



Opciones tipo barrera sobre la tasa de cambio Peso/Dólar

Juan Carlos Botero Ramírez *
Ángela María Pérez Muñoz **

Recepción: Febrero 04 de 2008

Aceptación: Febrero 28 de 2008

Resumen

Este artículo es derivado de la investigación titulada *Opciones tipo barrera sobre tasa de cambio*. Se realizó un examen de diversas metodologías existentes para la valoración y medición de los riesgos de las opciones tipo barrera europeas. La revisión se centró, principalmente, en los métodos numéricos. Las Simulaciones Montecarlo constituyen una metodología para valorar y calcular las coberturas de opciones que dependen de la ruta seguida por los precios del activo subyacente durante su vida útil. Los resultados generados corroboran que ellas convergen satisfactoriamente en la formulación analítica cuando ésta se ajusta a una observación discreta de los precios del activo subyacente. Tales resultados se ajustan más cuando se aplica el Método de Control de Varianza de Variables Antitéticas a las Simulaciones Montecarlo.

Palabras Clave: Opciones Plain Vanilla, Opciones Knock In, Opciones Knock Out, In the money, At the money, Out of the money.

Abstract

This paper shows the results obtained from reviewing diverse existing methodologies for the valuation and risk measurement of European Barrier Options, mainly focusing in the revision of numerical methods. The results obtained corroborate that the Monte Carlo Simulations as a valuation methodology for path-dependent

* Ejecutivo de la Organización Bancolombia S. A. Profesor de posgrado, Universidad EAFIT. juaboter@bancolombia.com.co.

** Estudiante de Maestría en Finanzas, Universidad EAFIT. aperezm@eafit.edu.co.

options satisfactorily converge on the analytical formulation. The best-fit results are obtained when applying the Variance Control Method of Antithetic Variables.

Keywords: Plain Vanilla Options, Knock In Options, Knock Out Options, In the money, At the money, Out of the money.

Introducción

El desarrollo del Mercado de Derivados en Colombia durante los últimos años ha obligado a las entidades financieras y a los administradores de portafolios a ofrecer más y mejores productos no estandarizados, de tal manera que les permitan a sus clientes contar con coberturas más eficientes. De esta revisión surgió la inquietud por profundizar en los productos exóticos, sus características y sus beneficios, ya que estos, generalmente, según la teoría, pueden ser más rentables y más comerciales que los *plain vanilla*.

Las opciones tipo barrera son una variación de Opción Exótica, que se cancelan o se activan dependiendo de si el precio del activo subyacente alcanza cierto valor durante un periodo determinado, independientemente de su valor al momento del vencimiento de la opción. Estas opciones tienen la característica de ser “más baratas”¹ que las opciones *plain vanilla*, razón por la cual pueden llegar a ser muy atractivas.

Las opciones tipo barrera se clasifican en Opciones con Barrera de Entrada *knock-in* y con Barrera de Salida *knock-out*. En las primeras, si durante el periodo pactado, el

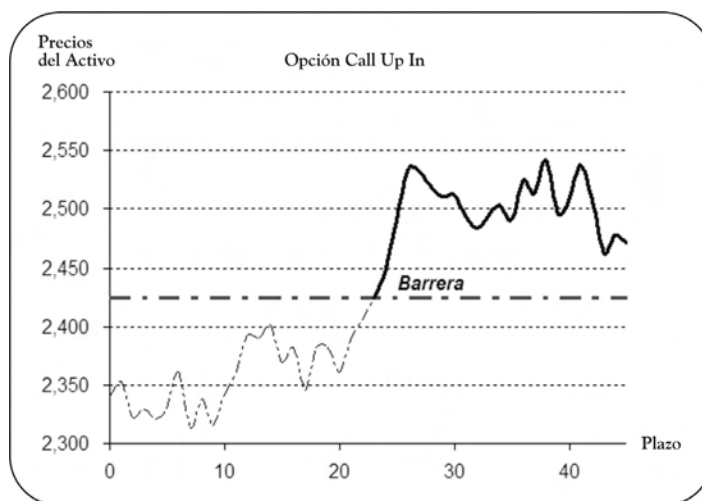
¹ El valor total de una opción corresponde a la suma del valor intrínseco y el valor tiempo de la misma. Es precisamente la existencia de estos valores, lo que explica el menor precio de las opciones tipo barrera, comparadas con las Opciones *Plain Vanilla*, ya que la existencia de la barrera crea un límite al valor intrínseco y al valor tiempo de la opción, disminuyendo así su valor total.

subyacente alcanza el nivel determinado previamente o la barrera, la opción pasa de ser una condicional a ser una opción de compra o de venta *plain vanilla*. Por el contrario, en las opciones con barrera de salida *knock-out*, cuando se alcanza la barrera, la opción deja de existir o expira sin ningún valor en el momento de la activación. Las opciones tipo barrera pueden ser Europeas o Americanas y clasificarse en: opciones abajo y de salida *down-out*, o abajo y de entrada *down-in*, en las cuales la barrera se encuentra por debajo del nivel inicial del activo; o arriba y de salida *up-out* o arriba y de entrada *up-in*, en las cuales la barrera se encuentra por encima del nivel inicial del activo, lo que implica ocho diferentes tipos de opciones considerando que cada uno de ellos puede ser *Call* o *Put*.

Adicional a lo anterior, estas opciones también se pueden catalogar en opciones tipo estándar y en opciones de reversa. Las primeras son las menos complejas de valorar y cubrir, debido a que su *knock-in* o *knock-out* se da cuando la opción está fuera del dinero (*out of the money*), lo que también las hace atractivas considerando que en algunas ocasiones podrían llegar a expirar sin ningún valor antes del vencimiento cuando ya no es requerida la cobertura. Por su parte, las opciones de reversa son mucho más complejas, ya que en forma contraria, se encuentran dentro del dinero (*in the money*) cuando se activa la barrera, sea ésta de entrada o de salida.

Figura 1. Opción Tipo Barrera Call Up-In

Cobertura que se activa cuando el precio del activo cruza la barrera. La opción deja de ser condicional, para convertirse en una opción *Call plain vanilla*.



