Simulación financiera aplicada a la valoración del riesgo de crédito con el modelo de opciones

Gabriel I. Torres Avendaño[1]
gtorres@eafit.edu.co

Juan P. Durán Ortiz[2]
jduranor@eafit.edu.co

Recepción: 07 de septiembre de 2006 *Aceptación: 14 de noviembre de 2006*

Resumen

El presente documento muestra cómo la simulación financiera puede ser una buena alternativa para valorar el riesgo de contraparte de una opción real con el Modelo de Merton, en contraposición del modelo de Black-Scholes introducido por Hull, Nelken y White en el año 2004 para el mismo caso de estudio.

Para tal fin, se revisan los conceptos básicos de opción financiera, se presenta el modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones europeas sobre acciones haciendo especial énfasis en los supuestos y las limitaciones que implica éste para el caso colombiano; se introduce la analogía entre opciones reales y opciones financieras, que permite medir el riesgo de crédito en las oportunidades de inversión; se explica el modelo de Merton y, por último, se propone la simulación financiera como una metodología más general y potente para cuantificar el riesgo crediticio con el modelo de opciones, haciendo a su vez una aplicación sobre un proyecto de Inversión en "*Crystal Ball*".

Palabras clave: Riesgo, simulación, Merton, opciones, crédito.

[1] Ingeniero Industrial. Profesor e investigador del departamento de Finanzas, Escuela de Administración. Universidad EAFIT. Medellín. Colombia.
[2] Economista. Asistente de investigación del departamento de Finanzas, Escuela de Administración. Universidad EAFIT. Medellín. Colombia.

Abstract

This paper presents financial simulation as the best alternative for valuating credit risk with the Merton Model on a real option. We propose this in contrast to the Black and Scholes model introduced by Hull, Nelken and White in 2004 for the same case study.

To demonstrate this, we begin by reviewing the basic concepts of a financial option. Then we present the Black-Scholes model for the valuation of European options with special emphasis on the assumptions and the limitations that this possibility implies. We introduce the analogy between real options and financial options that allows the measurement of credit risk on investment opportunities. We explain the Merton model, and finally, we propose financial simulation as a general and powerful methodology to quantify credit risk in the Merton model, including an application on an investment project with *"Crystal Ball"*.

Key Words: Credit risk, Merton model, Financial simulation, Real options.

Introducción

El riesgo de crédito es la distribución de las pérdidas financieras debido a los cambios no esperados en la calidad crediticia de la contraparte en un contrato financiero. En los últimos años se han desarrollado nuevos métodos y modelos para cuantificarlo, con diferencias significativas entre ellos aunque comparables. En este estudio se presenta una aplicación de la metodología de opciones en la valoración del riesgo de crédito utilizando la simulación de Montecarlo. Para ello, se ha tomado como punto de partida el modelo de Merton (1974), en el cual se considera que los accionistas son propietarios de una opción de compra sobre los activos de una empresa. Se pretende demostrar que, a diferencia de la fórmula clásica de Black y Scholes, desarrollada para opciones financieras en mercados dinámicos y eficientes, la metodología de simulación financiera es ideal para valorar el riesgo de crédito en el contexto colombiano.

Este artículo comienza con una revisión de los conceptos básicos de opción financiera. A continuación se presenta el modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones europeas sobre acciones, haciendo especial énfasis en los supuestos que implica dicho modelo. En la tercera parte se introduce la analogía entre opciones reales y opciones financieras lo cual permite medir el riesgo de crédito en las oportunidades de inversión. En la cuarta parte se explica el concepto de riesgo de crédito y se hace un breve recuento de las diferentes metodologías para su valoración, en especial, enfocando en el modelo de opciones y cómo puede entenderse mediante una analogía para la opción financiera. Sin embargo, como se explica en la quinta parte, la analogía entre estos dos entes, debido a los supuestos tan restrictivos del modelo de Black-Scholes, lleva a los autores de este trabajo a proponer la simulación financiera como una metodología más general y potente para cuantificar el riesgo crediticio.

Por último, y una vez establecido el marco conceptual del caso, se exponen los requisitos generales de un modelo de valoración de empresas en condiciones de incertidumbre. Partiendo de la información básica de inversión, ingresos, costos y gastos, se construyen los flujos de caja que permiten estimar el valor de un proyecto con el cual, y utilizando el método de simulación de Montecarlo, se establece la distribución de probabilidades del mismo.

La simulación financiera aplicada al modelo de opciones, que se presenta en este documento, es una metodología general más aplicable al mercado colombiano, dadas las características del mismo con respecto a su eficiencia y liquidez. Por otro lado, a diferencia del modelo de Black-Scholes, es aplicable a cualquier empresa, sin necesidad de que esta cotice en bolsa, esto es especialmente importante si se tiene en cuenta el gran porcentaje de pequeñas y medianas empresas que existen no sólo en Colombia, sino en general en los países en vía de desarrollo. Además, es fácilmente aplicable debido a que utiliza la simulación Montecarlo como herramienta básica para el análisis, la cual está al alcance de la gran mayoría de analistas en el sector financiero.

1. Generalidades de opciones financieras

Una opción financiera es un derecho a comprar o vender un activo a un precio fijado en una fecha futura. El tipo de derecho hará que se le denomine opción de compra (call option) u opción de venta (put option). Si el derecho sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento del contrato, se le llamará opción europea. Si es ejecutable en cualquier momento desde el instante de la venta de la opción hasta la fecha de vencimiento, se le denominará opción americana. El activo sobre el cual se tiene el derecho de la opción se denomina "subyacente". Los subyacentes de las opciones abarcan una amplia diversidad, que incluye acciones, tipos de cambio, índices de mercados accionarios, tasas de interés de referencia y diversos tipos de contratos de futuros.

Las opciones financieras son fundamentalmente diferentes de los contratos a futuros (forwards), de los contratos de futuros y de los *swaps*, aunque todos ellos se encuentran en la categoría de instrumentos financieros derivados. La opción le otorga a su tenedor el derecho, más no la obligación, a comprar o vender el activo subyacente, el cual ejercerá o no dependiendo de su conveniencia. En contraste, los contratos a futuros, de futuros y los *swaps*, comprometen a las dos partes a realizar una determinada transacción en un cierto plazo.

