

Modelos de tiempo continuo para *commodities* agrícolas En Colombia*

Ulises Cárcamo Cárcamo.**
Javier Arbeláez López.***

Recepción: Febrero 08 de 2008

Aceptación: Marzo 03 de 2008

Resumen

Algunos llamados “expertos” hacen recomendaciones para aplicar modelos de valoración de derivados sobre acciones a derivados sobre *commodities*. Esta práctica debería considerarse sólo como un primer paso, exploratorio en la búsqueda del valor realmente “justo” del derivado.

En general, los precios de las *commodities* se comportan de una manera bastante diferente de los precios de las acciones. Esto se muestra, con este artículo, a través de ejemplos del mercado agropecuario colombiano.

Abstract

We have heard recommendations from so called “experts” suggesting the application of models to value derivatives on stocks, such as the classical Black-Scholes, to value derivatives on commodities. This practice should only be considered as a first (exploratory) step in the search for the really “fair” value. Usually, commodity prices behave quite differently from stock prices, shown here through examples from the Colombian agricultural and livestock market.

* Este documento es derivado de la investigación Derivados financieros en el sector agropecuario en Colombia desarrollada por los autores en el año 2007.

** Máster en Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT. Ph.D in Applied and Computational Math., University of Canterbury, New Zealand. Profesor vinculado al Departamento de Finanzas de la Universidad EAFIT. Miembro del Grupo de Investigación en Finanzas y Banca (GIFyB), de la misma institución. ucarcamo@eafit.edu.co

*** Máster en Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT, catedrático de la misma Institución. jarbela7@eafit.edu.co

Palabras clave: Derivados, acciones, commodities, teoría de Black-Scholes, modelo Merton, modelos de equilibrio, modelos de arbitraje.

Key words: Derivatives, Stocks, Commodities, Black-Scholes Theory, Merton Model, Equilibrium Models, Arbitration Models.

Introducción

Aunque la fórmula clásica de Black-Scholes está implementada en muchos programas de computador, dispuesta para usarse con facilidad, su utilización no se recomienda para la valoración de algunos derivados, salvo como un paso preliminar, antes de buscar un método de valoración más adecuado.

Los autores han escuchado de “expertos” que, en Colombia, aplican esta fórmula para valorar ciertas *commodities*.¹ El uso de esa fórmula implica que se acepta el cumplimiento de todos los supuestos del Modelo de Black-Scholes.

En el presente artículo se demuestra, a partir de precios de *commodities* agrícolas colombianas, cómo esa recomendación es generalmente inadecuada. Se hace, en una primera instancia, una revisión rápida de los supuestos del modelo.

1. El modelo básico *black-scholes*

1.1 Procesos de Wiener

Un proceso de Wiener es un proceso estocástico $\{W(t)\}$ de tiempo continuo (es decir, t toma todos los valores de un cierto intervalo $[0, T]$), que se puede caracterizar por las siguientes propiedades:

1. $W(0) = 0$
2. $W(t_1) - W(t_2)$ y $W(t_3) - W(t_4)$ son incrementos independientes, para todo t_1, t_2, t_3 y t_4 en $[0, T]$,

¹ Se recurre aquí al término *commodity*, plural *commodities*, ya que no hay un consenso en cuanto a cómo traducirlo.

tales que $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$.

3. Para todo t_1, t_2 en $[0, T]$, $t_1 < t_2$, $W(t_2) - W(t_1)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t_2 - t_1$.

4. Las trayectorias de $\{W(t)\}$ son continuas.

1.2 Supuestos fundamentales del modelo Black-Scholes.

El modelo fundamental para la valoración de opciones europeas sobre acciones, en el intervalo $[0, T]$, es el modelo de Black-Scholes (1973). Los supuestos esenciales de este modelo son los siguientes:

1. Existen dos activos en el mercado: un bono y una acción, cuyos precios están regidos por las ecuaciones respectivas:

$$dB(t) = rB(t).dt \quad (1)$$

$$dS(t) = \alpha S(t) dt + \sigma S(t) d\bar{W}(t) \quad (2)$$

Donde r es la tasa de corto plazo, \bar{W} es un proceso de Wiener, σ es la volatilidad, constante del precio de la acción, α es el rendimiento instantáneo esperado de la acción.

2. Existe un reclamo contingente (derivado) simple cuya función de pago es de la forma

$$A = \Phi(S(T)) \quad (3)$$

es decir, sólo depende del valor de la acción en el tiempo T , $S(T)$.

3. $F(t, S)$ es una función con primera derivada parcial con respecto a t , continua y segundas derivadas parciales con respecto a S continuas.

4. El derivado se transa en el mercado y su proceso de precio tiene la forma

$$\Pi(t) = F(t, S(t)) \quad (4)$$

5. El Mercado es libre de arbitraje

En el primer supuesto de este mercado ideal, el precio del bono (o, equivalentemente, una cuenta de ahorros que paga interés compuesto, capitalizado de manera continua, a una tasa, libre de riesgo, r) evoluciona según la ecuación diferencial ordinaria, determinística (1).

El precio de la acción evoluciona de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica (2) que tiene una única fuente de aleatoriedad en el mercado. En la práctica, α depende de muchos factores y σ , en general, no es una constante.

El segundo supuesto no se cumpliría, por ejemplo, en el caso de que el valor del derivado en el tiempo T dependa de precios anteriores.

El tercer y cuarto supuestos, explicitan que el precio del derivado, en cualquier momento, t , es una función suave del tiempo y del precio del subyacente en ese instante.

El quinto nos dice que el modelo es un modelo de arbitraje. Además de estos modelos están los modelos de equilibrio².

1.3 Consecuencias de los supuestos.

Bajo estos supuestos se puede probar que:

A. La función de precio F es la única solución al problema parabólico:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) + r \cdot S(t) \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2} S^2(t) \cdot \sigma^2(t, s) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, s) - r \cdot F(t, s) = 0 \quad (5)$$

con la condición

$$F(T, s) = \Phi(s) \quad (6)$$

en el dominio $[0, T] \times \mathbb{R}^+$.

B. El precio de la acción, activo subyacente, se comporta de acuerdo con:

$$S(t) = S_0 \cdot \text{Exp} \left[(r - 0.5 \sigma^2) t + \sigma W(t) \right] \quad (7)$$

El proceso correspondiente se llama Movimiento Browniano Geométrico (MBG). El MBG, dado que $W(t)$ tiene distribución normal con media cero y varianza t , $S(t)$, tiene distribución log-normal, para todo t . El valor esperado de $S(t)$ es

$$E(S(t)) = S_0 e^{rt} \quad (8)$$

y su varianza,

$$\text{Var}(S(t)) = e^{2rt} (e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (9)$$

Dado que tanto su valor esperado como su varianza dependen del tiempo, $S(t)$ no es estacionario.

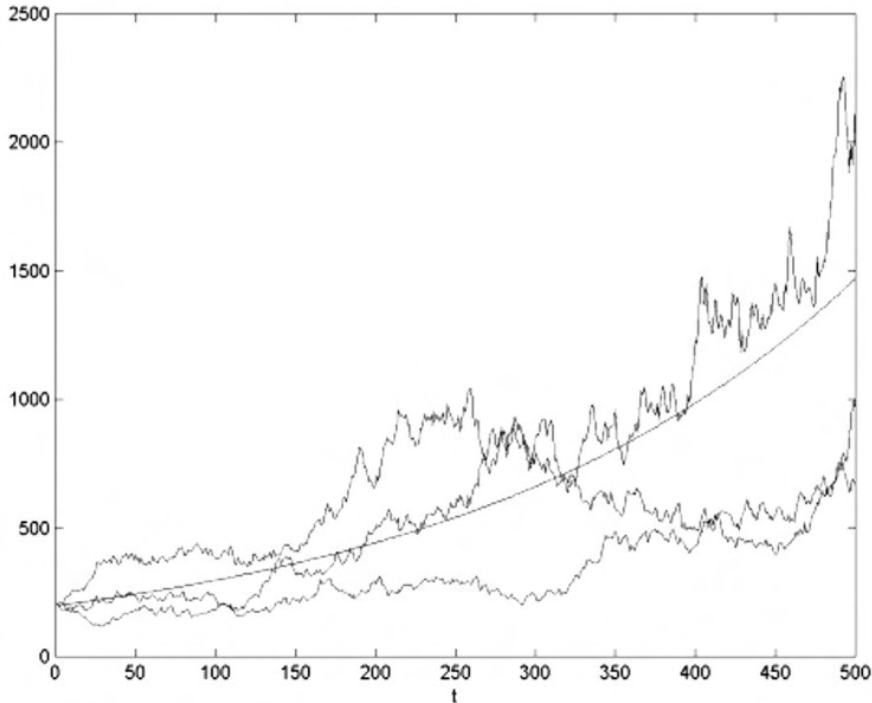
Para los tiempos t y $t + \Delta t$, el rendimiento en $t + \Delta t$ está dado por

$$\ln \left(\frac{S(t + \Delta t)}{S(t)} \right) = (r - 0.5 \sigma^2) \Delta t + \sigma [W(t + \Delta t) - W(t)] \quad (10)$$

que tiene distribución normal con media $(r - 0.5 \sigma^2) \Delta t$ y varianza $\sigma^2 \Delta t$.