El estudio de las opciones tipo barrera se inició en 1973 cuando Robert C. Merton propuso un primer acercamiento analítico para su valoración bajo condiciones de *no arbitraje*, trabajando con las opciones *Call down-out* y realizando una extensión del trabajo de Black-Scholes. Sin embargo, solo dos décadas después se empezaron a desarrollar algunas investigaciones que han considerado muy interesante la revisión de ese tipo de opciones por la existencia de eventos significativos que le adicionan un mayor grado de complejidad a su valoración y cobertura, tales como la existencia de las barreras, la cercanía del precio del activo subyacente a ellas al momento de pactar el contrato y si este se celebra cuando el *knock-in* o *knock-out* opera ante la opción *in the money*, *at the money* o *out of the money*.

1. Marco teórico

1.1 Metodologías de valoración de opciones

No se puede desconocer el gran avance que envuelve la formulación analítica desarrollada por Haug (1997); Merton (1973); Reiner y

Rubinstein (1991). Ellos, además, ayudaron a popularizar las opciones tipo barrera, haciendo intuitiva la Paridad Clásica de las Barreras, que se refiere a la relación existente entre las opciones *knock-out*, *knock-in* y las opciones *plain vanilla* (una *knock-out* más una *knock-in* es igual a una *plain*). De igual manera es importante el aporte en este desarrollo analítico al nivel de la barrera sugerido por Broadie, Glasserman y Kou (1997) quienes consideran que el comportamiento del precio del activo subyacente no es observado en forma continua sino en forma discreta, como se describirá más adelante. La literatura resalta la importancia de continuar realizando un estudio detallado de los procedimientos numéricos, como pueden ser las Simulaciones Montecarlo, que puedan arrojar mejores resultados, sobretodo para este tipo de activos donde el *payoff* depende de la ruta seguida por los precios del activo subyacente durante la vida de la opción.

El ajuste al nivel de la barrera, sugerido por Broadie *et al.* (1997) para considerar que el comportamiento del precio del activo subyacente no es observado en forma continua sino en forma discreta, implica reemplazar en las fórmulas analíticas la barrera H , por $H e^{0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$

para una opción con barrera arriba *up*, sea de entrada o de salida, y por $He^{-0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$ para una opción con barrera abajo *down*, sea también de entrada o de salida. Como se verá más adelante en los resultados obtenidos, este arreglo permite obtener una buena aproximación entre la formulación analítica y las Simulaciones Montecarlo.

Antes de introducir las Simulaciones Montecarlo, se optó por revisar uno de los procedimientos numéricos más conocidos para la valoración de opciones: los árboles binomiales. Estos se pueden aplicar para valorar opciones tipo barrera en forma similar a como se emplean actualmente para valorar las opciones americanas, solo que en este caso, cuando el precio del nodo atraviesa la barrera, se debe replantear la valoración. Por ejemplo, cuando se presenta una opción *up-out*, el valor de ella en ese nodo sería cero.

Boyle (1986) fue el primero en sugerir un método estándar de árboles trinomiales para aplicar a las opciones barrera. Aunque generalmente estos han proporcionado mejores resultados en la valoración de las *plain vanilla*, tanto los modelos binomiales como trinomiales presentan problemas de convergencia lenta para las tipo barrera y trabajan mejor cuando inicialmente el precio del activo subyacente no está muy cercano a la barrera, lo cual no se cumple en la mayoría de los casos. Boyle y Lau, en 1994, y Ritchken en el año siguiente, indicaron que la razón de la convergencia lenta y la inestabilidad que presentan los árboles binomiales y trinomiales se debe a que la barrera es asumida por el árbol en forma incorrecta, ya que éste es incapaz de representar exactamente la opción cuando la barrera no coincide puntualmente con los precios disponibles en el árbol, lo cual se conoce como error de especificación.

Derman *et al.* (1995b) expanden este método numérico para dar solución al error presentado. Corroboran también que la convergencia lenta se presenta por que intrínsecamente el

modelo toma los cambios del precio del activo subyacente como discretos, cuando en realidad son continuos. Su propuesta implica suponer dos barreras, una efectiva al interior del árbol y una modificada en la parte exterior, lo cual disminuye el error de especificación del modelo y posibilita obtener un mejor valor de la opción en los nodos cercanos a la barrera, realizando interpolaciones.

Para finalizar esta revisión de los métodos de valoración, es importante reconocer que la valoración de derivados que dependen del comportamiento seguido por el precio del activo, durante un periodo específico, es una de las aplicaciones más interesantes de la Simulación Montecarlo. Este método supone que el proceso seguido por el precio del activo subyacente es de la siguiente forma:

$$dS = \bar{\mu} S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

Donde:

dz es un proceso de Winner, con $dz = \varepsilon\sqrt{t}$, $\varepsilon \sim N(0,1)$.

$\bar{\mu}$ es el valor esperado de los retornos del activo en un mundo de riesgo neutral; para el caso analizado, $\bar{\mu} = r_d - r_f$; allí r_d es la tasa libre de riesgo domestica y r_f es la tasa libre de riesgo foránea.

σ es la volatilidad del activo.

Para simular la ruta seguida por S , se utiliza la siguiente ecuación:

$$S(t+\Delta t) = S(t)e^{\left((r_d - r_f) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (2)$$

Con la ecuación (2) se generan las diferentes trayectorias que puede tomar el precio del activo subyacente durante la vida de la opción. Una vez se genera la ruta, se determina el valor máximo o mínimo que ha tomado el activo durante la vida de la opción para evaluarlo contra la barrera. Finalmente se calcula el *payoff* de la opción como el $Max(S_t - K, 0)$ para las opciones *Call*, o $Max(K - S_t, 0)$ para las opciones *Put*.

La exactitud que puede proporcionar este método numérico está relacionada con el número de corridas que se ejecuten en una simulación. Además del cálculo del promedio de los pagos descontados que se generan en las corridas, es decir, el precio alcanzado para la opción, se debe obtener el error de la estimación. Este no es otra cosa que la desviación estándar generada en la simulación, dividida por la raíz cuadrada del número de corridas utilizadas. Esta medida permite construir intervalos de confianza que muestran que la incertidumbre acerca del valor de la opción es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de corridas. En otras palabras, para alcanzar el doble de exactitud en una estimación, se deberá cuadruplicar el número de corridas.²

Lo anterior implica que para conseguir una muy buena estimación del precio del derivado, se necesita un número muy elevado de corridas. Este tipo de requerimientos exige mucho en recursos computacionales y en tiempo, y por tal motivo, se recomienda recurrir a procedimientos de reducción de varianza que disminuyan este esfuerzo y mejoren los resultados.