Las opciones pueden tener su origen bien sea en una Bolsa especializada en ellas, o en un mercado al mostrador (over the counter). Las opciones que se cotizan en las Bolsas especializadas son estandarizadas en cuanto al subyacente, las fechas de vencimiento, los precios de ejercicio, entre otros. No sucede así con las opciones del mercado al mostrador, las cuales son emitidas por entidades bancarias, y pueden ser diseñadas para las necesidades específicas del comprador de la opción o del banco, es decir, son opciones hechas a la medida. En Colombia no existe una bolsa de opciones desarrollada, pero sí se encuentran algunos ejemplos de opciones hechas a la medida. Un ejemplo de éstas son las opciones de venta de la tasa de cambio peso / dólar vendidas por el banco de la República, como un instrumento de política cambiaria.

Dado que el eje central del presente trabajo son las opciones reales, es conveniente enfocarse en el modelo de opción financiera que más se asemeja a las opciones reales: la opción de compra europea de una acción que no paga dividendos. Para este tipo de acción se definen sus términos básicos:

S: Es el precio actual del activo subyacente

X: Es el precio de ejercicio: valor al cual se compraría el activo en el vencimiento.

T: Es el plazo hasta el vencimiento de la opción c: Es el precio de mercado de la opción

S_T : Es el precio del subyacente en el momento del ejercicio de la opción

En el momento T de ejercicio, el tenedor de la opción decidirá ejercerla o no dependiendo del precio S_T al cual el subyacente esté cotizado en el mercado en ese momento. Si está cotizado a un precio S_T menor o igual al precio de ejercicio X, naturalmente al tenedor le resultaría preferible comprar el activo en el mercado, y no ejercería su opción. En esta situación se dice que la opción está *fuera del dinero* (out of the money). En dicho caso se dirá que la Utilidad de la opción (Pay-off) es cero.

Utilidad = 0 si $S_T < X$
La opción no tiene valor puesto que la acción vale menos que el precio asegurado en el derecho de compra

Si por el contrario, el activo está cotizado a un precio S_T mayor al precio de ejercicio X, el tenedor obtendrá como utilidad la diferencia entre el precio de mercado S_T y el precio de ejercicio X, y se dirá que la opción está *en el dinero* ("in the money"). Nótese que la utilidad a que se hace referencia no incluye ni tiene porqué incluir el valor (c) que se hubiera pagado por la opción, que después de todo resulta ser un costo extinguido para ese momento.

Utilidad = S_T - X si $S_T > X$
La opción tiene valor puesto que la acción vale más que el precio asegurado en el derecho de compra

Se puede entonces expresar la utilidad en una fórmula general que incluye las dos posibilidades mencionadas:

$$Utilidad = Max\ [0, Sr - X] \qquad [1]$$

Ahora bien, en equilibrio, el precio de mercado de una opción debe coincidir en el largo plazo con su precio justo. El precio justo de una opción, así como el de cualquier activo financiero, es el valor presente de sus flujos de caja futuros, descontados a una tasa adecuada:

$$c = Max\left[0, E\left((S_T - X)e^{RT}\right)\right] \qquad [2]$$

Donde R sería la tasa de descuento adecuada expresada como interés continuo.

De esta manera, el precio de la opción (c) depende de la evolución esperada del precio S_T del subyacente. En el momento de compra de la opción, el precio del subyacente (S) es conocido, pero su precio futuro (S_T) es una variable aleatoria, cuyo comportamiento puede representarse con una distribución de probabilidad, como consecuencia, el precio de mercado de la opción (c) también es una variable aleatoria.

2. Valoración de opciones europeas según el modelo de black-scholes

El modelo clásico de valoración de opciones financieras lo desarrollaron Black & Scholes (1973) y Merton (1974). Este modelo parte de los siguientes supuestos:

- **Supuesto 1.** La opción sólo puede ejercerse en el momento (T_1) de vencimiento. Es decir el modelo sólo es válido para una opción europea.
- **Supuesto 2**. El precio de ejercicio de la acción (X) es fijo, y es determinado desde el comienzo.
- **Supuesto 3.** Los rendimientos continuos del activo se comportan según un proceso de Wiener, con una distribución normal con media (μ) y desviación estándar (σ). Así, el rendimiento instantáneo del activo estará dado por la siguiente expresión:

$$R = \mu * \partial t + N(0,1) * \sigma * \sqrt{\partial t}$$

Donde *dt* es un intervalo pequeño de tiempo, y N(0,1) es una variable aleatoria, según una distribución normal estandarizada. Como consecuencia, el precio del subyacente en el momento T (S_T), se comporta según una distribución Log-normal cuyo valor esperado y varianza son:

$$E(S_T) = S_0 e^{RT}$$
$$Var(S_T) = S_0^T S e^{2RT}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$$

La variable S_T puede modelarse según la siguiente ecuación, y partiendo de una variable aleatoria normal estandarizada:

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma 2}{2}\right) * T} + Normal(0,1) * \sqrt{T} \qquad [3]$$

Existen otros supuestos de carácter técnico, que no serán profundizados en este documento, tales como, que se pueda vender en corto plazo el activo subyacente, que no existan costos de transacción ni de impuestos, que los activos sean infinitamente divisibles y que no existan oportunidades de arbitraje sin riesgo para el activo, entre otros.

En el planteamiento de la ecuación diferencial que permite encontrar el precio de la opción europea, los investigadores concluyeron que este precio debe determinarse en lo que denominaron un *mundo indiferente al riesgo*. En este escenario idealizado, todos los individuos son indiferentes al riesgo, y por ende no requieren compensación por asumirlo. Esto trae como consecuencia que la tasa a la cual se descuenta la utilidad de la opción, en la ecuación [2] deba ser la tasa libre de riesgo, y además implica que el precio de la opción no depende de μ, sino que μ se reemplaza por la tasa libre de riesgo (R) en la función de la distribución de probabilidad del precio [3].