² Los modelos de equilibrio son generales; sin embargo, requieren de información sobre las preferencias con respecto al riesgo de los agentes del mercado. Los modelos de no arbitraje no requieren de ningún conocimiento de las preferencias de los agentes; sin embargo, la valoración de no arbitraje se puede dar únicamente bajo un conjunto especial de circunstancias.

Figura 1
Trayectorias y valor esperado de un MBG



1.4 Fórmulas para opciones sobre acciones.

En general, el precio de una opción *call*, en el tiempo $t \in [0, T]$, se puede expresar como

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E^Q [\Phi(S(T))] \quad (11)$$

Donde la Q que acompaña al operador valor esperado, E , significa que éste se toma bajo la medida martingala o medida neutral hacia el riesgo. Esta es la medida de probabilidad, bajo la cual, el precio del subyacente se comporta de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dw(t) \quad (12)$$

Al desarrollar la fórmula (11) se pueden encontrar fórmulas explícitas para la valoración de opciones *put* y *call* en tiempo continuo:

1.5 El Modelo de Black - Scholes (1973)

$$c = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rt} \Phi(d_2) \quad (13)$$

(Precio de una *Call*)

$$p = Ke^{-rt} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1) \quad (14),$$

(Precio de una *Put*)

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right).t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (15)$$

S_0 : El precio spot actual del subyacente

K : El precio de ejercicio

r : La tasa de interés, compuesta continuamente, libre de riesgo

t : El tiempo, en años, hasta la expiración del contrato

σ : La volatilidad implícita del precio spot del subyacente

Φ : Es la función de distribución de una normal estándar

Una generalización del Modelo de Black-Scholes para una acción que paga dividendos es el modelo de Merton (1973) que permite tener en cuenta dividendos pagados durante la vida de la opción europea. He aquí la presentación de dicho modelo:

$$c = e^{-qt} s_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rt} \Phi(d_2) \quad (16)$$

$$p = e^{-rt} s_0 \Phi(-d_2) - Ke^{-qt} \Phi(-d_1) \quad (17)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (18)$$

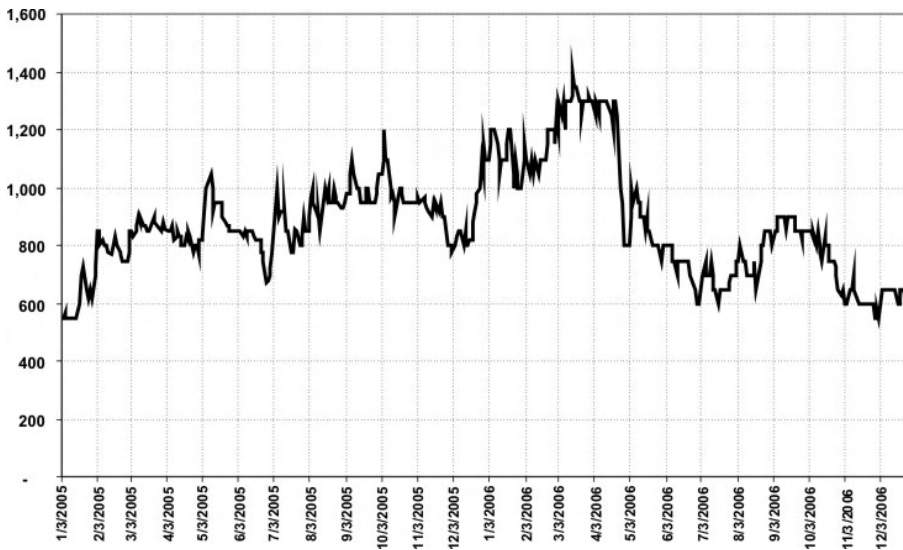
q : Rendimiento de los dividendos (dividend yield) compuesto continuamente. Los demás parámetros corresponden a los del modelo básico B-S.

1.6 Dos ejemplos del mercado agrícola colombiano, para contrastar

Como no se puede realizar recolección continua de datos, se debe recurrir a los conjuntos de datos discretos, por ejemplo series de precios diarios de los productos agropecuarios.

1.6.1 Precio spot de la papa capira. Para ilustrar esto con un producto colombiano, se toma la serie del precio *spot* de la papa capira en Medellín durante el período enero de 2005 a diciembre de 2006, facilitada por el Sistema de Información de Precios del Sector Agropecuario (Sipsa), la cual se muestra en la gráfica 2.

Figura 2
Precio Spot de la Papa Capira (kg) en Medellín



En esta gráfica se puede observar el proceso de precio *spot*, y aparentemente no es estacionario. Sin embargo, se necesita recurrir a otra información para asegurar esto.

Figura 3
Esttimated Autocorrelations for Capira

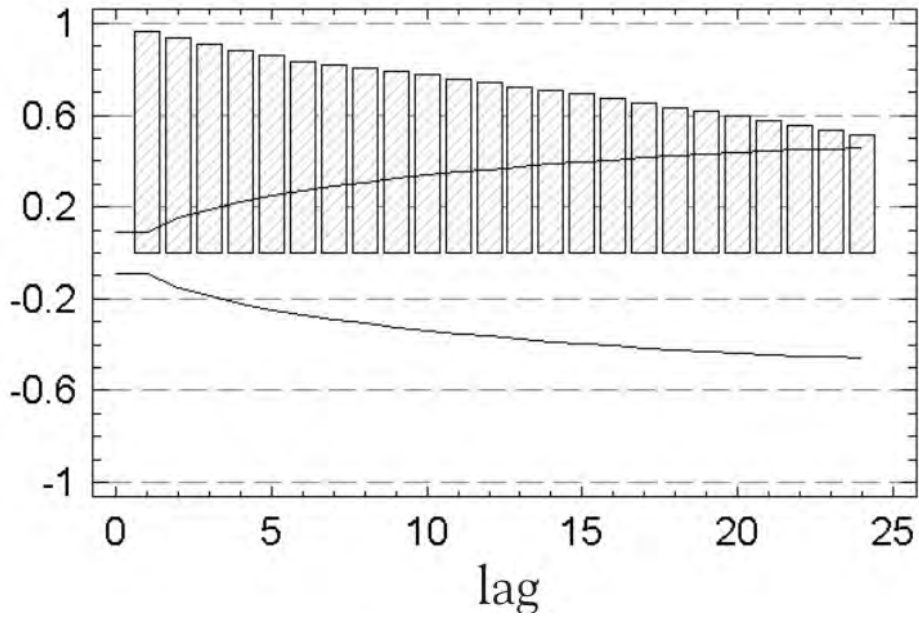
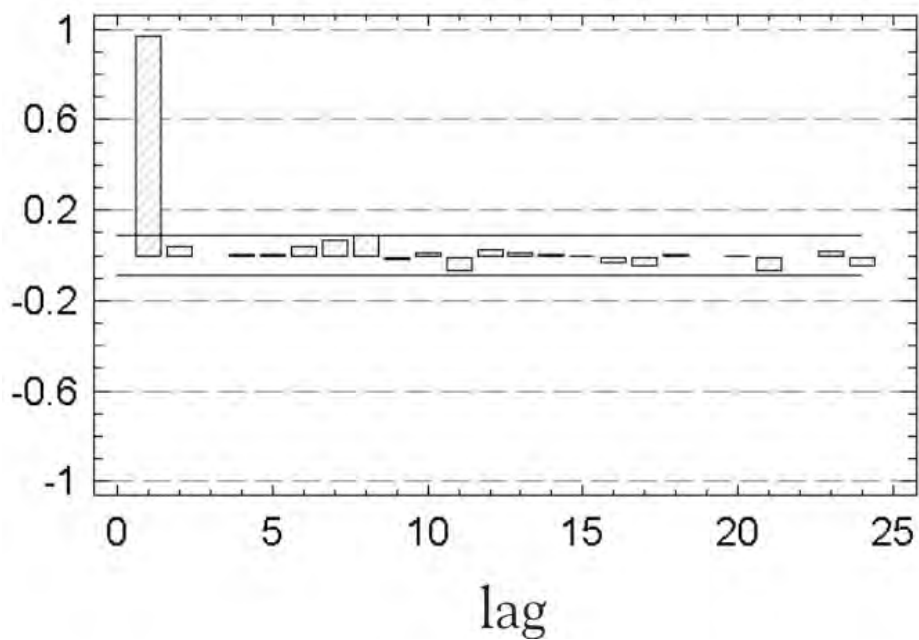


Figura 4
Estimated Partial Autocorrelations fot Capira



El autocorrelograma y el autocorrelograma parcial permiten apreciar señales de un paseo aleatorio. Para comprobar esto se realizaron pruebas de raíces unitarias.