Uno de los procedimientos más utilizados para realizar reducción de varianza de las estimaciones es la técnica de variables antitéticas. Este método calcula dos valores para el derivado a partir de un segundo conjunto de variables aleatorias $(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \dots, -\varepsilon_n)$ que invierte el signo del conjunto original de variables $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ normalmente distribuidas con media 0 y varianza 1. De este modo se obtienen dos rutas de los precios del activo subyacente y por ende dos precios para el derivado que

se está valorando: f_1 y f_2 . El precio final se alcanza con el promedio simple de las dos valoraciones resultantes.

Se reconoce que esta técnica brinda mayor eficiencia y la ventaja de crear números aleatorios con una distribución completamente simétrica y media 0.

1.2 Metodologías de medición de riesgos

Una vez descritas las metodologías de valoración consideradas en este estudio, es necesario continuar revisando cómo debería realizarse eficientemente la medición de los riesgos en que se incurre al tomar posiciones sobre estas opciones.

En un principio, para neutralizar su exposición, el vendedor de una opción de este tipo puede preferir la compra de una opción con las mismas características de la que ha vendido, pero como ya se ha dicho, encontrar clientes para este tipo de productos con el fin cerrar una posición abierta, sobretodo en mercados OTC, es muy difícil o casi imposible.

Derman, Ergener y Kani (1995a) propusieron un método llamado *Static Options Replication* (Replicación Estática de Opciones), que hoy en día lo siguen trabajando muchos autores. El principio básico de la replicación estática de opciones implica que si dos portafolios son igualmente valorados en cierto límite, también lo son igualmente valorados al interior de los puntos del límite. Esta técnica implica la disponibilidad de un portafolio lo más amplio posible de opciones que se transen activamente y que aproximen o repliquen los diferentes pagos de la opción objetivo que se busca valorar o cubrir. En la práctica, una réplica perfecta requeriría un

² Se refiere a pruebas realizadas que comparan los resultados producidos por las fórmulas analíticas de Black-Scholes para Opciones Europeas y las Simulaciones Montecarlo.

número infinito de activos pero, aun así, los autores demostraron que es posible lograr resultados satisfactorios con un número limitado de activos disponibles.

Las opciones tipo barrera pueden cubrirse estáticamente con opciones *plain vanilla*. Estas aproximaciones son problemáticas si el portafolio construido para la cobertura debe liquidarse cuando la barrera se alcanza, como ocurre en el caso de las *knock-out*; esto sucede porque las volatilidades de las *vanilla* pudieron haber cambiado en el lapso entre la conformación del portafolio y el momento en que se toca la barrera (Hakala, 2001).

Por esta razón, lo ideal en términos de coberturas sería poder efectuar un rebalanceo de éstas en forma periódica, con base en los resultados obtenidos de las *letras griegas*, lo que comúnmente se conoce como coberturas dinámicas. Esto obliga a su poseedor a realizar ajustes diarios que le permitan mantener el *delta neutral*. La literatura disponible de métodos de coberturas dinámicas para este tipo de opciones es escasa, debido a la estructura compleja que presentan estas opciones por la existencia de las barreras.

2. Resultados empíricos

2.1 Metodologías de valoración de opciones

A continuación se comparan los resultados de los procedimientos con los modelos analíticos de Haug (1997), Merton (1973) y Reiner - Rubinstein (1991) contra los generados con las Simulaciones Montecarlo. Las aplicaciones se ejecutaron para casos supuestos de opciones tipo barrera europeas *Call*, tanto *up* como *down*, con una sola barrera, que puede ser de entrada *knock-in*

y fijada considerando dos escenarios: por arriba del precio *strike*, es decir, opciones de reversa que se activarían *in the money*, y por debajo del precio *strike*, o sea, opciones estándar, que se activarían *out of the money*. Para todos los casos descritos se revisaron también las respectivas *knock-out*.

Las opciones descritas se pactan sobre el Precio de Cierre de la Tasa de Cambio Peso/Dólar. Se trabaja con una serie diaria de los precios ofrecida por Bloomberg®,³ aceptando el supuesto que la distribución de probabilidad para los precios del activo subyacente es lognormal y trabajando con volatilidad histórica. La Tasa Libre de Riesgo doméstica se obtuvo de la Curva Cero Cupón de los TES disponible en el Infoval,⁴ y la Tasa Libre de Riesgo Foránea es la Curva Cero Cupón⁵ de los *Treasury Bills* obtenidos de Bloomberg®.

Inicialmente se realizó una prueba para estimar el precio de las opciones tipo barrera con Simulaciones Montecarlo, con el fin de comparar los resultados arrojados con los obtenidos por la formulación analítica. Para este ejercicio se corrieron 10 simulaciones por cada tipo de opción, cada una de 50.000 iteraciones, donde el precio de la opción corresponde al promedio simple de los resultados de las 10 simulaciones. Como se aprecia en la tabla 1, se comprobaron diferencias significativas entre las estimaciones obtenidas por el Modelo Analítico y las Simulaciones Montecarlo.

³ Bloomberg®: Sistema proveedor de datos, noticias e información de mercados financieros en tiempo real a nivel mundial.

⁴ Infoval: Sistema de Información de la Bolsa de Valores de Colombia.

⁵ Se toman los *Treasury Bills* transados a diferentes plazos y se construye la Curva Cero Cupón.

Tabla 1. Resultados de la valoración de opciones Call down a 20 días, a un nivel de la Tasa de Cambio al pactar la opción de \$2.300 pesos por dólar, una volatilidad de 10,08%, una tasa r_d de 7,86% y una tasa r_f de 4,68%.