El "mundo indiferente al riesgo" como escenario en el cual se plantea el Modelo Black-Scholes, aunque parezca contrario a la intuición, está sustentado en el hecho de que a cada momento puede conformarse una cartera dinámica con el activo libre de riesgo y el activo subyacente que reproduzca los cambios que tiene el valor de la opción. A esta cartera se le denomina el portafolio replicativo, y aunque debe rebalancearse permanentemente, permite cubrir por completo las variaciones en el precio de la opción. Lo anterior, naturalmente, presupone la existencia de un mercado eficiente en el cual se cotice continuamente el activo subyacente.

Las relaciones entre las variaciones en el precio de la opción, con las variaciones en el precio del subyacente, y que incorporan todos los supuestos anteriores, se expresan en la forma de una ecuación diferencial parcial de tipo estocástico. Después de resolver dicha ecuación, la fórmula encontrada por Black y Scholes para el precio de la opción de compra de una acción que no paga dividendos, es la siguiente:

$$c = S_0 * N(d_1) - Xe^{RT} * N(d_2) \qquad [4]$$

Donde:

$$d_1 = \left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma * \sqrt{T}}\right]$$

$$d2 = \left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma * \sqrt{T}}\right]$$

Y N(x) es la distribución acumulada para una variable normal estándar.

3. Fundamentos de opciones reales

En un sentido original, la metodología de las opciones reales representa la extensión de la teoría de opciones financieras a los activos reales en general, y, en particular, a los proyectos de inversión. Esta metodología pretende valorar las opciones estratégicas involucradas en los proyectos, activos, unidades de negocio y empresas. Uno de los ejemplos clásicos de la opción real es el de una empresa manufacturera que opera en el presente a un volumen de producción determinado por la situación del mercado. Sin embargo, la empresa está en condiciones de expandir su capacidad productiva realizando una inversión adicional en bienes de capital y capital de trabajo, siempre y cuando las condiciones del mercado indiquen que existe demanda para la producción adicional. Se dice, entonces, que esta empresa tiene una opción real para expandirse.

Desde el enfoque tradicional de valoración de negocios, es claro que el valor de la empresa estará en función del flujo de caja generado por el volumen de producción actual. Sin embargo, cuando se incorpora el enfoque de opción real, resulta natural incluir en el valor de la empresa el valor potencial generado por la posibilidad de expandirse. En el caso del modelo de Merton, la metodología que permite estimar los valores de las opciones reales incorporados en una empresa, proyecto o línea de negocios se encuentra al realizar un paralelo entre las opciones financieras y las opciones reales.]

La posibilidad de realizar un proyecto dentro de una línea de negocios establecida (core business) se asemeja de esta forma a la opción de compra de una acción. Ambas implican el derecho, pero no la obligación, de adquirir un activo pagando una cierta suma de dinero en un momento determinado. Es conveniente enfatizar el paralelo entre las variables de las opciones reales y las financieras como se muestra en el Cuadro 1.

Es fácil concluir que la ecuación [1] se convierte, para el caso de las opciones reales, en:

$$VPN = Max\ \left[0, VP - I\right] \qquad [5]$$

La decisión de invertir o no en el proyecto opcional es análoga a la decisión de ejercer o no la opción financiera: se invierte siempre y cuando el VPN (Utilidad) sea mayor que cero o, lo que es lo mismo, siempre y cuando $VP_T >$ I ($S_T >$ X).

De manera similar, adaptando la ecuación [2] al caso de la opción real y empleando un interés compuesto (R), se tiene la expresión del valor de la opción real, como el valor esperado de la utilidad del proyecto descontada a presente.

$$c = Max\left[0, E\left(\frac{(VP_T - I)}{(1+R)^T}\right)\right] \qquad [6]$$

De esta manera, las opciones reales podrían valorarse de manera similar a la valoración de opciones financieras. De hecho, algunos autores proponen emplear la fórmula de Black y Scholes [4] para valoración de opciones de expansión o de compra. Sin embargo, en opinión del autor de este estudio, la valoración de opciones reales con la fórmula de Black y Scholes implica aceptar todo el conjunto de suposiciones que sustentan el modelo, varias de las cuales no son ni fácilmente estimables, ni siempre válidas en la evaluación de opciones reales en un contexto como el colombiano, como se discute más adelante.

Para los propósitos de este documento resulta pertinente el caso particular de la opción real de expansión; sin embargo, el enfoque de opciones reales también permite valorar una amplia variedad de posibilidades de inversión, tanto aquellas implícitas en la línea de negocio principal de la compañía, como las que la empresa puede adquirir. Así, por ejemplo, el enfoque de opciones reales permite valorar la

Cuadro 1
Comparación de variables entre opciones *call* de una acción, con una opción real sobre un proyecto de inversión

Variables en la Opción de compra de una acción	Simbología	Variables en la opción real sobre un proyecto de inversión
Precio de ejercicio	X I	Inversión requerida por el proyecto opcional
Precio actual de la acción	S VP	Valor presente de los flujos de caja generado por el proyecto opcional en el momento actual
Tiempo al ejercicio	T	Longitud del tiempo que se puede demorar la decisión de inversión
Volatilidad del precio de la acción	σ	Volatilidad del valor presente del proyecto opcional
Tasa libre de riesgo	R	Tasa de descuento de la opción
Precio de la acción en el momento del ejercicio (*variable aleatoria*)	S_T VP_T	Valor presente del proyecto opcional en el momento T
Utilidad ("Pay-off") (*variable aleatoria*)	Utilidad VPN	Valor presente neto del proyecto opcional en el momento T
Valor de la opción	C	Valor de la opción real

posibilidad de postergar una inversión o la posibilidad de liquidar un negocio. También permite cuantificar el valor de invertir en investigación y desarrollo que pueden eventualmente llevar a la generación de nuevos productos o servicios, o el valor que tiene la flexibilidad de escoger entre dos proveedores o fuentes de materias primas.

4. Modelos más usuales para estimar el riesgo de crédito

La medición del riesgo de crédito siempre ha sido un tema importante para los bancos y demás instituciones financieras, sin embargo, ahora más que nunca están dedicando recursos en esta tarea; debido a que, bajo los propósitos de Basilea II, el capital regulatorio y las provisiones pueden estar determinados por las instituciones financieras a través de modelos internos que permiten establecer la probabilidad de impago (default) de la contraparte (Basel Committee, 2005).

