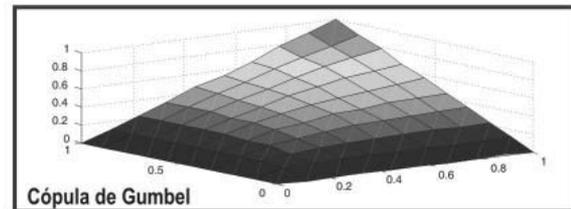
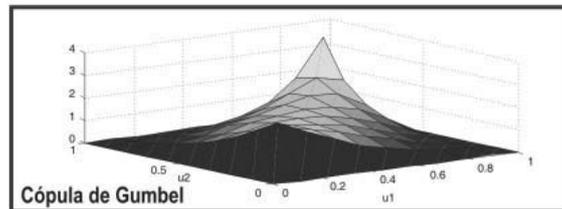
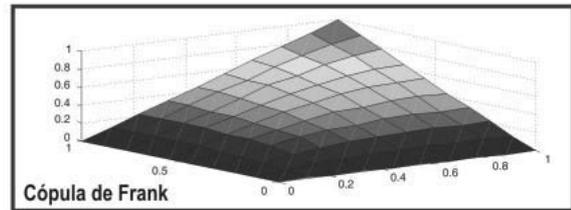
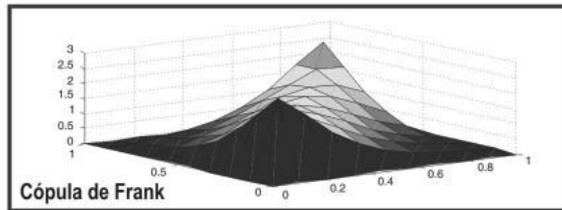
Como la segunda expresión no depende de  $\theta$ , es suficiente maximizar la función

$$\tilde{L}(\theta) = \sum_{j=1}^N \ln \left( \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_{1,j}), v=F_2(x_{2,j})} \right) \text{ con respecto a } \theta \text{ y luego encontrar } \hat{\theta}.$$

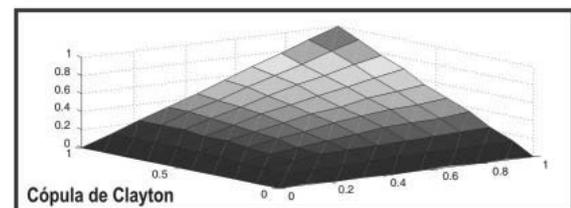
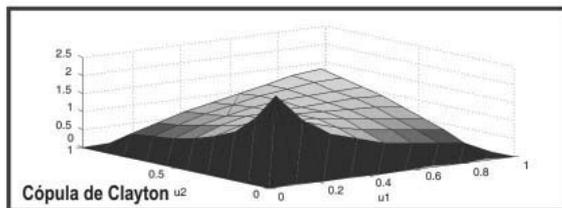
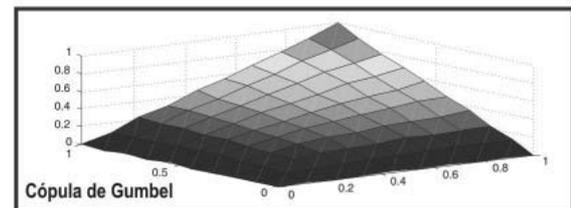
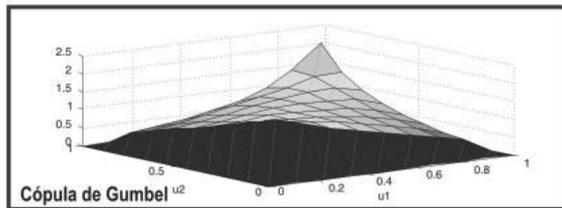
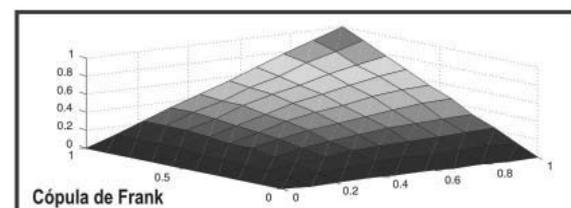
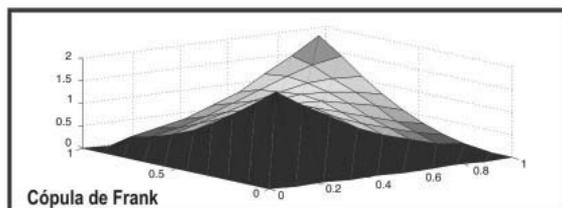
Figura A1  
Cópulas de Frank, Gumbel- Hougaard y Clayton  
Suraminv-Inverargos y Suraminv-Colinvers