Las pruebas respectivas de Dickey-Fuller Aumentado y Philips –Perron muestran que la hipótesis de existencia de una raíz unitaria no se puede descartar, a ningún nivel, para un modelo de paseo aleatorio sin constante.

Para un nivel del 10%, el test ADF permite rechazar la hipótesis de raíz unitaria para el modelo de paseo aleatorio con una constante. Para este mismo modelo, el test de Philips –Perron no permite descartar la hipótesis a ningún nivel.

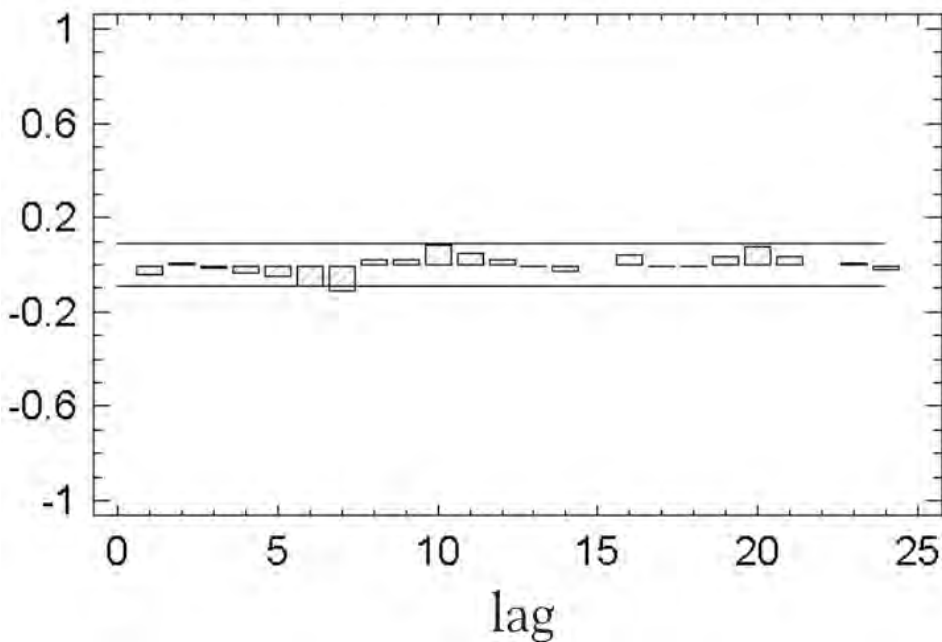
El test Elliott-Rothenberg-Stock DF-GLS tampoco permite rechazar la hipótesis de una raíz unitaria, a ningún nivel.

Por último, el test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) permite rechazar la hipótesis nula de estacionaridad a un nivel del 5% para el modelo de paseo aleatorio con constante.

A pesar de estas pruebas, al tratar de modelar los datos en la forma $S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} + \varepsilon_t$, no se encuentra un modelo que ajuste de manera satisfactoria y además, se detectan efectos GARCH³.

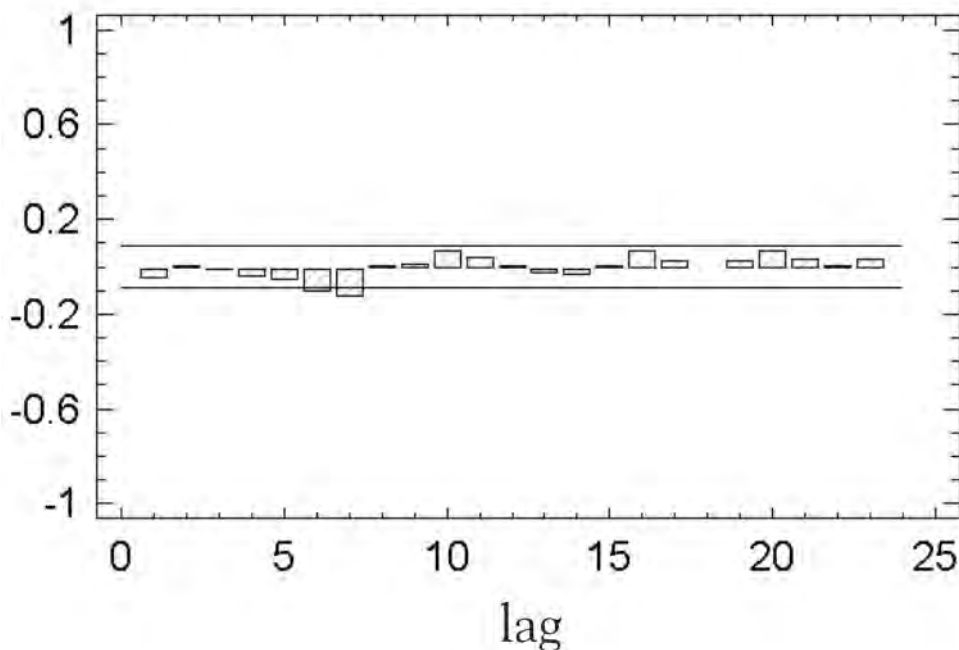
En segundo intento, se modelan los retornos continuos del precio, $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$. Las figuras 5 y 6 dejan ver las autocorrelaciones y las autocorrelaciones parciales de estos rendimientos que indican, aparentemente, un proceso autoregresivo (estacionario) de orden 7.

Figura 5
Estimated Autocorrelations for rendcapira



³ Generalized Auto-Regresive Conditional Heteroscedasticity. Modelos en los que la varianza condicional no es constante.

Figura 6
Estimated Partial Autocorrelations for rendcapira



El mejor modelo encontrado es

$$r_t = -0,0011 - 0,0849 r_{t-7} + \varepsilon_t \quad (19)$$

Con $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ (20)
 η_t normal estándar y

$$\sigma_t^2 = 0,0004 + 0,2096 \varepsilon_{t-1} + 0,6376 \sigma_{t-1}^2 \quad (21)$$

El modelo para el precio será, entonces,
 $S_t = S_{t-1} e^{r_t}$ (22)

Aunque el modelo (22) sea similar, en cuanto a forma, al modelo (7), las diferencias son grandes: r_t es estacionario, mientras que $W(t)$ no lo es, esto implica que los procesos e^{r_t} y $e^{a+bW(t)}$, con a y b no aleatorios, son bastante diferentes. Además, r_t tiene efectos Garch, mientras que los incrementos de $W(t)$ son independientes.

Si además de las dos razones anteriores, se hace caso omiso de la autocorrelación significativa de orden 7 e se intenta modelar los rendimientos mediante la distribución normal, cualquiera de las pruebas de normalidad rechaza este supuesto.

El ejemplo examinado pone de manifiesto los errores que se cometen al utilizar la fórmula de Black-Scholes, directamente en la valoración de derivados de este tipo.

1.6.2 La serie de precios del fríjol verde. Como segundo ejemplo de producto colombiano, se consideró la serie del precio *spot* del fríjol verde en Medellín durante el periodo enero 2005 a diciembre 2006, también facilitada por el Sipsa, y que se muestra en la figura 7.