Los modelos de riesgo de crédito intentan estimar, para un portafolio de créditos, la pérdida en un horizonte de tiempo para un nivel de confiabilidad determinado, en otras palabras el *VeR del portafolio*. Los modelos se establecen para estimar la pérdida cuando se llega al *default* (Modelos de default) o como resultado del cambio en el valor económico de los préstamos debido al deterioro del crédito (modelos mark-to-market). Un buen número de modelos se desarrollaron en la década de los noventa, algunos de ellos propios de las instituciones financieras, otros para ser comercializados con terceras partes. Los modelos más usuales los se pueden dividir en cuatro categorías:

- Basados en *Ratings*
- Macroeconómicos

- Actuariales
- Basados en Merton

Para efectos del presente análisis, el enfoque central será en el modelo de Merton (1974), a partir del estudio de Hull, Nelken y White (2004).

4.1 Modelos basados en *Rating*

Una de las organizaciones que más ha trabajado en esta metodología es "Credit metrics Group". Credit Metrics asume que los cambios en una variable latente que dirige la calidad del crédito se distribuyen normalmente. La probabilidad de que un acreedor disminuya la calidad de su crédito en un horizonte de tiempo (llegando incluso al *default*) se puede expresar como la probabilidad de que una variable normal estándar caiga entre varios valores críticos. Esas probabilidades se calculan utilizando los *rating* actuales de los acreedores y la información histórica de la migración del *rating* de los créditos. Esta información se presenta en forma de matrices de probabilidad de que un acreedor con un determinado *rating* emigre a otra categoría en un año. Por ejemplo, un crédito pueda pasar de AAA a AA a BBB a BB o a C. La probabilidad más alta es la más cercana a la calificación actual. El modelo calcula el riego del portafolio con base al riesgo individual de cada crédito y a las correlaciones de cada uno con los demás *rating* (Morgan, 1997).

4.2 Modelos macroeconómicos

El modelo más utilizado es el *CreditPortfolioView* que mide el riesgo por incumplimiento de pago. La metodología busca establecer relaciones entre las probabilidades de ocurrencia para cualquier período de tiempo y según el entorno macroeconómico; utiliza la simulación de Montecarlo para estimar la distribución conjunta de las probabilidades de incumplimiento de pago para los créditos individuales como consecuencia de los diferentes factores macroeconómicos, tales como la tasa de desempleo, el crecimiento del PIB, el nivel de las tasa de interés de largo plazo, tasas de cambio, gasto público y la tasa de ahorro a nivel nacional. Se considera que las correlaciones entre las tasas de incumplimiento y sus diferentes causantes aumentan como respuesta a la estructura de covarianzas de las variables macroeconómicas (Wilson, 1998).

4.3 Modelos actuariales

El modelo *Credit Risk*$^+$ estima la distribución de pérdidas utilizando técnicas estadísticas desarrolladas para el sector asegurador en el que sólo se tiene en cuenta el riesgo de incumplimiento de pago. En vez de buscar relaciones con la estructura de la entidad, el modelo le asigna una industria o sector a cada deudor; cada industria cuenta con su propia tasa de incumplimiento y una volatilidad correspondiente a dicha tasa. Se asume que el incumplimiento para los créditos individuales presenta una distribución de Poisson. Aunque no se modele el riesgo de migración del crédito, el *Credit Risk*$^+$ asume que la tasa de incumplimiento es una medida estocástica. Este supuesto genera una distribución sesgada para los eventos que es tomada en cuenta (parcialmente) para el riesgo de migración (Credit Suisse, 1997).

4.4 El Modelo de Merton

El modelo de Merton (1974) y Black & Scholes (1973) es una aplicación del modelo de opciones financieras planteado anteriormente y determina el riesgo de crédito basado en la estructura de capital de las empresas. Establece como, en un mundo simple, una empresa en el tiempo T_0 posee un activo de valor A_0 que obedece a una distribución Log-normal con desviación estándar constante y dos clases de obligaciones, una con sus acreedores y otra con sus accionistas. Por un lado, las obligaciones con los acreedores (a través del Pasivo) están conformadas por bonos de descuento puro con un valor (D) redimible al vencimiento (T). Las obligaciones con los accionistas (a través del Patrimonio), por el otro lado, están formadas por acciones que no pagan dividendos.

Si en el tiempo T el valor de los activos (A_T) excede el valor de la deuda (D), es decir (A_T> D), los acreedores recibirán el valor del pasivo D y los accionistas el valor residual del activo (A_T – D). Ahora bien, si el valor del activo (A_T) es inferior al valor de la deuda (D), (A_T< D), los acreedores recibirán el valor del activo A_T y perderán la diferencia (D – A_T), los accionistas por otro lado no recibirán nada. En este caso se dice que la empresa ha entrado en *default* (o impago) con los accionistas. El valor del patrimonio está determinado entonces por la diferencia existente entre los activos y la deuda. Ahora se define E como el patrimonio de la empresa. En el modelo de Merton, el valor del patrimonio en el momento T (E_T) es igual a:

$Er = Max\ (Ar - D, O)$ [7]

Como se puede observar, la ecuación [/] es muy similar a la ecuación [1] de utilidad en el caso de una opción *call* de compra de acciones, y a la ecuación [5] del VPN en el caso de una opción real sobre un proyecto de inversión. En efecto, el valor del patrimonio de una firma es equivalente a una opción financiera *call* con un subyacente igual a los activos (A) de la compañía y un precio de ejercicio equivalente al valor de la deuda (D) (Geske, 1979). (Véase el cuadro 2).