<i>Call Down Estándar (K > H)*</i>			
	K = \$ 2.290,00 COP/USD	H = \$ 2.285,00 COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CDO _E **	Opción CDI _E **
Black-Scholes-Merton	34.4937	15.86026	18.6334
Simulación Montecarlo 50.000 trials	34.4294	22.06255	12.3668
<i>Call Down Reversa (K <= H)</i>			
	K = \$ 2.280,00 COP/USD	H = \$ 2.295,00 COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CDO _R **	Opción CDI _R **
Black-Scholes-Merton	40.6520	6.67472	33.9772
Simulación Montecarlo 50.000 trials	40.5700	17.20347	23.3665

* K: Precio Strike o Precio de Ejercicio y H: Precio Barrera

** CDO_E: Opción Call down-out Estándar, CDI_E: Opción Call down-in Estándar, CDO_R: Opción Call down-out de Reversa y CDI_R: Opción Call down-in de Reversa

Los precios resultantes para las opciones *Call plain vanilla*, tanto por la formulación analítica como por las simulaciones, muestran cierto ajuste, pero es evidente que no se obtienen resultados satisfactorios. En razón de las diferencias arrojadas por las dos metodologías, se consideró incluir el ajuste al modelo analítico propuesto por Broadie *et al.* (1997), el cual hace discreta la observación de la barrera. Esto se debe a que las simulaciones consideran *per se* que la

observación del subyacente se realiza al finalizar cada jornada y no en forma continua como sí lo asumen las fórmulas analíticas, donde la observación del precio del subyacente se realiza constantemente para validar que la barrera no ha sido alcanzada en ningún momento. De la misma forma, se optó por duplicar el número de corridas por simulación, buscando con esto disminuir el error estándar de las mismas y alcanzar resultados más apropiados.

Tabla 2. Resultados obtenidos en la valoración de opciones Call tipo Barrera con las Simulaciones Montecarlo y el Modelo Analítico ajustado

<i>Call Down Estándar (K > H)</i>			
	K = \$ 2.290,00 COP/USD	So = \$ 2.300,00 COP/USD	
	H = \$ 2.285,00 COP/USD	H' = \$ 2.276,55 COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CDO _E	Opción CDI _E
Black-Scholes-Merton	34.4937	15.8603	18.6334
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	34.4937	22.0581	12.4356
Simulación Montecarlo 100.000 trials	34.4810	22.0963	12.3848
<i>Call Down Reversa (K <= H)</i>			
	K = \$ 2.280,00 COP/USD	So = \$ 2.300,00 COP/USD	
	H = \$ 2.295,00 COP/USD	H' = \$ 2.286,52 COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CDO _R	Opción CDI _R
Black-Scholes-Merton	40.6520	6.67472	33.9772
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	40.6520	16.30299	24.3490
Simulación Montecarlo 100.000 trials	40.6274	17.20146	23.4259

Call Up Estándar ($K > H$)			
	$K = \$ 2.360.00$ COP/USD		$S_0 = \$ 2.340.00$ COP/USD
	$H = \$ 2.350.00$ COP/USD		$H' = \$ 2.358.71$ COP/USD
Método	Opción CALL	Opción CUO _E	Opción CUI _E
Black-Scholes-Merton	20.0883	0.0000	20.0883
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	20.0883	0.0000	20.0883
Simulación Montecarlo 100.000 trials	20.1477	0.0000	20.1477
Call Up Reversa ($K \leq H$)			
	$K = \$ 2.345.00$ COP/USD		$S_0 = \$ 2.340.00$ COP/USD
	$H = \$ 2.350.00$ COP/USD		$H' = \$ 2.358.71$ COP/USD
Método	Opción CALL	Opción CUO _R	Opción CUI _R
Black-Scholes-Merton	26.8733	0.00055	26.8728
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	26.8733	0.02064	26.8527
Simulación Montecarlo 100.000 trials	26.8401	0.00719	26.8329

Como se puede advertir, el ajuste que discretiza la observación de la barrera disminuye la diferencia encontrada entre los resultados analíticos y las simulaciones de las opciones barrera. Es importante mencionar que con la ejecución de otras simulaciones se pudo concluir que la diferencia que se logra entre las fórmulas analíticas con y sin el ajuste presentado a la barrera, es más significativa cuando el nivel de ésta es fijado muy cerca al que presenta el precio del activo subyacente cuando se pacta la opción.

Con el fin de profundizar más en los resultados arrojados por los métodos presentados hasta ahora, y validar la metodología de árboles binomiales ajustados de acuerdo con la propuesta de Derman *et al.* (1995b), se seleccionaron inicialmente las opciones *Call up*, ya que se pueden considerar uno de los casos más interesantes de las opciones tipo barrera si son negociadas individualmente, pues en un gran número de casos son requeridas para empaquetarlas en Notas u otros Productos Estructurados, los cuales no son objeto de este estudio.

Supóngase entonces un agente interesado en una cobertura porque tiene una posición corta en dólares americanos. Él decidiría tomar una posición larga en opciones *Call* cuando se pueda

ver perjudicado por incrementos en el precio del activo. Por la naturaleza propia de las opciones *Call*, es atractivo estudiar los eventos donde efectivamente se constituyan o se eliminan las coberturas con opciones tipo barrera, debido a *incrementos* del subyacente; este es el caso de las opciones con barrera arriba *Call up*.

Dicho agente pactaría una opción *Call up-in* si necesitara empezar a contar con la cobertura sólo a partir de un determinado nivel en el precio del activo subyacente. Un escenario así le permitiría tener dos alternativas: pactar una opción *Call up-in* estándar, la cual se activará *out of the money*, lo que significaría tener que esperar incrementos en el precio del activo de tal forma que sea óptimo el ejercicio de la opción. También podría inclinarse por una opción *Call up-in* de reversa, donde la cobertura se le activaría en el nivel requerido *in the money* y podría significar que fuese óptimo su ejercicio, dependiendo, claro está, de la volatilidad del activo y del tiempo al vencimiento, por tratarse de opciones europeas. Vale la pena resaltar que si se considera la posición de este agente, el no ejercicio de tal tipo de opciones implicaría que su beneficio se está generando por su posición corta sobre el subyacente, pero sus costos en coberturas sí deben ser diferentes, pues a priori se esperaría que las opciones de reversa sean más “costosas” que las opciones estándar.

Tomar, pues, una posición larga en opciones *Call up-out* significa el deseo de asumir riesgos importantes. Esas opciones se deben utilizar cuando se tienen expectativas en que los incrementos en el precio del activo no serán significativos durante el periodo que se pacta la cobertura o que, por lo menos, estos no sobrepasarán cierto nivel o la barrera durante este lapso. Por tal motivo, estas opciones pueden llegar a ser muy útiles sólo sobre activos poco volátiles. Las opciones *Call up-out* estándar, por definición, no existen, ya que no sería lógico pactar una opción donde el precio de ejercicio

es mayor al precio que se espera que alcance el activo subyacente durante la vida de la opción; por tal motivo, únicamente se pueden pactar opciones *Call up-out* de reversa, que son coberturas que se pierden en determinado momento, si el subyacente alcanza el nivel pactado.