Figura 7
 Precio Spot Fríjol Verde (Kg.) En Medellín

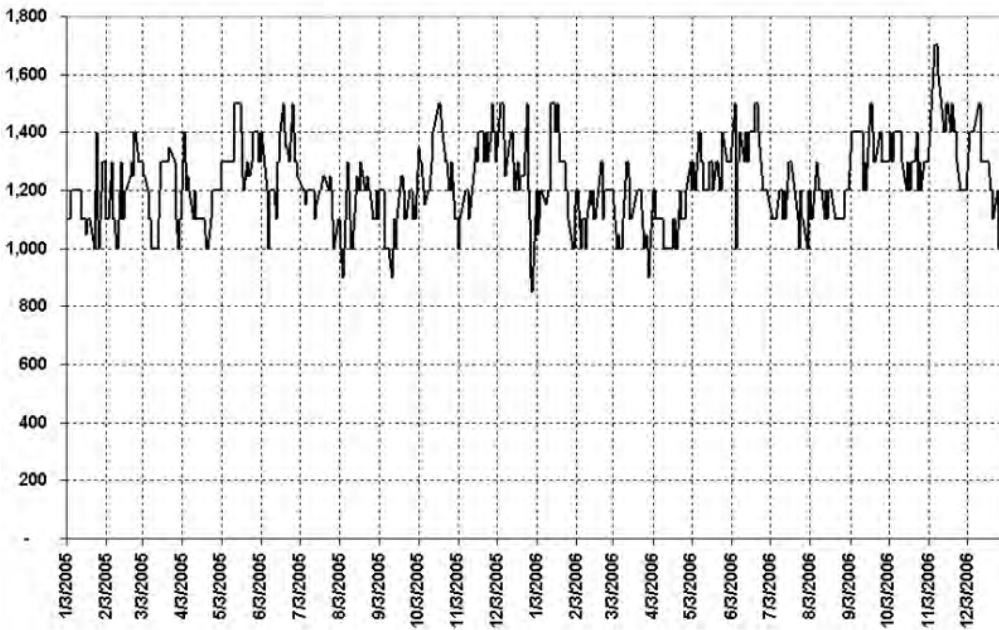


Figura 8
 Estimated Autocorrelations for FrijolVerde

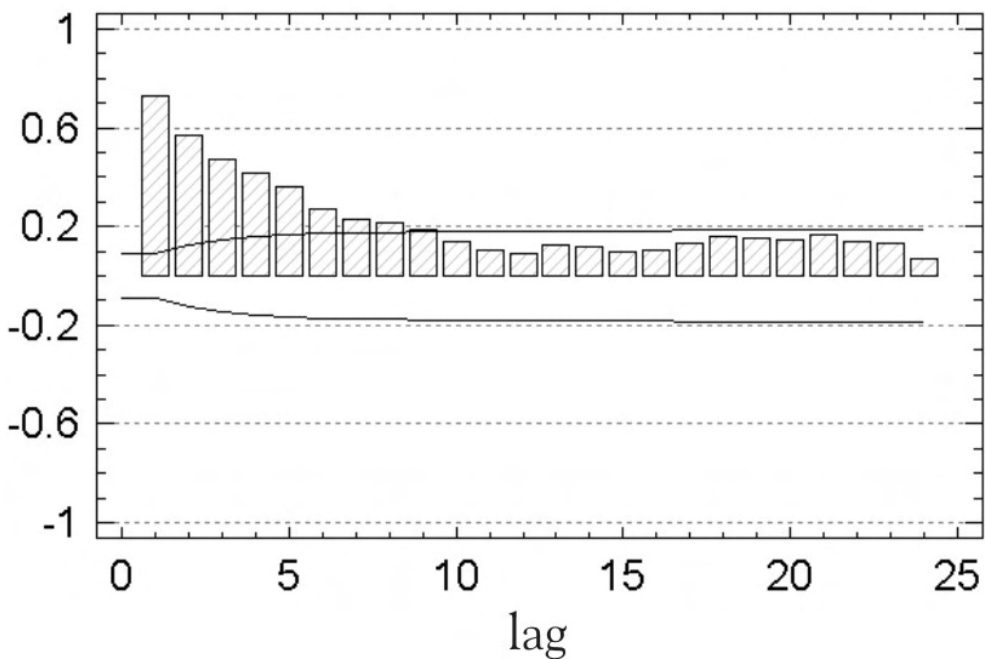
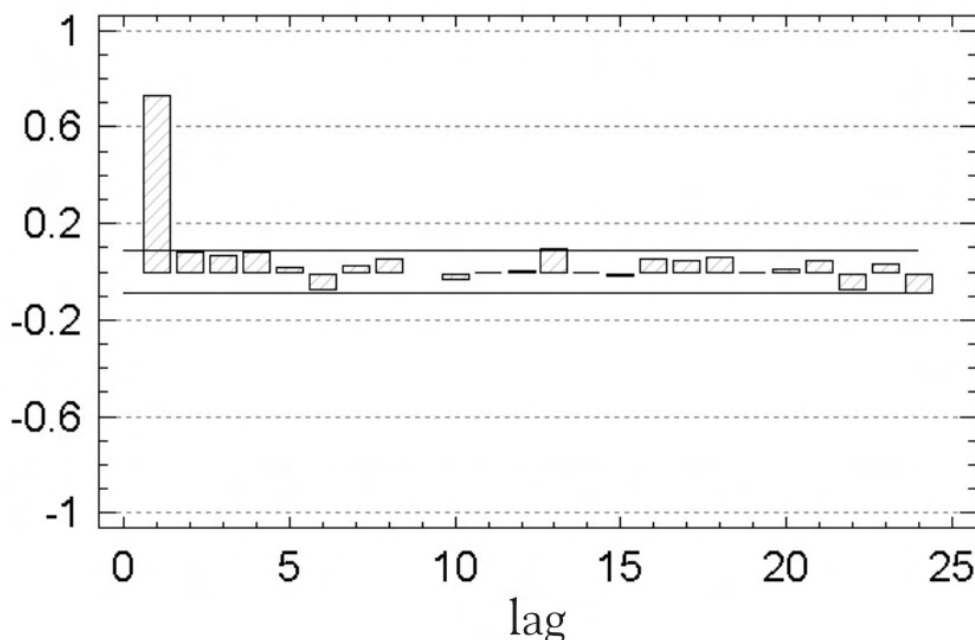


Figura 9
 Estimated Partial Autocorrelations for FrijolVerde



Según la figura 7, el precio parece que siguiera un proceso estacionario; es manifiesta la reversion a la media. Para estar más seguros se elaboraron el autocorrelograma y el autocorrelograma parcial. Estos indican que es muy probable que el proceso sea estacionario del tipo AR(1).

Los test de raíces unitarias ADF, Philips-Perron y test Elliott-Rothenberg-Stock DF-GLS rechazan la hipótesis nula de una raíz unitaria a todos los niveles. El test de KPSS no permite rechazar la hipótesis nula de proceso estacionario a ningún nivel.

El modelo que mejor se ajusta a estos datos es un AR(1)-ARCH-M, en la forma:

$$F_t = 1227,590535 + 0,715225 F_{t-1} - 0,2380409 \sigma_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ donde } \varepsilon_t = \varepsilon_t \sigma_t;$$

$$\sigma_t^2 = 11732,53 + 0,102897 \varepsilon_{t-1}^2 - 0,400826 \sigma_{t-1}^2.$$

Aunque el ajuste a este modelo no es perfecto, el proceso es muy diferente de un MBG, y por

tanto el uso del modelo de Black-Scholes para representarlo o para valorar opciones sobre esta *commodity* es erróneo.

Los dos ejemplos señalados ilustran cómo el uso indiscriminado del modelo clásico de Black-Scholes conduce a errores graves de valoración.

2. Opciones sobre *commodities*

Una de las principales dificultades que, en general, se encuentran cuando se quieren valorar opciones sobre *commodities* es el encontrar ciertos factores no aleatorios en la conducta de los precios *spot* de algunas de ellas.

Ejemplos de estos son los siguientes:

- Para las *commodities* agrícolas es común que los precios suban durante el periodo anterior a la cosecha y que bajen durante el periodo posterior a ella.

- En los países con estaciones es natural que el gas y otros derivados del petróleo sean más caros durante el invierno que durante los meses de verano.

Este comportamiento no aleatorio contrasta con el comportamiento del movimiento browniano geométrico sobre el que está basado el modelo de Black-Scholes y por lo tanto éste no debe aplicarse, salvo, posiblemente, para obtener una estimación inicial.

El modelo de Black

Fischer Black (1976) buscó una solución a este problema y publicó sus resultados en el paper *The pricing of commodity contracts*.

La solución que este autor encontró fue modelar los precios *forward* en vez de los precios *spot*.

Los precios *forward* no presentan las mismas características no aleatorias de los precios *spot*. Por ejemplo, los precios *spot* de productos agrícolas subirán durante el periodo anterior a la cosecha, reflejando la escasez del producto. Los precios *forward*, sin embargo, no subirán porque son precios para entrega después de la cosecha y deben ser más bajos anticipando la caída en los precios *spot* después de la cosecha.

Aunque no es razonable utilizar el MGB para modelar el precio *spot*, sí puede ser razonable hacerlo con el precio *forward*.

El modelo de Black se usa para modelar los precios de opciones europeas sobre *commodities* físicas, *forwards* y futuros. También se usa para modelar precios de *caps* y *floors* sobre tasas de interés.

Si c es el precio de una opción *call* y p es el precio de una opción *put*, entonces

$$c = e^{-rt} [s_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)] \quad (23)$$

$$p = e^{-rt} [K \Phi(-d_2) - s_0 \Phi(-d_1)] \quad (24)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot t}{\sigma \sqrt{t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$$

(25)

S_0 : precio *forward* actual del subyacente

K : precio de ejercicio

R : tasa de interés, compuesta continuamente, libre de riesgo

t : tiempo, en años, hasta la expiración del contrato

σ : volatilidad implícita del precio *forward* del subyacente

Φ : función de distribución de una normal estándar.

El uso de este modelo para valorar derivados en el mercado colombiano necesitaría de la publicación diaria de los precios *forward* de las *commodities* subyacentes.

3. Modelos de precios de los futuros y la teoría del almacenamiento (*storage theory*)

3.1 El *convenience yield*

En el estudio de los contratos de futuros la noción de *convenience yield*⁴ juega un papel de gran importancia. El *convenience yield* se define como el beneficio o la prima que se obtiene por poseer el bien físico subyacente, en vez de tener el contrato a futuro. A veces, debido a movimientos irregulares del mercado (caso específico de un mercado invertido), por ejemplo, a causa de relativa escasez y alta demanda, el poseer el bien puede ser más beneficioso que poseer el derivado.

⁴ En algunos textos en español, este concepto se traduce como **rendimiento de conveniencia**: sin embargo, este último término no se usa de manera universal.