Cuadro 2

Comparación de variables entre opciones *call* de una acción, con la opción *call* del modelo de Merton

Variables en la Opción de compra de una acción	**Simbología**		**Variables en la opción de compra en el Modelo de Merton**
Precio de ejercicio	X	D	Valor de la deuda
Precio actual de la acción	S	A_0	Valor de los activos en el momento T_0.
Tiempo al ejercicio	T		Tiempo hasta el ejercicio de la opción, igual al tiempo de maduración del bono
Volatilidad del precio de la acción	σ	σ_A	Volatilidad los activos
Tasa libre de riesgo	R		Tasa de descuento de la opción
Precio de la acción en el momento del ejercicio (*variable aleatoria*)	S_T	A_T	Valor de los activos en el momento T
Utilidad (Pay-off) (*variable aleatoria*)	Utilidad	E_T	Valor del Patrimonio en el momento T
Valor de la opción	c	E_0	Valor del Patrimonio en T_0

Por lo tanto, el valor de la opción *call* en el Modelo de Merton es equivalente al valor del patrimonio hoy (E_0), reemplazando las variables en la ecuación [4], de acuerdo con el modelo de Black-Scholes:

$$E0 = A_0 * N(d_1) - De^{-RT} * N(d_2) \qquad [8]$$

Donde:

$$d_1 = \left[\frac{\ln\left(A_0 * e^{RT} / D \right)}{\sigma A * \sqrt{T}} + 0{,}5 * \sigma A * \sqrt{T} \right]$$

$$d2 = \left[d_1 - \sigma A * \sqrt{T} \right]$$

Y donde N(x) es la distribución acumulada para una variable normal estándar, σ_A es la volatilidad del Activo y R la tasa de libre de riesgo.

Sí $D^* = De^{-RT}$ es el valor presente de la deuda y $L = D^*/A_0$ es el nivel de apalancamiento de la firma, reemplazando en [8], el valor de la opción (E_0) está dado por:

$$E0 = A_0 * \left[N(d_1) - L * N(d_2) \right] \qquad [9]$$

$$d_1 = \left[\frac{-\ln(L)}{\sigma A * \sqrt{T}} + 0{,}5 * \sigma A * \sqrt{T} \right]$$

$$d2 = \left[d_1 - \sigma A * \sqrt{T} \right]$$

Así, entonces, el valor del patrimonio es función del valor del activo (dado que la deuda es fija y de descuento puro), por lo tanto, se puede determinar la volatilidad del patrimonio a partir de la volatilidad del activo (Jones, Mason & Rosenfeld, 1984). De esta forma, el valor del patrimonio está dado por:

$$E0\sigma E = \frac{\partial E}{\partial A} * A0 * \sigma A$$

Donde σ_E es la volatilidad del patrimonio en T_0. Reemplazando en la ecuación [9], tenemos:

$$\sigma E = \frac{\sigma A * N(d1)}{N(d1) - L * N(d2)} \qquad [10]$$

Las ecuaciones [9] y [10] permiten determinar A_0 y σ_A a partir de E_0, σ_E, L y T. De esta manera, la probabilidad de que la firma no entre en *default* (P), es igual a la probabilidad de que los tenedores de la opción ejerzan su opción de comprar de las acciones de la firma por un valor D en el tiempo T. Esta probabilidad se puede establecer a partir del modelo Log-normal de precios así:

$S_T = S_0 e^{(r - 0.5\sigma)T + \sigma Z\sqrt{T})}$

$P(S_{T>} X)$

$P(e^{(r- 0.5\sigma)T+\sigma Z\sqrt{T})} > X/ S_0)$

$P((r- 0.5\sigma)T+\sigma \mathbf{Z}\sqrt{T}) > \ln (X/ S_0))$

$P(z > (-\ln (S_0/X) - (r- 0.5\sigma)T/ \sigma\sqrt{T}))$

$P(z > -(\ln (S_0/X) + (r - 0.5\sigma)T/ \sigma\sqrt{T}))$

$d2 = \ln (S_0/X) + (r - 0.5\sigma)T/ \sigma\sqrt{T}$

$P(z > -d_2) = N(d2)$

Esto implica que la probabilidad de impago sea:

$P(z < -d_2) = N(-d2)$

Por lo tanto la probabilidad de impago N(–d2) de la empresa dependerá únicamente del nivel de endeudamiento o apalancamiento L, la volatilidad del activo σ_A y el tiempo de evaluación T. Así, entonces, este modelo presenta muchas ventajas, entre ellas, los parámetros del modelo pueden ser estimados a partir de la volatilidad en los precios de las acciones, permite valorar el riesgo de la compañía de caer en *default* con sus accionistas y, por último, puede utilizarse para demostrar la relación existente entre el mercado de crédito y el mercado de opciones.

Sin embargo, presenta también varias limitaciones, en primer lugar la volatilidad del activo σ_A sólo es estimable para aquellas empresas que cotizan en bolsa, que en el caso colombiano son muy pocas y, por otro lado, el modelo de Black-Scholes parte de supuestos muy restrictivos respecto a las características de los mercados financieros, supuestos no aplicables en mercados en vía de desarrollo como el nacional. Tales limitaciones se profundizan en la sección siguiente.

5. Limitaciones del modelo de black-scholes para opciones reales y la estimación de la probabilidad de *default* N(–d2)

A efectos de aplicar el modelo de opciones reales al caso colombiano, es preciso adoptar una técnica más general que el modelo de Black-Scholes debido a los estrictos supuestos que posee el mismo.

Para empezar, el modelo Black-Scholes presupone que la distribución del precio del subyacente A_T corresponde a una Log-normal (Supuesto 3). Como se mencionó anteriormente, esto se debe a que el crecimiento de este precio obedece a un proceso de Wiener. Sin embargo, se ha encontrado que es un modelo explicativo del comportamiento del precio de los activos que se transan continuamente en mercados eficientes, lo cual no se cumple en el mercado colombiano en particular, y en la mayoría de los mercados en vía de desarrollo, a nivel general (Maya y Torres, 2004).

Además, este supuesto no resulta necesariamente válido en el contexto de las opciones reales, en las cuales el subyacente suele ser el valor presente de un proyecto opcional o, en este caso, de un conjunto de proyectos dentro de una firma. Lo anterior, debido a que la evolución futura del valor presente de los activos de la firma no está necesariamente en función del precio de un producto básico ni de un activo financiero. Como se presenta en el caso de la adquisición, dicho valor presente es función de una serie de factores de mercado y macroeconómicos, que tienen sus propias distribuciones de probabilidad.

El modelo también supone que el precio de ejercicio de la opción financiera, que en este caso es igual al valor de la deuda (D), es fijo y determinado desde un principio. Dicho valor de ejercicio, en el caso de las opciones reales corresponde a la inversión necesaria para ejercer el proyecto, por lo tanto, no podrá ser un valor determinado y fijo en un buen número de casos, dado que el proyecto se comenzaría en una fecha futura T. Por lo tanto, es muy probable que la inversión necesaria varíe como consecuencia de efectos inflacionarios, cambios de tecnología, variaciones en el tamaño o complejidad del proyecto, entre otros. Más aun, en las opciones reales derivadas de investigación y desarrollo puede haber, en el momento 0, una incertidumbre sobre el monto a invertir en el proyecto opcional, comparable a la incertidumbre sobre el valor presente del proyecto.