En seguida se resumen los resultados cuando se supone que se han pactado opciones *Call up* al ir incrementando el número de pasos de los árboles binomiales ajustados y las Simulaciones Montecarlo.⁶

Tabla 3. Resultados obtenidos en la valoración de las opciones Call up estándar

<i>Call Up Estándar (K > H)</i>			
	K = \$ 2.360,00 COP/USD	So = \$ 2.340,00 COP/USD	
	H = \$ 2.350,00 COP/USD	H' = \$ 2.358,71 COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CUO _E	Opción CUI _E
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	20.0883	0.0000	20.0883
Arbol Binomial 20 pasos	20.3267	0.0000	20.3267
Arbol Binomial 50 pasos	20.0082	0.0000	20.0082
Arbol Binomial 100 pasos	20.1496	0.0000	20.1496
Arbol Binomial 150 pasos	20.0908	0.0000	20.0908
Arbol Binomial 200 pasos	20.0809	0.0000	20.0809
Arbol Binomial 250 pasos	20.1091	0.0000	20.1091
Simulación Montecarlo 50.000 trials	20.1848	0.0000	20.1848
Simulación Montecarlo 100.000 trials	20.1477	0.0000	20.1477
Error Estándar Simulación	34.5823	0.0000	34.5823
Simulación Montecarlo 100.000 trials + MRV*	20.0763	0.0000	20.0763
Error Estándar Simulación (MRV)	19.8296	0.0000	19.8296
Intervalo de Confianza Inferior al 95% (MRV)	19.9533	0.0000	19.9533
Intervalo de Confianza Superior al 95% (MRV)	20.1992	0.0000	20.1992

* MRV: Método de Reducción de Varianza - Variables Antitéticas

Como se mencionó inicialmente, las opciones *Call up-out* estándar (que se desactivan *Out of the money*) no tienen valor, y por tal motivo el valor que se obtuvo para la opción *Call up-in* es el mismo que se consiguió para una opción *Call plain vanilla*. Esto confirma la existencia de la Paridad Clásica de las Barreras: la suma de la opción *Call up-out* más la *Call up-in* es igual a la opción *Call vanilla*, característica que se cumple para todos los métodos de valoración sin excepción.

⁶ Se continúa con el mismo procedimiento ya explicado para las Simulaciones Montecarlo.

Ahora bien, los resultados que se alcanzaron por las fórmulas analíticas son satisfactorios al compararlos contra las Simulaciones Montecarlo, sobretodo con el valor resultante cuando se aplica el Método de Reducción de Varianza a las simulaciones. Nótese que el error estándar de las simulaciones con MRV se reduce notablemente.

El caso de los árboles binomiales debe tratarse con especial atención. Como lo muestran las tablas 3 y 4, los resultados arrojados indican que incrementar el número de pasos no necesariamente revela convergencia a los valores obtenidos por las simulaciones o por las fórmulas analíticas. Por ejemplo, la tabla siguiente deja ver que la mejor aproximación se alcanza para 150 pasos aun cuando se corrieron árboles hasta para 250 pasos.

Tabla 4. Resultados obtenidos en la valoración de las opciones *Call up* de reversa

Call Up Reversa ($K \leq H$)			
	$K = \$ 2.345.00$ COP/USD	$S_0 = \$ 2.340.00$ COP/USD	
	$H = \$ 2.350.00$ COP/USD	$H' = \$ 2.358.71$ COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CUO_R	Opción CUI_R
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	26.8733	0.02064	26.8527
Arbol Binomial 20 pasos	26.9083	0.00000	26.9083
Arbol Binomial 50 pasos	26.9457	0.00000	26.9457
Arbol Binomial 100 pasos	26.9303	0.00000	26.9303
Arbol Binomial 150 pasos	26.9162	0.00000	26.9162
Arbol Binomial 200 pasos	26.9056	0.00407	26.9016
Arbol Binomial 250 pasos	26.8975	0.00278	26.8947
Simulación Montecarlo 50.000 trials	26.9310	0.00747	26.9235
Simulación Montecarlo 100.000 trials	26.8401	0.00719	26.8329
Error Estándar Simulación	39.6010	0.15274	39.6056
Simulación Montecarlo 100.000 trials + MRV*	26.8661	0.00724	26.8589
Error Estándar Simulación (MRV)	20.5935	0.10812	20.6026
Intervalo de Confianza Inferior al 95% (MRV)	26.7385	0.00657	26.7312
Intervalo de Confianza Superior al 95% (MRV)	26.9938	0.00791	26.9866

Los resultados de la tabla presentan un buen ajuste entre las Simulaciones Montecarlo, a las cuales se le aplicó el procedimiento de Variables Antitéticas como Método de Reducción de Varianza, y el modelo analítico. Y, aunque el valor analítico de la opción *Call up-in* generado con las simulaciones se encuentra entre el intervalo de confianza al 95%, para la opción *Call up-out* no es satisfactorio el valor encontrado. En este caso, el valor que se fijó para la barrera está muy cercano al que presenta el subyacente al momento de pactar la opción; éste está sólo \$10.00 pesos por debajo de la barrera, lo cual implica que la probabilidad de que la opción con *Knock-in* se active es muy elevada y esto mismo hace difícil conseguir una valoración más precisa de la opción con *Knock-out*.

Por otro lado, si el agente antes mencionado tiene expectativas de una tendencia a la baja en los precios del activo subyacente, podría estar interesado en pactar una opción *Call down-in*, si requiriera empezar a contar con la cobertura sólo a partir del momento en que el precio del activo subyacente toque un nivel barrera inferior al precio del activo subyacente actual. Este escenario le posibilita a él contar nuevamente con dos alternativas: pactar una opción *Call down-in* estándar, la cual se activará

out of the money, o escoger por una opción *Call down-in* de reversa donde la cobertura se le activaría *in the money*.

Tomar una posición larga en opciones *Call down-out* puede presentar ciertos beneficios. El comprador de este tipo de opciones se inclina por negociar una opción con derecho a comprar a un precio *strike* favorable para

cubrirse en caso de que el precio del activo suba, pero si el precio de éste cae, se puede comprar "barato" en el mercado *spot* y no se requeriría la cobertura, pues ésta se desactiva; al final, resulta más "barata" que una cobertura *plain vanilla*. A continuación se resumen los resultados encontrados al suponer que se han pactado opciones *Call down* estándar y de reversa.