Un ejemplo sería, para la industria panificadora, poseer inventarios de harina, en vez de contratos de futuros sobre harina. En caso de que por alguna plaga en los cultivos de trigo se presentara escasez y aumentara súbitamente la demanda, el *convenience yield* consistiría en la diferencia entre el primer precio de compra del trigo y el precio después de haber comenzado la escasez.

El *convenience yield* aparece como un ajuste al precio *forward* teórico de un *commodity*.

3.2 Dos aproximaciones a los precios futuros de las *commodities*

Hay dos puntos de vista populares para los precios de los futuros de las *commodities*: La teoría del almacenamiento de Kaldor (1939), Working (1948), Brennan (1958) y Tesler (1958), y la teoría expuesta por Cootner (1960) y Hazuka (1984) (CH), entre otros.

En la primera se explica la diferencia entre el precio *spot* actual y el precio del futuro en términos del interés al que se renuncia al comprar el activo, los precios de almacenamiento y el *convenience yield* del inventario.

Sea $f(t,T)$ el precio del contrato a futuro, en el tiempo t , por medio del cual se entrega el subyacente en la fecha T .

La Teoría del almacenamiento predice que el retorno de comprar la *commodity* en t y venderla para entrega en T , $f(t, T) - S(T)$ iguala al interés al que se renuncia, $R(t,T).S(t)$ más el costo marginal de almacenamiento, $W(t,T)$, menos el *convenience yield* por una unidad adicional de inventario $C(t,T)$.

$f(t, T) - S(t) = R(t,T).S(t) + W(t,T) - C(t,T)$, o, equivalentemente:

$$\frac{f(t, T) - S(t)}{S(t)} = R(t, T) - \frac{W(t, T) - C(t, T)}{S(t)} \quad (26)$$

La teoría del almacenamiento predice una relación negativa entre el *convenience yield* y el nivel de inventarios.

En la teoría de CH, se divide el precio del futuro en una prima de riesgo y una estimación del precio *spot* en la fecha de terminación del contrato. Se han encontrado problemas al tratar de verificar este punto de vista.

4. Precio de los futuros en una extensión de la teoría de black-scholes

Aunque la siguiente fórmula se puede deducir con base en argumentos de arbitraje, acá se dará como una definición.

4.1 Precio de un contrato de futuros

El precio de un contrato de futuros, libre de arbitraje, $f(t, T)$, de un activo con proceso de precio S_t que se entregará en una fecha T , está dado por la fórmula

$$f(t, T) = E^Q [S_T / F] \quad (27)$$

En esta fórmula, el valor esperado se toma con base en la medida martingala y F denota la filtración o el flujo de información hasta el instante t .

En el cálculo de este valor esperado se tienen en cuenta los costos de almacenamiento, los flujos que se generan durante el tiempo del contrato (si los hay) y el *convenience yield*.

Se puede probar que si no se utiliza esta fórmula, se tiene una oportunidad de arbitraje.

4.2 Modelos

Los modelos que se utilizan para calcular los precios de las *commodities* en tiempo continuo se pueden dividir en dos tipos: **Modelos de Arbitraje**, en los que se supone que el activo es

transable, y **Modelos de Equilibrio**, en los que se supone que el activo no se transa. Ambos tipos dan como resultado relaciones de precios libres de arbitraje.

4.2.1 Algunos modelos de arbitraje.

El modelo de Brennan-Schwartz (1985) supone que el precio del subyacente sigue un Movimiento Browniano Geométrico y que el *convenience yield* es proporcional al Precio del subyacente.

Explícitamente:

$$dS = \mu.S.dt + \sigma.S.dW, C(S,t) = c.S \quad (28)$$

Acá μ, σ y c son constantes.

Los autores aplicaron el modelo al caso del cobre. Como la teoría del almacenamiento predice una relación inversa entre el *convenience yield* y los niveles de inventario, la validez de este modelo se da bajo condiciones bastante restrictivas.

Por su parte, el modelo de Gibson-Schwartz (1990), es un modelo de reversión a la media con dos factores. δ es el *convenience yield*.

$$dS = (\mu - \delta) S dt + \sigma_1 S dW_1 \quad (29)$$

$$d\delta = k (\alpha - \delta) dt + \sigma_2 dW_2 \quad (30)$$

$$dW_1 \cdot dW_2 = \rho dt \quad (31)$$

Acá $\mu, \sigma_1, \alpha, k, \sigma_2,$ y ρ son constantes.

En tanto que bajo el modelo de Brennan (1980) el precio del subyacente se comporta como un MBG mientras que el *convenience yield* sigue un movimiento con reversión a la media.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_1 \quad (32)$$

$$dC = \alpha(m - C) dt + \eta dW_2 \quad (33)$$

$$dW_1 \cdot dW_2 = \rho \cdot dt \quad (34)$$

Acá $\mu, \sigma, \alpha, m, \eta$ y ρ son constantes.

El Modelo 3 de Schwartz (2000) hace una extensión de los modelos anteriores a tres niveles:

$$dS = (r - \delta) S dt + \sigma_1 S dW_1 \quad (35)$$

$$d\delta = k (\alpha - \delta) dt + \sigma_2 dW_2 \quad (36)$$

$$dr = (m - r) dt + \sigma_3 dW_3 \quad (37)$$

(Esta ecuación representa el comportamiento de una tasa de interés estocástica)

$$dW_1 \cdot dW_2 = \rho_1 \cdot dt, dW_1 \cdot dW_3 = \rho_2 \cdot dt, dW_2 \cdot dW_3 = \rho_3 \cdot dt$$

Son constantes: $k, m, \alpha, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$.

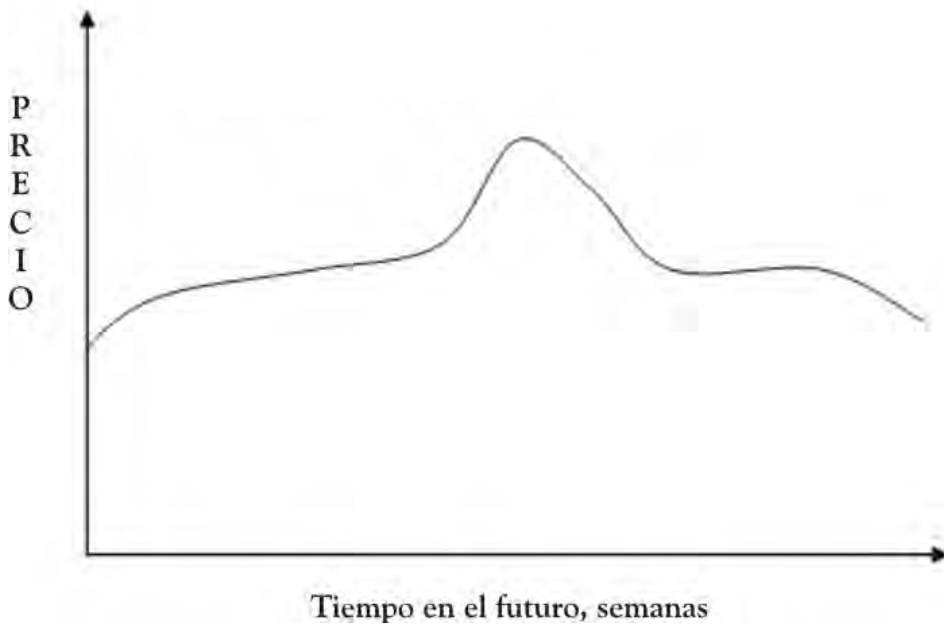
Todos estos modelos se cimientan en los resultados de la teoría del almacenamiento y basan su poder en el contenido informativo de los precios *spot*.

Modelos que usan la forward price curve. Existen modelos que en vez de utilizar la información disponible en los precios *spot* utilizan los futuros sobre la *commodity* o la así llamada **forward price curve** que se observa en el mercado y se toma como dada.

La *forward price curve* es una lista de precios para la entrega de la *commodity* en una serie de puntos del tiempo desde hoy hasta cierto tiempo del futuro.

La curva *forward* no es estrictamente un pronóstico de los precios *spot*. Es el precio actual de la *commodity* que va a ser entregada en un punto específico del tiempo. Sin embargo, a medida que se acerca el periodo tiempo se espera que el precio *forward* y el precio *spot* converjan.

Figura 10
Forward Price Curve



Un ejemplo de estos modelos es el siguiente:

Modelo de Clewlow-Strickland (1999):

$$ds = \alpha (\mu - \ln S) S dt + \sigma S Dw \quad (38)$$

$$\mu = \frac{\partial (\ln f(0,1))}{\partial t} + \ln(f(0,1)) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (39)$$

Con α y σ constantes.

4.2.2 Algunos modelos de equilibrio. Estos asumen que el activo subyacente no se transa en el mercado. Cuando esto sucede, muchos de los argumentos de arbitraje que se aplican a los activos que sí se transan, no se pueden aplicar. Por ejemplo, no es posible formar un portafolio con el activo o vender el activo en corto. El valor del futuro es el valor esperado del precio *spot* a la fecha de madurez.