De otro lado, las opciones reales se ejercen comúnmente en cualquier momento desde el presente hasta un cierto tiempo (T). A menos que existan restricciones contractuales, presupuestales o de otra naturaleza, no suele haber impedimentos para que la empresa ejerza sus opciones anticipadamente, esto es, para que se involucre en los proyectos opcionales antes de lo previsto. En ese sentido, las opciones reales suelen ser más frecuentemente del tipo americano que del europeo.

Por último, el modelo Black-Scholes supone que la valoración del precio de las opciones financieras se desarrolla en un *mundo indiferente al riesgo* y presupone la existencia de un mercado continuo en el que se cotiza el activo subyacente necesario para construir el portafolio replicativo de la opción. En el caso de opciones reales, los expertos han propuesto que el portafolio replicativo del valor presente del proyecto se construiría con base en acciones perfectamente correlacionadas con el proyecto opcional o con base en los productos básicos determinantes de su valor (Hull, Nelken y White, 2004). No obstante, estos mismos autores reconocen la dificultad de que un portafolio conformado así pueda replicar perfectamente, aun en mercados financieros eficientes. Esto sin mencionar las restricciones existentes en los mercados de derivados que se encuentran en los mercados en vía de desarrollo, debido a que en algunos países apenas se está generando la normativa necesaria para su existencia real y para mejorar la probabilidad de impago en estos contratos.

Por lo anterior, se propone que para el caso colombiano se descarte el modelo Black-Scholes para la valoración de opciones reales, en particular porque en la práctica los agentes no obedecen a lógicas que contrastan con un "mundo indiferente al riesgo" y porque resulta muy difícil encontrar, para la mayoría de los casos, activos cuyo precio se pueda correlacionar suficientemente con el desempeño del proyecto, entre otras cuestiones debido a la ineficiencia, iliquidez y poca variedad del mercado financiero nacional (Maya y Torres, 2004). Además, en la mayoría de los casos es imposible calcular la volatilidad de los activos σ_A. En consecuencia, no se reemplazaría σ_A y el ritmo de crecimiento del valor de los activos de la firma (A) para efectos de estimación del valor del activo en T (A_T). Tampoco se descontaría el valor del patrimonio (E_0) con la tasa libre de riesgo (R), sino con una tasa apropiada para el nivel de riesgo percibido en la opción (ecuación [8]). Por consiguiente, será necesario establecer tanto una tasa de descuento adecuada para traer a presente el valor esperado del patrimonio en la firma, así como la tasa de crecimiento de los activos del proyecto opcional. Esto último no resulta fácil en la práctica, dado que se trata de una variable estimada en un modelo de valoración, más que del precio de un activo transado en un mercado continuo, y con suficiente información histórica.

Por todo lo anterior, se hace necesario emplear una metodología más general y flexible para la valoración de opciones reales en el mercado colombiano que el método de Black y Scholes. Esta metodología es la simulación financiera, la cual permite una forma flexible, transparente y fácil de entender, para la valoración de proyectos bajo riesgo, y también de opciones reales.

6. La simulación financiera como técnica para la valoración de opciones reales: una aplicación

La simulación financiera es una metodología que permite resolver un amplio espectro de problemas financieros en los cuales las variables de entrada presentan una incertidumbre significativa pero son modelables desde el punto de vista probabilístico. En términos generales, la simulación financiera parte del modelo lógico o matemático de un sistema o problema de decisión, el cual debe involucrar variables de entrada con su respectiva distribución probabilística y, a partir de allí, determinar los resultados posibles de la(s) variable(s) de salida (resultados). Estos resultados se suelen presentar y analizar también como distribuciones de probabilidad.

A continuación se exponen los pasos generales que comprende el proceso de simulación financiera para el caso particular de la determinación del valor de una opción real en el modelo de Merton.

6.1. Se plantea el modelo cuantitativo a simular

En el caso de la opción real de inversión en una firma, será un modelo de estimación del valor de la opción real (E_0), el cual, a su vez, procede del valor del patrimonio de la firma en el momento T (E_T); este modelo relaciona E_T con los parámetros financieros del proyecto: ingresos, costos, depreciación, inversión de capital de trabajo, costo de capital, valor de continuidad, entre otros.

En el ejemplo de simulación financiera que se analiza, los datos de entrada se muestran en el cuadro 3. Como se puede observar, se trata de un proyecto de inversión, valorado a nueve años, las variables de entrada incluyen las ventas anuales, el costo de mercancía vendida, los gastos generales del proyecto, el capital de trabajo y la tasa de descuento. Así mismo se asume una tasa impositiva fija de 34% y una tasa de descuento anual del 12% como constantes. Se desarrollan entonces las ecuaciones correspondientes para determinar el flujo de caja, las utilidades y el valor residual a partir de las variables de entrada.

6.2 Se identifican las variables de entrada determinantes de la variabilidad del modelo

En el caso de la opción real son variables que afectan el E_o y el E_T del proyecto adicional, ya sea vía los flujos de caja, el costo del capital o la inversión inicial. Como ejemplos de ese tipo de variables se tendría el incremento de precios, crecimiento del mercado, participación, posibilidad de demandas, variabilidad de tasas de cambio o de interés, entre otros.

Para el modelo que se expone, se asume una distribución de probabilidad para cada una de las variables de entrada. Una distribución de probabilidad triangular para el crecimiento en las ventas y unas distribuciones de probabilidad uniformes para el margen bruto, los gastos generales y el cambio en el capital de trabajo. La distribución triangular toma tres valores, uno máximo, uno mínimo y uno más probable; por su parte, la distribución uniforme permite solamente dos posibilidades extremas, un valor máximo y un valor mínimo. De esta manera, todas las iteraciones darán como resultado valores extremos que se encuentren dentro de estas cotas, determinadas por quienes estén valorando el proyecto.