Tabla 5. Resultados en la valoración de las opciones *Call down* estándar

Call Down Estándar ($K > H$)			
	$K = \$ 2.290,00$ COP/USD		$S_0 = \$ 2.300,00$ COP/USD
	$H = \$ 2.285,00$ COP/USD		$H' = \$ 2.276,55$ COP/USD
Método	Opción CALL	Opción CDO _E	Opción CDI _E
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	34.4937	22.05809	12.4356
Arbol Binomial 20 pasos	34.7386	25.31131	9.4273
Arbol Binomial 50 pasos	34.6175	18.60226	16.0152
Arbol Binomial 100 pasos	34.5211	19.41479	15.1063
Arbol Binomial 150 pasos	34.4709	18.58406	15.8868
Arbol Binomial 200 pasos	34.4813	18.58406	15.8973
Arbol Binomial 250 pasos	34.5018	17.07542	17.4264
Simulación Montecarlo 50.000 trials	34.4294	22.06255	12.3668
Simulación Montecarlo 100.000 trials	34.4810	22.09626	12.3848
Error Estándar Simulación	43.8592	41.86649	26.7977
Simulación Montecarlo 100.000 trials + MRV*	34.5134	22.10518	12.4082
Error Estándar Simulación (MRV)	19.4974	25.15725	16.9944
Intervalo de Confianza Inferior al 95% (MRV)	34.3926	21.94926	12.3029
Intervalo de Confianza Superior al 95% (MRV)	34.6343	22.26111	12.5136

La razón de la inestabilidad en los árboles binomiales y su convergencia lenta al valor analítico, se explica porque la barrera no siempre cruza exactamente los nodos disponibles en el árbol, sino que lo hace cada cierto número de pasos. Esto corrobora que no necesariamente el incrementar el número de pasos aumenta la convergencia entre los dos métodos. Además, cuando la barrera es fijada muy cerca del nivel inicial del activo, la convergencia disminuye a medida que el número de pasos en el árbol crece. Margrave (1989).

Tabla 6. Resultados obtenidos en la valoración de las opciones *Call down* estándar

Call Down Reversa ($K \leq H$)			
	$K = \$ 2.280,00$ COP/USD		$S_0 = \$ 2.300,00$ COP/USD
	$H = \$ 2.295,00$ COP/USD		$H' = \$ 2.286,52$ COP/USD
Método	Opción CALL	Opción CDO _R	Opción CDI _R
Black-Scholes-Merton + Ajuste Derman y otros.	40.6520	16.30299	24.3490

Arbol Binomial 20 pasos	40.8725	17.39139	23.4811
Arbol Binomial 50 pasos	40.6035	11.73210	28.8714
Arbol Binomial 100 pasos	40.7100	8.56199	32.1480
Arbol Binomial 150 pasos	40.6449	7.08783	33.5570
Arbol Binomial 200 pasos	40.6553	11.72906	28.9263
Arbol Binomial 250 pasos	40.6743	10.61214	30.0622
Simulación Montecarlo 50.000 trials	40.5700	17.20347	23.3665
Simulación Montecarlo 100.000 trials	40.6274	17.20146	23.4259
Error Estándar Simulación	46.9469	40.78919	36.6900
Simulación Montecarlo 100.000 trials + MRV*	40.6570	17.26328	23.3938
Error Estándar Simulación (MRV)	18.4191	26.25038	21.0771
Intervalo de Confianza Inferior al 95% (MRV)	40.5429	17.10058	23.2631
Intervalo de Confianza Superior al 95% (MRV)	40.7712	17.42598	23.5244

Por último, se puede concluir con respecto a los resultados encontrados con las Simulaciones Montecarlo con y sin el Método de Corrección de Varianza, que son satisfactorios para las opciones estándar *Call down in* y *out* sin importar si el precio inicial del activo subyacente (S_0) se encuentra cerca o lejos de la barrera. Desafortunadamente, el ajuste para los dos casos de las opciones de reversa presentadas *Call up* y *Call down* tanto *in* como *out*, no es satisfactorio si la barrera está fijada “muy” cerca al nivel inicial del activo subyacente.

Con el fin de establecer en forma más concreta el verdadero impacto de la cercanía de la barrera al nivel inicial del precio del activo subyacente, y la cercanía de la barrera al precio *strike* pactado, se realizó el siguiente análisis de sensibilidad a diferentes niveles de barrera y de *strike* para las opciones *Call down*.

Ante un precio inicial del activo subyacente de \$2.300.00, se establecieron barreras de \$10, \$30, \$50, \$100 y \$150 por debajo. Para cada caso se fijó un precio *strike* según el tipo de opción, estándar o de reversa, de \$5 por arriba o por debajo de la barrera, respectivamente. Los resultados que arrojó tal procedimiento indican que a medida que son más cercanos el precio del activo y la barrera, la diferencia entre las valoraciones por simulaciones Montecarlo

y por formulación analítica es mayor, pero a medida que estos no se pactan tan cercanos, las simulaciones tienden a converger a la formulación analítica.

Por lo demás, se realizó un análisis de sensibilidad a diferentes niveles de precios *strike*, para una opción *Call down* pactada a un nivel inicial del activo subyacente de \$2.300,00 con una barrera de \$10.00 por debajo que ajustada es igual a \$2.281,54. Se simularon cinco *strikes* diferentes a \$5, \$10, \$20, \$40 y \$90 pesos por encima de la barrera para las opciones tipo estándar; para ellas se obtuvo que la convergencia entre las simulaciones y la formulación analítica tendió a aumentar a medida que se alejaba el *strike* de la barrera, es decir, a medida que la opción se activaba o se desactivaba más *out of the money*. Para las opciones de reversa se pactaron cinco *strikes* diferentes a \$10, \$15, \$25, \$45 y \$90⁷ por debajo de la barrera; para éstas se validó que la convergencia entre las simulaciones y la formulación analítica tiende a disminuir a medida que la opción tiende a activarse o desactivarse más *in the money*.

⁷ Se tomaron valores diferentes a los utilizados para la simulación de las opciones tipo estándar (\$5, \$10, \$20, \$40 y \$90), porque el ajuste a la barrera para la formulación analítica de las opciones *down* que se presentaron requiere que para cumplirse la condición necesaria para las opciones de reversa ($K \leq H$), el *strike* debe estar por debajo de la barrera sin ajuste, más de \$8.00.