Ejemplos de estos, que se basan en una especificación de la dinámica del precio *spot*, son:

El Modelo de Cox-Ross (1997)

$$dS = k (\theta - S) dt + \sigma S dW \quad (40)$$

donde k , θ y σ son constantes.

Este modelo asume que el subyacente no se puede almacenar en el tiempo excepto a un altísimo costo. La volatilidad se presenta de una manera muy general.

El Modelo 1 de Schwartz (1997)

$$dS = k (\mu - \ln S) S dt + \sigma S dW \quad (41)$$

con k , μ y σ como constantes.

Un ejemplo de modelo en dos niveles es el de Schwartz y Smith:

El Modelo de Schwartz-Smith (2000). En este modelo se descompone el logaritmo del precio

spot en dos procesos: uno que captura el nivel de equilibrio, ξ_t , y otro, χ_t , que captura la especificación dinámica de las perturbaciones transitorias a partir del nivel de largo plazo. Schwartz y Smith probaron que este modelo de equilibrio es equivalente al modelo del *convenience yield* de Gibson y Schwartz (1990)

$$d\chi_t = -k\chi_t \cdot dt + \sigma_{\chi} \cdot dW_1 \quad (42)$$

$$d\xi_t = \mu_{\xi} \cdot dt + \sigma_{\xi} \cdot dW_2 \quad (43)$$

$$\ln(S_t) = \chi_t + \xi_t \quad dW_1 \cdot dW_2 = \rho_{\chi\xi} \cdot dt \quad (44)$$

$k, \sigma_{\chi}, \mu_{\xi}, \sigma_{\xi}$ y $\rho_{\chi\xi}$ son constantes.

Existen modelos que combinan los dos tipos de acercamientos previamente vistos: arbitraje y equilibrio. El modelo de Schöbel (1992) por ejemplo, hace esto mediante la aplicación de modelos de conmutación de regímenes (Regime switching models).

4.3 ¿Qué se necesita para usar cualquiera de estos modelos?

La estimación de parámetros de estos modelos requiere de series de datos diarios, suficientemente largas. Algunos modelos demandan las técnicas del Filtro de Kalman. De esto se infiere que es necesario tener acceso a este tipo de bases de datos completas para los precios de los subyacentes.

La Bolsa Nacional Agropecuaria (BNA) no proporciona al público información diaria, el Sipsa la proporciona normalmente a través de boletines.

4.4 ¿Cuál modelo se debe usar? Las recomendaciones de los expertos

Los autores de textos sobre derivados financieros, así como muchas de las empresas que prestan servicios de consultoría para la valoración de *commodities* recomiendan no usar

el modelo clásico de Black-Scholes salvo como una primera aproximación y se inclinan hacia la utilización de modelos semejantes a los que se emplean para valorar derivados sobre monedas (*currencies*).

Para opciones sugieren el modelo de Black (1976), en el caso europeo, y el de Barone-Adesi y Whaley (Ver Anexo) en el caso americano, cuando se trata de modelos continuos. Ejemplo de estos es la empresa **Resolution** cuyo eslogan reza “**the authority on derivative pricing**”.

En el ambiente académico no hay unidad de criterios: se recomiendan todos los métodos aplicables, y abundan las sugerencias de los métodos numéricos.

5. ¿Por qué el modelo de black-scholes no es apropiado, muchas veces, cuando el subyacente es una commodity?

El supuesto del Movimiento Browniano Geométrico para el precio del subyacente es bastante restrictivo. La independencia de las diferencias que tiene el proceso de Wiener, no se da en los procesos asociados a las *commodities* en los mercados reales. La razón principal es que hay procesos específicos (proceso de cosecha, de transporte, de distribución, sistema climático del periodo de tiempo, etc.) que relacionan los precios de un día dado con los precios de otros días diferentes del día anterior.

5.1 Un resultado importante

Además de lo anterior, se propone el siguiente argumento matemático:

Supóngase que los precios de cierre diarios $\{S_k\}$ de una *commodity* se comportan según un MBG (7). Considérese el siguiente proceso asociado: una serie de tiempo conformada por los promedios de esos precios:

$$m_k = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} S((k-1) * 22 + i) \quad (45)$$

para $k = 1, 2, \dots$

22 es el número promedio de días hábiles de la bolsa.

$$m_k = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} S_0 \text{EXP} \left[\left(\mu + 0.5 \sigma^2 \right) ((k-1) * 22 + i) + \sigma W \left(((k-1) * 22 + i) \right) \right] \quad (46)$$

Donde m_k es el promedio de 22 variables aleatorias log-normales.

El valor esperado de m_k es

$$E[m_k] = \frac{S_0}{22} \sum_{i=1}^{22} \text{EXP} \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ((k-1) * 22 + i) \right] \quad (47)$$

Naturalmente, como este promedio depende del tiempo, la serie $\{m_k\}$ no es estacionaria.

Esto mismo sucede para cualquier número de días que se tome el promedio, no necesariamente 22 (podría ser un promedio semanal: 5 días). En el caso general de p días, las expresiones (45) y (47) se convierten en

$$m_k = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p S_0 \left((k-1) * p + i \right) \quad (48)$$

y

$$E[m_k] = \frac{S_0}{p} \sum_{i=1}^p \text{EXP} \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ((k-1) * p + i) \right] \quad (49)$$

respectivamente.

Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

Si el precio de un subyacente se comporta como un Movimiento Browniano Geométrico, cualquier serie de tiempo que se alcance promediando un número finito de los valores que se obtienen a final de cada día, será no estacionaria: su media depende del tiempo.

La importancia práctica de este resultado estriba en el hecho de que la información sobre precios de *commodities* que se consigue fácilmente en Colombia y en otros países, se presenta como series de promedios mensuales o semanales.

En consecuencia, si una de estas series es estacionaria, se puede asegurar que los precios no siguen un movimiento browniano geométrico y por consiguiente uno de los supuestos del modelo de Black-Scholes no se cumple.

6. Información sobre *commodities* en la bolsa nacional agropecuaria y el sipsa

La BNA y el Sipsa presentan al público información histórica sobre varias *commodities*, en forma de series de precios promedios mensuales. Con tales promedios es muy difícil estimar los parámetros de los modelos mencionados más arriba. A pesar de ello, es posible usar esas series de promedios para determinar la conveniencia de utilizar modelos del tipo Black-Scholes con los precios de esas *commodities*.

Primero, obsérvese lo siguiente: Si la serie original de precios es un MBG, la serie que se obtiene al promediar durante un número de días, p , es no estacionaria, como se mencionó anteriormente. Además de esto, esa no estacionaridad es tal que la diferenciación de la serie no la elimina:

$$m_k = \frac{S_0}{p} \sum_{i=1}^p \text{Exp} \left(\left(\mu + 0.5 \sigma^2 \right) ((k-1) p + i) \right)$$

$$\text{y } m_{k+1} = \frac{S_0}{p} \sum_{i=1}^p \text{Exp} \left(\left(\mu + 0.5 \sigma^2 \right) (k p + i) \right)$$

Por lo tanto:

$$m_{k+1} - m_k = \frac{S_0}{p} \sum_{i=1}^p \text{Exp} \left(\left(\mu + 0.5 \sigma^2 \right) ((k-1) p + i) \right) \left(\text{Exp} \left(\left(\mu + 0.5 \sigma^2 \right) p \right) - 1 \right) \quad (50)$$

Esta diferencia depende del tiempo, representado por k ; tanteeen consecuencia, no es estacionaria. De la misma manera se puede probar que diferencias de orden más alto no eliminarán la no estacionaridad.

Ahora, si se observan los gráficos de las seis series (figuras 11 y 12) correspondientes a los precios promedios de arroz con cáscara, arroz cristal, maíz amarillo, maíz blanco, sorgo y soya se puede ver que aparentemente son no estacionarios pero de una naturaleza semejante a la de un paseo aleatorio.