La distribución triangular y uniforme es bastante utilizada en este tipo de simulaciones, y parte de valores cotas determinadas por la experiencia; para este modelo se toman entonces valores diferentes para cada año en cada una de las variables y para todos los años (desde el primero hasta el noveno). Como se puede observar, para el crecimiento de las ventas se adopta una distribución triangular, asumiendo un crecimiento en ventas mínimo de 15%, un máximo de 25% y el más probable de 20%. Para el margen bruto se toma una distribución uniforme, dada por un mínimo del 25% y un máximo del 30%; los gastos generales se consideran con un mínimo de -1% y un máximo de 2%. Para el capital de trabajo se toma también una distribución uniforme con un crecimiento mínimo del 5% y un máximo del 10%. Por último se parte de una distribución triangular para el valor de continuidad con un mínimo 5%, un máximo de 8% y un escenario más probable del 7%, como se puede apreciar en el cuadro 4.

6.3 El modelo cuantitativo se corre en un programa especializado

(Como @Risk, Crystal Ball, Arena, etc.), que permita realizar un número suficientemente grande de simulaciones, conforme con las distribuciones de probabilidad encontradas. Esto permite obtener muestras representativas del valor de las variables E_T y E_0 del proyecto. Para la simulación del ejercicio se utilizaron 30.000 iteraciones en las variables aleatorias.

Cuadro 3
Variables del modelo de simulación (en millones)

Ventas anuales	40						
Costo Mcia	28						
Gastos Generales	10						
Capital de Trabajo	4						
Tasa impuestos	0,34						
Tasa de descuento	12%						
ESCENARIOS							
AÑO	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Crecimiento Ventas	20,00%	12,00%	9,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%
Margen Bruto	28%	28%	28%	28%	28%	28%	28%
Gastos Generales	2%	2%	2%	2%	2%	2%	2%
Cambio WC	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
Esce Costo Legal		0	0				
Escenario Valor continuidad (g)	0%						
FLUJO DE CAJA							
Ventas	48,00	53,76	58,60	61,53	64,60	67,83	71,23
Costo Mercancia Vendida	34,56	38,71	42,19	44,30	46,52	48,84	51,28
Gasto Generales y Ventas	10,2	10,40	10,61	10,82	11,04	11,26	11,49
Cambio en el WC	0,80	0,58	0,48	0,29	0,31	0,32	0,34
Costo Legal		0	0				
Utilidad Antes de Impuestos	3,24	4,65	5,80	6,40	7,05	7,73	8,46
Inpuestos	1,10	1,58	1,97	2,18	2,40	2,63	2,88
Utilidad despues de Impuestos	2,14	3,07	3,83	4,23	4,65	5,10	5,58
Flujo de Caja	1,34	2,49	3,34	3,93	4,34	4,78	5,24
Valor Residual	43,68						
At (valor de la firma año dos)	$31,07						
D	$ 50,00						
Eo	$0,00						
T	2						

Cuadro 4

Supuestos de distribuciones de probabilidad de las variables de entrada para el año tres

Assumption: Crecimiento Ventas año tres **Cell: B11**

Triangular distribution with parameters:

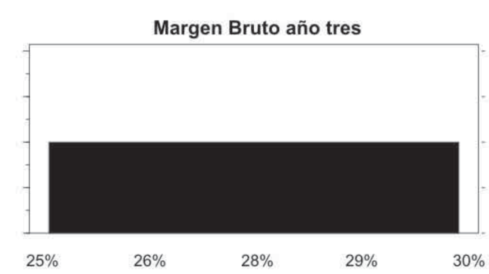
Minimum	15,00%
Likeliest	20,00%
Maximum	25,00%

Selected range is from 15,00% to 25,00%

Assumption: Margen Bruto año tres **Cell: B13**

Uniform distribution with parameters:

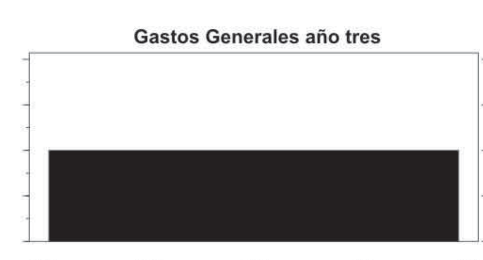
Minimum	25%
Maximum	30%



Assumption: Gastos Generales año tres **Cell: B14**

Uniform distribution with parameters:

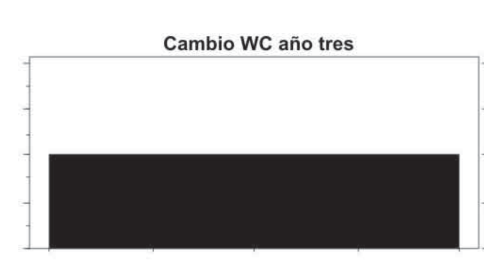
Minimum	-1%
Maximum	2%



Assumption: Cambio WC año tres **Cell: B15**

Uniform distribution with parameters:

Minimum	5%
Maximum	10%



Assumption: Escenario Valor continuidad (g) **Cell: B18**

Triangular distribution with parameters:

Minimum	5%
Likeliest	7%
Maximum	8%

Selected range is from 5% to 8%

6.4 Se analizan las distribuciones encontradas de las variables de salida

En el caso de la opción real el resultado más importante, de acuerdo con [7], es que la media de distribución de la variable E_0 resulta ser el valor de la opción real.

Según el modelo de opciones, el proyecto caería en *default* si el valor esperado de su activo es menor al valor de la deuda emitida (en este caso si el activo es menor a $ 50.000.000) valorado en un tiempo determinado (en este caso dos años). Corriendo el modelo de simulación con 20.000 iteraciones, se obtiene una distribución de probabilidad de los activos como se muestra en el cuadro 5. Se puede observar en éste que la probabilidad de que el activo sea menor de $ 50.000.000 en dos años es de 10,02%, y el valor esperado de los activos es de $ 60.670.000, es decir que el proyecto no cae en *default* y el valor del patrimonio es positivo.