Resumiendo, las opciones *Call*, tanto estándar como de reversa, mostraron una desviación menor al 0,5% entre las simulaciones Montecarlo y la formulación analítica cuando la barrera se ubica a más de \$10.00 del *spot*. Lo anterior aplica cuando la barrera no se encuentra más allá del 0,43% del *strike*.

2.2 Medición de riesgos

El *delta* de una opción es la tasa de cambio del precio de la opción con respecto a cambios en el precio del activo subyacente. Esta fue simulada para las opciones *Call down* incrementando la tasa de cambio de un peso.

Como se puede observar en la tabla 7, al comparar los resultados arrojados por las simulaciones con los obtenidos por la formulación analítica, se presenta un mejor ajuste para las opciones estándar que para las de reversa, aunque en este ejercicio la barrera fue determinada cerca al nivel del activo. Ya se indicó en la pasada sección que esta cercanía implica diferencias entre los resultados de la simulación y los de la formulación analítica. Se consideraron cambios de \$1.00 en la tasa de cambio para el cálculo de *delta*, debido a que estos presentaron el mejor ajuste, comparados con los resultados producidos por las simulaciones con incrementos inferiores (10 y 50 centavos de peso).

Tabla 7. Resultados obtenidos al simular el delta de las opciones *Call down*

Call Down Estándar (K > H)		K = \$ 2.305,00 COP/USD		H = \$ 2.280,00 COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CDO _E	Opción CDI _E		
Valoración - Simulaciones Montecarlo + MRV	26.39773	19.91790	6.47984		
Formulación Analítica	26.37153	19.90230	6.46923		
• (Delta) Simulaciones Montecarlo + MRV	0.49596	0.69063	-0.19467		
• (Delta) Formulación Analítica	0.50871	0.70394	-0.19503		
Call Down de Reversa (K <= H)		K = \$ 2.250,00 COP/USD		H = \$ 2.260,00 COP/USD	
Método	Opción CALL	Opción CDO _R	Opción CDI _R		
Valoración - Simulaciones Montecarlo + MRV	62.37403	53.35906	9.01497		
Formulación Analítica	62.37900	53.38345	8.99554		
• (Delta) Simulaciones Montecarlo + MRV	0.84028	1.07878	-0.23849		
• (Delta) Formulación Analítica	0.80666	1.05605	-0.24940		

A continuación se revisan los resultados de las simulaciones para las otras letras griegas, *Gamma*, *Vega* y *Theta*.

La griega *Gamma* indica qué tan sensible se torna *delta* ante variaciones en los precios del activo subyacente. Por tratarse de opciones tipo barrera, las cuales son muy sensibles a los cambios del *spot*, se puede esperar que *gamma* tome valores relativamente altos comparados con los de las opciones *plain vanilla*. Para la estimación de *gamma*, se generaron 10 simulaciones, con 100.000 iteraciones cada una, para hallar un δ_1 y 10 simulaciones, con 100.000 iteraciones cada una, para hallar un δ_2 , considerando variaciones en el *spot* de \$1.00. Como ya se demostró, para esta magnitud se obtuvieron los mejores ajustes para *delta*. Se nota, pues, que δ_1 es el resultado de obtener la variación en el precio de la opción cuando el *spot* pasa de S_0 a S_{0+1} , mientras que δ_2 surge cuando se consigue la variación en el precio de la opción al pasar el *spot* de S_{0+1} a S_{0+2} .

Los resultados para *gamma* se pueden observar en la tabla 8. En ella se muestra que la convergencia de las simulaciones a la formulación analítica no es satisfactoria y no se obtienen los signos esperados acordes con la formulación.

Tabla 8. Gamma. Simulaciones y Formulación Analítica de la Griega Gamma para las opciones *Call down* estándar y de reversa

	Call Down Estándar (K > H)			Call Down Reverse (K <= H)		
	K = \$ 2.305.000 COP/USD			K = \$ 2.250.000 COP/USD		
	H = \$ 2.280.000 COP/USD			H = \$ 2.260.000 COP/USD		
	CALL	CDO _E	CDI _E	CALL	CDO _R	CDI _R
Valoración						
Simulaciones Montecarlo + MRV	26.3977	19.9179	6.4798	62.3740	53.3591	9.0150
Formulación Analítica	26.3715	19.9023	6.4692	62.3790	53.3835	8.9955
Gamma						
Simulaciones Montecarlo + MRV	-0.0324	-0.0522	0.0197	0.0174	0.0314	-0.0140
Formulación Analítica	0.0061	0.0032	0.0049	0.0041	-0.0015	0.0056

Por su parte, la letra griega *Vega* representa la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en la volatilidad del activo subyacente. Para esta estimación se realizaron incrementos en la volatilidad del activo en 20pb, 50pb y 100pb, y se obtuvieron los resultados que aparecen en la tabla 9. Las diferencias son absolutas.

Con el cálculo de *vega* se esperan resultados que evidencien que las opciones tipo barrera

son muy sensibles a cambios en la volatilidad del subyacente, porque incrementos en ésta hacen más probable que se active el *knock-in* o el *knock-out*. De la observación de estos datos se puede inferir que para las opciones barreras los resultados más ajustados se presentaron al simular incrementos en la volatilidad del activo en 20pb, lo que indica, efectivamente, que la opción se torna más valiosa ante cambios en la volatilidad del subyacente.

Tabla 9. Vega. Simulaciones y Formulación Analítica de la Griega Vega para las opciones *Call down* estándar y de reversa

	Call Down Estándar (K > H)			Call Down Reverse (K <= H)		
	K = \$ 2.305.000 COP/USD			K = \$ 2.250.000 COP/USD		
	H = \$ 2.280.000 COP/USD			H = \$ 2.260.000 COP/USD		
	CALL	CDO _E	CDI _E	CALL	CDO _R	CDI _R
Vega						
Formulación Analítica	2.5745	0.7665	1.8080	1.7538	-0.2935	2.1073
Vega (100 pb)						
Simulaciones Montecarlo + MRV	2.5618	1.0963	1.4655	1.8112	0.1535	1.6578
Diferencia	0.0126	0.3298	0.3425	0.0575	0.4469	0.4496
Vega (50 pb)						
Simulaciones Montecarlo + MRV	2.6479	1.1619	1.4861	1.7744	0.0390	1.7354
Diferencia	0.0735	0.3954	0.3219	0.0207	0.3324	0.3719
Vega (20 pb)						
Simulaciones Montecarlo + MRV	2.5891	1.0907	1.4984	1.7193	-0.0089	1.7283
Diferencia	0.0146	0.3242	0.3096	0.0344	0.2845	0.3791

Finalmente, *theta* indica el impacto del paso del tiempo en el precio de la opción. Para estimar *tetha* se realizaron 10 simulaciones, con 100.000 iteraciones cada una, a un vencimiento de 20 días y 10 simulaciones, con 100.000 iteraciones cada una, a un vencimiento de 19 días.