Figura 11

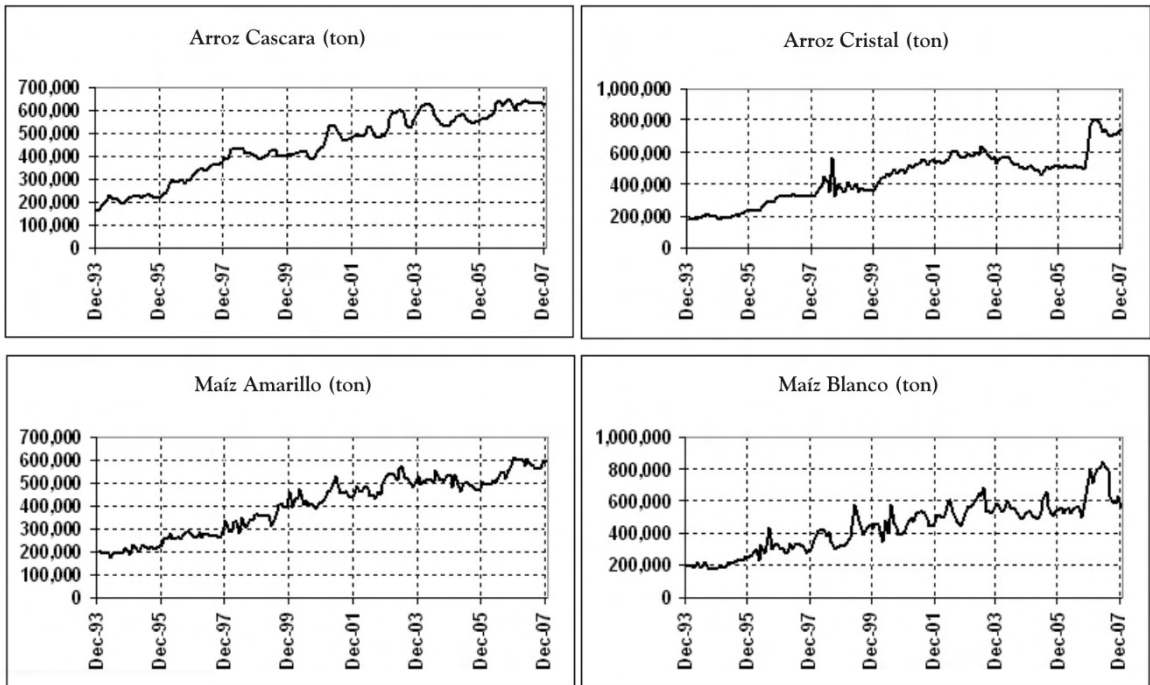
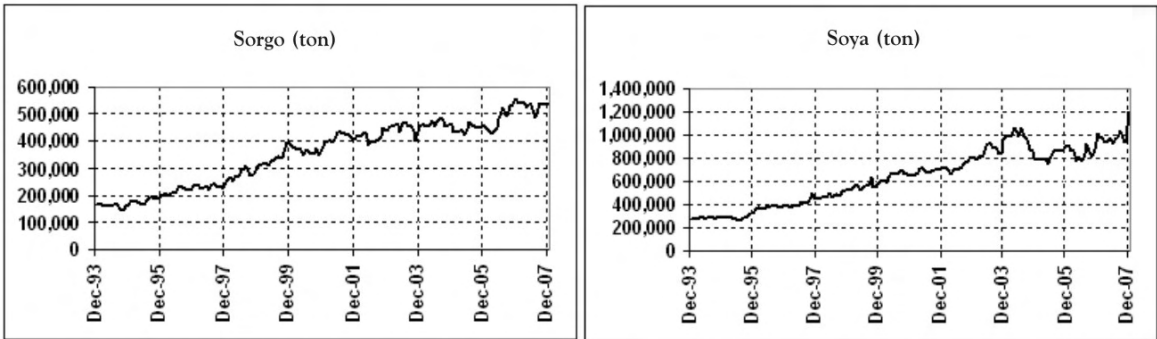


Figura 12



Por ejemplo, del tipo autoregresivo

$$P_t = a + a_1 P_{t-1} + \dots + a_k P_{t-k} + \varepsilon_t \quad (51)$$

con a_1 indistinguible de la unidad y posiblemente con efectos Garch.

Para comprobar esta intuición se hace necesario diferenciar cada serie y someter las diferencias a los siguientes tests: ADF suponiendo intercepto y sin intercepto, Philips-Perron con intercepto y sin intercepto, Elliot-Rothenberg-Stock DF-GLS (con intercepto), y Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), con intercepto.

Los estadísticos correspondientes a cada test aparecen en la tabla 1. Los valores críticos para los niveles más usados están en la tabla 2.

Tabla 1.
Estadísticos para las pruebas de Raíces Unitarias

	ADF	ADF	Phillips - Perron	Phillips - Perron	DF - GLS	KPSS
Serie Diferenciada	Intercepto	Sin Intercepto	Intercepto	Sin Intercepto	Intercepto	Intercepto
Arroz Cascara	- 8.49093	- 8.38050	- 8.15525	- 8.24004	- 8.57110	0.07028
Arroz Cristal	- 18.52826	- 18.33141	- 18.13142	- 18.33141	- 18.56815	0.04923
Maíz Amarillo	- 12.97493	- 12.69113	- 17.74368	- 18.40351	- 12.74575	0.01380
Maíz Blanco	- 14.53435	- 14.53973	- 18.78884	- 17.08353	- 14.47317	0.12578
Sorgo	- 14.62069	- 14.32460	- 17.39534	- 14.57909	- 14.43563	0.09022
Soya	- 13.39435	- 13.13658	- 13.34989	- 13.07642	- 12.44541	0.08921

Tabla 2
Valores Críticos para Los Tests

	ADF	ADF	Phillips - Perron	Phillips - Perron	DF - GLS	KPSS
Niveles	Intercepto	Sin Intercepto	Intercepto	Sin Intercepto	Intercepto	Intercepto
1%	- 3.46969	- 2.57888	- 3.46969	- 2.57888	- 2.57888	0.739
5%	- 2.87872	- 1.94274	- 2.87872	- 1.94274	- 1.94274	0.463
10%	- 2.57601	- 1.61544	- 2.57601	- 1.61544	- 1.61544	0.347

Los resultados hablan por sí mismos: las series de promedios mensuales no pueden corresponder a un MBG. Además de esto, se detectaron efectos Garch en todas estas series. Por lo tanto, para estos productos, dos de los supuestos básicos de los modelos tipo Black-Scholes dejan de cumplirse.

Conclusiones

La modelación del comportamiento de los precios de las *commodities* agrícolas en el país, así como la valoración de derivados son procesos que deben hacerse con cuidado, sin recurrir apresuradamente a modelos, como el clásico de Black-Scholes, que aunque más sencillos están asociados a supuestos que esos precios no satisfacen.

El análisis de los seis productos de la BNA y los otros dos con series de precios facilitadas por el Sipsa así lo demuestran.

Deben estudiarse y aplicarse otros métodos como los que se mencionan en este artículo y quizá otros que todavía no se conocen públicamente.

Dado que esos modelos no son sencillos, y tampoco implementados en paquetes comerciales generales, hay que divulgarlos e implementarlos.

Esto invita a una mejor colaboración entre las empresas del sector agropecuario y la academia.

El desarrollo de un mercado de derivados con subyacentes agropecuarios proveerá de valores reales de mercado para validar esos modelos y para calibrar sus parámetros.

Anexo

Opciones americanas

Las opciones americanas le dan al poseedor el derecho de ejercerlas en cualquier instante anterior o igual a la madurez. Esta característica hace que, en general, sea más difícil estadounidenses encontrar soluciones que para sus contrapartes europeas.

El único caso para el que existe una solución en forma cerrada para la valoración de una opción americana es aquel en el que la opción es una *call* sobre una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.

Cuando hay un único dividendo conocido durante la vida del contrato es posible dar un precio exacto.

Fórmulas Cerradas

A. No hay dividendos durante la vida de la opción. En estos casos nunca es beneficioso ejercer la opción en una fecha anterior a la madurez. Las razones para esto son principalmente dos: en primer lugar, mantener la opción *call* en vez de ejercerla y obtener la acción es un factor de aseguramiento. Una caída en los precios puede implicar pérdidas para el poseedor de la acción pero no necesariamente para quien posee la *call*. En segundo lugar, debido al valor del dinero en el tiempo, el pagar el precio de ejercicio más temprano que tarde implica la pérdida del valor que esa cantidad puede alcanzar en el tiempo hasta la madurez.

En este caso se puede valorar la opción utilizando la fórmula estándar de B/S.

B. Opciones *Call* americanas con un Solo Dividendo. Modelo de Roll, Geske & Whaley (1979). Una opción americana se puede considerar como una serie de opciones *call* europeas que expiran en periodos sin dividendos. En este caso se comporta como una opción compuesta, es decir una opción sobre una opción y tiene una fórmula cerrada:

$$c_t = (S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)}) \Phi(b_1) - (K - D_1) e^{-r(t_1-t)} \Phi(b_2) + (S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)}) \Phi_2\left(a_1; -b_1; \sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi_2\left(a_2; -b_2; \sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}}\right)$$

Donde,

$$a_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)}}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}};$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)}}{S^*}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(t_1-t)}{\sigma\sqrt{T-t}};$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t_1-t}$$

$\Phi_2(a; b; \rho)$ es la función de distribución una normal divariada acumulada.

D_1 : Valor del dividendo a pagar en t_1

S^* es el valor crítico de la acción que satisface la ecuación $S^* + D_1 - K = \text{Precio de la Call}$. Normalmente este valor se haya mediante algún método numérico.