Función de densidad de probabilidad

Función de distribución acumulada

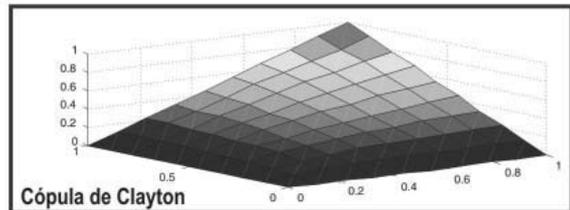
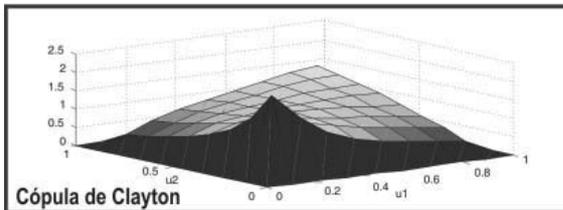
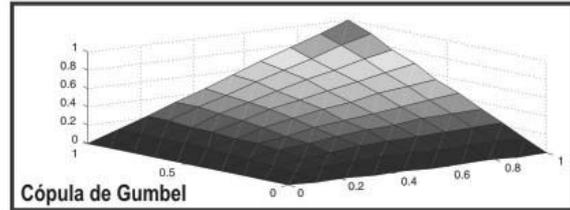
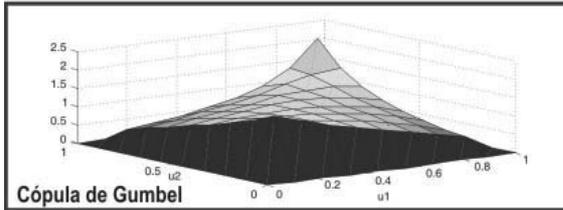
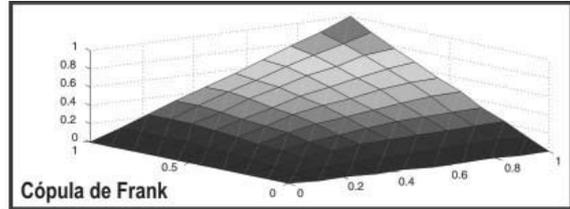
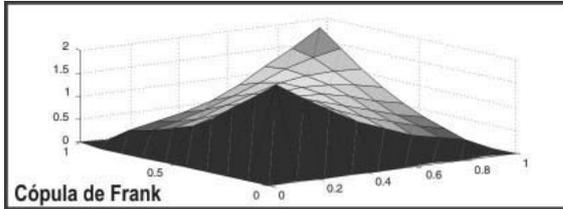


Bogotá-Inverargos

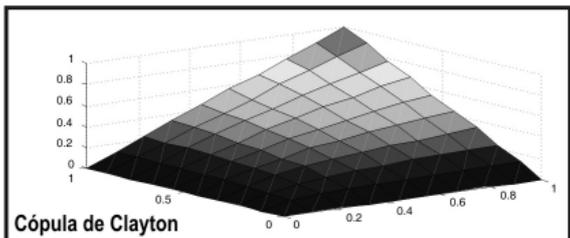
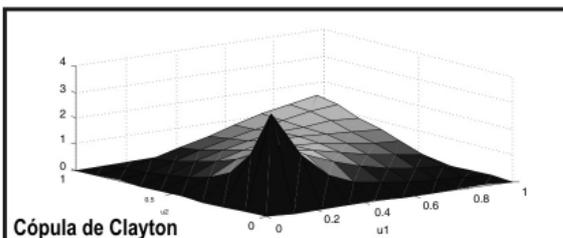
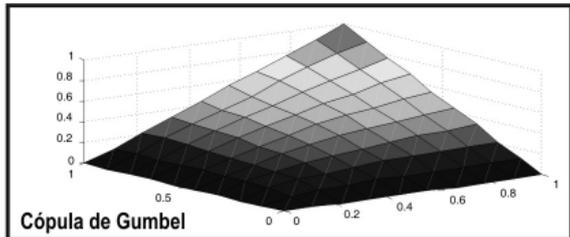
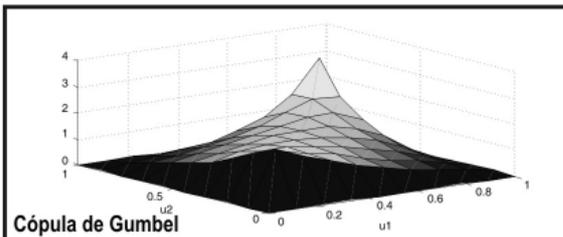
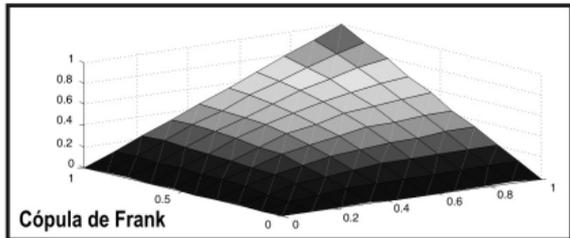
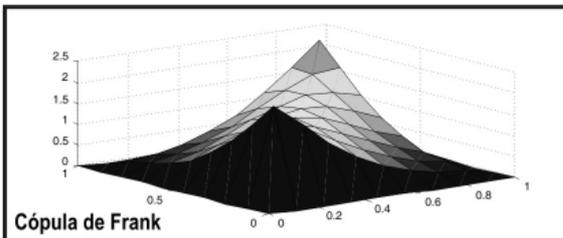


Función de densidad de probabilidad

Función de distribución acumulada



Inverargos-Colinvers



Fuente: Elaboración propia