Tabla 10. Theta y su validación con la valoración de las opciones

Método	Call Down Estándar ($K > H$)			Call Down Reverse ($K \leq H$)		
	CALL	CDO _E	CDI _E	CALL	CDO _R	CDI _R
Valoración t=20						
Simulaciones Montecarlo + MRV	26.398	19.918	6.480	62.374	53.359	9.015
Formulación Analítica	26.372	19.902	6.469	62.379	53.383	8.996
Theta t=20						
Simulaciones Montecarlo + MRV	-0.552	-0.290	-0.262	-0.453	-0.165	-0.288
Formulación Analítica	-0.544	-0.226	-0.320	-0.453	-0.092	-0.362
t = 19 días al vencimiento						
Valoración con Theta por Simulación Montecarlo + MRV	25.845	19.628	6.218	61.921	53.194	8.727
Valoración con Theta por la Formulación Analítica	25.827	19.676	6.149	61.926	53.291	8.634
Formulación Analítica (t=19)	25.575	19.491	6.084	61.719	53.148	8.571

Los anteriores resultados muestran que a medida que disminuye el tiempo al vencimiento, menor es el precio de las opciones tipo barrera presentadas, tal como ocurre en las opciones *plain vanilla* europeas.

Conclusiones

Los ejercicios expuestos en este documento corroboran que las simulaciones Montecarlo, como metodología utilizada para la valoración y medición de los riesgos de opciones que dependen de la ruta seguida por los precios del activo subyacente durante su vida útil, convergen satisfactoriamente a la formulación analítica cuando ésta es ajustada a la discretización en la observación de los precios del activo subyacente para la valoración y el cálculo de las coberturas de las opciones tipo barrera. Los resultados más ajustados se obtienen cuando se aplica el Método de Control de Varianza de Variables Antitéticas a las simulaciones Montecarlo.

La metodología de árboles binomiales señala cierta inestabilidad, sobre todo en los casos en que la barrera se fija muy cerca del nivel inicial del precio del activo subyacente. Este comportamiento también se evidenció para las simulaciones Montecarlo, donde la cer-

canía de la barrera al precio inicial del activo implica una mayor diferencia entre los resultados arrojados por las simulaciones y la formulación analítica. Se validó también que la ubicación de la barrera y su cercanía al precio *strike* explica las diferencias arrojadas por las dos metodologías. Para las opciones tipo estándar, la convergencia entre las simulaciones y la formulación analítica tendió a disminuir a medida que se alejaba el precio *strike* de la barrera, es decir, en cuanto la opción se activaba o se desactivaba más *out of the money*. Y para las opciones de reversa se admitió que la convergencia entre las simulaciones y la formulación analítica tendió a disminuir en tanto se activara o desactivara la opción más *in the money*, es decir, entre menor es el precio del *strike* pactado en comparación con la barrera fijada.

Los resultados producidos por las simulaciones para la estimación del *delta* son satisfactorios y convergen a la formulación analítica. Pero para las letras griegas *Gamma* y *Theta* las simulaciones no presentaron resultados satisfactorios.

En el caso de *Vega*, las simulaciones presentaron resultados ajustados y se ve que convergen a la formulación analítica.

Bibliografía

- Andersen, L. Andreasen, J. & Eliezer, D. (2002). "Static replication of barrier options: some general results", *Journal of Computational Finance*, 5. Londres, pp.1-25
- Boyle, P. P. & S. H. Lau. (1994). "Bumping up against the barrier with the binomial method", *Journal of Derivates*, 1(4). New York, pp.6-14
- Boyle, P.(1986).** "Option Valuation Using a Three-Jump Process", *International Options Journal*, 3. New York, p.p. 7-12.
- Brennan M. J. & E. S. Schwartz. (1978). "Finite difference approximation of valuation of options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13. Washington, pp.461-474
- Broadie, M.; Glasserman, P. & Kou, S. G. (1997). "A continuity correction for discrete barrier options", *Journal of Mathematical Finance*, 7. Maryland, pp.325-349.
- Cheng, K. (2003). "An overview of barrier options", *Global Derivates Working Papers*, <http://www.global-derivatives.com> (febrero 03 de 2008)
- Cox, J. C.; Ross, S. A. & Rubinstein, M. (1979). "Option pricing: a simplified approach", *Journal of Financial Economics*, 7. Amsterdam , pp.229-263
- Derman, E.; Ergener, D. & Kani, I. (1995a). "Static options replications", *Journal of Derivatives*, 2(4). New York, pp.78-95.
- Derman, E.; Ergener, D.; Bardhan, I. & Kani, I. (1995b). "Enhanced numerical methods for options with barriers", *Financial Analysts Journal*, 51(6). New York, pp.65-74.
- Figlewski, S. & B. Gao. (1999). "The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing", *Journal of Financial Economics*, 53. New York, pp. 313-351.
- Glasserman, P. (2004). *Montecarlo methods in financial engineering*. (1a ed.). New York: Springer-Verlag New York, Inc. 618p.
- Hull, J. C. (2006). *Options, futures, and other derivatives*. (6a ed.). New Jersey: Pearson Prentice Hall. 789p.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1). Santa Mónica, pp. 141-183.
- Reiner, E. & Rubinstein, M. (1991) "Braking down the barriers", *Risk Magazine*, 4(8). pp. 28-35.
- Ritchken, P. (1995). "On pricing barrier options". *The Journal of Derivatives*, 3. New York, pp.19-28.
- Rubinstein, M. (2000). "On the relation of binomial and trinomial option pricing models", *Journal of Derivatives*, New York, pp.6-14.
- Sbuelz, A. (1998). "A general treatment of barrier options". Working Paper, University of Verona, Verona.
- Taleb, N. (1997). *Dynamic hedging managing vanilla and exotic options*. (1a ed.). New York: John Wiley & Sons, 528p.