Aproximaciones

A. Aproximación cuadrática de Barone-Adesi, Whaley. Esta es una aproximación para opciones americanas que consiste esencialmente en el precio de una opción europea ajustada con una prima de ejercicio temprano.

$$C_t = c_t + A_2 \left(\frac{S_t}{S^*}\right)^{q_2}, \text{ si } S_t < S^*, \text{ y}$$

$$S_t - K, \text{ si } S_t \geq S^*.$$

c_t se valora mediante la fórmula fundamental de B-S.

$$A_2 = \frac{S^* [1 - e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1)]}{q_2}; \quad q_2 = \frac{1-n + \sqrt{(n-1)^2 + 4k}}{2}$$

$$n = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}; \quad k = \frac{2r}{\sigma^2(1 - e^{-r(T-t)})}$$

El valor crítico, S^* se define mediante la ecuación $S^* - K = c_r(S^*, K, T-t) + (1 - e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1))(S^*/q_2)$; y se haya mediante algún método numérico.

Para las *put* correspondientes se tiene el conjunto de fórmulas

$$P_t = p_t + A_1 \left(\frac{S_t}{S^{**}} \right)^{q_1}, \text{ si } S_t > S^{**}, \text{ y}$$

$$K - S_t, \text{ si } S_t \leq S^{**}.$$

$$A_1 = \frac{S^{**} [1 - e^{-\delta(T-t)} \Phi(-d_1)]}{q_1}; \quad q_1 = \frac{1-n - \sqrt{(n-1)^2 + 4k}}{2}$$

n y k son las mismas que para la *call*.

Se considera que esta aproximación es bastante adecuada y rápida de calcular.

B. Aproximación de Bjerksund, Stensland (1993). Hay evidencia que funciona mejor que la aproximación anterior en muchos casos.

Para una *Call*:

$$C = \alpha S^\beta - \alpha \varphi(S, T, \beta, I) + \varphi(S, T, 1, I) -$$

$$\varphi(S, T, 1, K, I) - K \varphi(S, T, 0, I) + k \varphi(S, T, 0, k, I)$$

Donde

$$\alpha = (1-K)I^\beta; \quad \beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{r-D}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{r-D}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{r}{\sigma^2} \right)}$$

$$\varphi(S, T, \gamma, H, I) = e^{\lambda} S^\gamma \left[\Phi(d) - \left(\frac{1}{S} \right)^\kappa \Phi\left(d - \frac{2 \ln\left(\frac{1}{S} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right]$$

$$\lambda = \left[\gamma(r-D) - r + \frac{1}{2} \gamma(\gamma-1) \sigma^2 \right] T;$$

$$d = - \frac{\ln\left(\frac{S}{H} \right) + (r-D + (\gamma-0.5) \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$\kappa = \frac{2(r-D)}{\sigma^2} + (2\gamma-1); \quad I = B_0 + (B_\infty - B_0)(1 - e^{-rT});$$

$$f = -((r-D)T + 2\sigma\sqrt{T}) \left(\frac{B_0}{B_\infty - B_0} \right);$$

$$B_\infty = \frac{\beta}{\beta-1} K; \quad B_0 = \text{Max} \left[K, \left(\frac{r}{D} \right) K \right]$$

Para una *Put* se usa la siguiente forma de paridad:

$$P(S, K, T, r, r-D, \sigma) = C(K, S, T, D, D-r, \sigma)$$

Bibliografía

Audet, N. et al. (2004). "Modeling electricity forward curve dynamics in the nordic market", *Modeling Prices in Competitive Electricity Markets*. New York: John Willey & Sons, pp. 251-265.

Barone-Adesi, G. & R. Whaley. (1987, June). "Efficient analytic approximation of american option values", *Journal of Finance*. Columbus, pp. 301-320.

Benavides, Guillermo, "The Theory of Storage and Price Dynamics of Agricultural Commodity Futures: The Case of Corn and Wheat" (February

2002). EFA 2002 Berlin Meetings Discussion Paper. Mexico. Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=301226> or DOI: [10.2139/ssrn.301226](http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.301226).

Bjerksund, P. & G. Stensland: "Closed-form approximation of american options, *Scandinavian Journal of Management*, vol. 9. Helsinki, pp. 87-99.

Black, F. (1976). "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*. New York, pp. 167-179.

- Black, F. & M. Scholes. (1973, May). "The pricing of options & corporate liabilities", *The Journal of Political Economy*. Chicago, pp. 637-659
- Boyle, P. (1986). "Option valuation using a three-jump process", *International Options Journal*, 3, pp. 7-12.
- Brennan, M. and E. Schwartz (1985). "A new approach to evaluating natural resource investments." *Journal of Business* 58(2), Chicago. pp. 135-157.
- Brennan, M. L., and Schwartz, E.L., (1980), "Analyzing convertible bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, Washington. pp. 907-929.
- Brennan, M. & E, Schwartz. (1978). "Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims", *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 13. Washington, pp. 462-474.
- Brennan, M.J. (1958). "The supply of storage", *American Economic Review*, 48. Baltimore, pp. 50-72.
- Broadie, M. & J. Detemple. (1996). "American option valuation: new bounds, approximations, and a comparison of existing methods, *Review of Financial Studies*, 4(9). Oxford, pp. 1211-1250.
- Cárcamo, Ulises y J. Arbeláez (2007) *Derivados financieros en el sector agropecuario en Colombia*. Informe Final de Investigación. Medellín: Universidad EAFIT.
- Carr, P. A. Hirs. (2003). *Why be backward. Forward equations for american options*. New York: RISK.
- Chang, C. & J. Chang. (1990, september). "Forwards and futures prices: evidence from foreign exchange markets", *Journal of Finance*, 45. Columbus, pp. 1333-1336.
- Clelow, L; Strickland C. (1999). "Valuing Energy Options in one factor model. Fitted to forward prices". Quantitative Finance Research Group. University of Technology, Sydney. Research Paper 10 .
- Cootner, P. H. (1960). "Return to speculators: Telser vs. Keynes", *Journal of Political Economy*. 68. Chicago, pp. 398-404.
- Cornell, B. & M. Reinganum. (1981, december). "Forward and futures prices: evidence from foreign exchange markets", *Journal of Finance*, 36. Columbus, pp. 1035-1045.
- Cox, J.; Ross, S. & Rubinstein M. (1979). "Option pricing: a simplified approach", *Journal of Financial Economics*, 7. New York, pp.229-263.
- D'Halluin, Y.; Forsyth, P. A. & Labahn, G. (2003). *A penalty method for american options with jump diffusion processes*.
http://www.cs.uwaterloo.ca/~paforsyt/jump_amer.pdf
- Dusak, K. (1973). "Futures trading and investor returns: an investigation on commodity market risk premiums". *Journal of Political Economy*. 81. Chicago, pp. 1387-1406.
- Geske, R. & H.E. Johnson. "The american put option valued analytically", *Journal of Finance*, 39. Columbus, pp. 1511-1524.
- Gibson, R & E. S. Schwartz (1990). "Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims". *Journal of Finance*, 45 (3). Colombus, pp.959-976,
- Hazuka, T.B. 1984. "Consumption betas and backwardation in commodity markets", *Journal of Finance*, 39. Columbus, pp. 647-655.
- Heman, H. (2005). *Commodities and commodity derivatives. Modeling and pricing for agriculturals, metals and energy*. New Jersey: Wiley.
- Hull, J. (2002). *Options, futures & other derivatives*. 5th Edition. New York: Prentice Hall.
- Ju, N. & R. Zhong. (1999). "An approximate formula for pricing american options", *Journal of Derivatives*, 7(2). New York, pp. 31-40.

- Kaldor, Nicholas (1939). "Speculation and economic stability", *Review of Economic Studies*, 7, Oxford, pp1-27.
- Lewis, A. (2003, Mar). "American options under jump-diffusions: an introduction", *Wilmott Mag.* (sne)
- MacMillan, W. (1986). "Analytic approximation for the american put option", *Advances in Futures and Options Research*, 1. Greenwich, pp. 119-139.
- Merton, R. (1973a, june). "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3. New York, pp. 125-144.
- Merton, R. (1973b, june). "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics & Management*, 4. Santa Mónica, Ca, pp.141-183.
- Park, H. Y. & A. H. Chen. (1985). "Differences between futures and forward prices. A further investigation of marking to market effects", *Journal of Futures Markets*, 5. Charlottesville, Virginia, pp. 77-88.
- Roberts, M. C. (2001). *Commodities, Options, and Volatility: Modelling Agricultural Futures Prices*. Working paper. Columbus: Ohio State University.
- Schöbel, R. & J. Zhu. (1999). "Stochastic volatility with an ornstein-uhlenbeck process: an extension", *European Finance Review*, 3. Heidelberg, pp. 23-46.
- Schöbel, Rainer (1992) "Arbitrage pricing in commodity futures markets: Is it feasible?". Presentation at the Conference on Mathematical Finance, Oberwolfach.
- Schwartz E. & J. E. Smith. (2000). "Short-term variations and long term dynamics in commodity prices", *Management Science*, 46(7). Hanover, pp. 893-911.
- Telser, L. G. (1958). "Futures trading and the storage of cotton and wheat", *Journal of Political Economy*, 66. Chicago, pp. 233-55.
- Working, H. (1948). "Theory of the inverse Carrying Charge in Future Markets", *Journal of Farm Economics*, 30. Menasha, Wis, pp. 1-28.