Por otro lado, la distribución de probabilidad de la opción real (que es la misma que la distribución del patrimonio) se muestra en el cuadro 6. Como se puede observar, el valor esperado del patrimonio o precio de la opción de compra a los dos años es $ 8.630.000; por otra parte, los accionistas reciben la diferencia entre el valor de los activos y el valor de la deuda, es decir, $ 10.670.000.[3] En este caso, según el modelo de simulación, los inversionistas deben tomar la opción real de invertir en el proyecto por $ 8.630.000, asumiendo una probabilidad de *default* cercana al 10%, y con un valor del patrimonio al finalizar el segundo año de $10.670.000 (igual a la diferencia entre el valor de la empresa y el valor de la deuda).

[3] Esta simulación fue realizada con Crystall Ball.

Cuadro 5

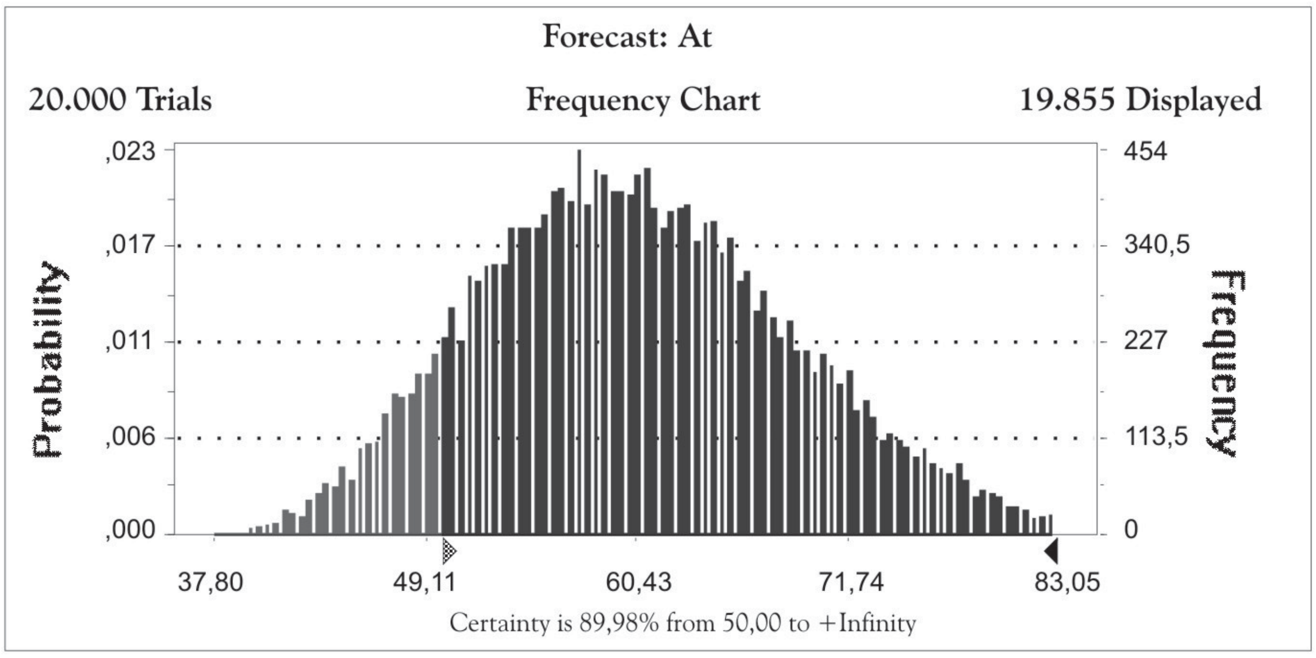
Distribución de probabilidad de los activos valorados a dos años

Forecast: At Cell: B33

Summary:

Certainty Level is 89,98%
Certainty Range is from 50,00 to +Infinity
Display Range is from 37,80 to 83,05
Entire Range is from 34,54 to 101,45
After 20.000 Trials, the Std. Error of the Mean is 0,06

Statistics:	Value
Trials	20000
Mean	60,67
Median	60,16
Mode	---
Standard Deviation	8,51
Variance	72,42
Skewness	0,31
Kurtosis	2,90
Coeff. of Variability	0,14
Range Minimum	34,54
Range Maximum	101,45
Range Width	66,91
Mean Std. Error	0,06



Cuadro 6

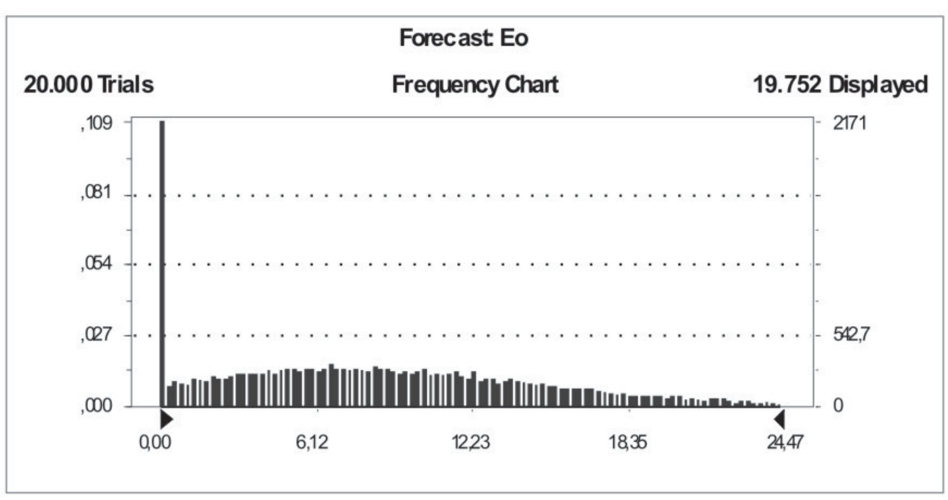
Distribución de probabilidad de la opción real (o del patrimonio) valorada en dos años

Forecast: Eo **Cell: B35**

Summary:

Display Range is from 0,00 to 24,47
Entire Range is from 0,00 to 40,47
After 20.000 Trials, the Std. Error of the Mean is 0,04

Statistics:	Value
Trials	20000
Mean	8.63
Median	7.99
Mode	0.00
Standard Deviation	6.31
Variance	39.83
Skewness	0.57
Kurtosis	2.85
Coeff. of Variability	0.73
Range Minimum	0.00
Range Maximum	40.47
Range Width	40.47
Mean Std. Error	0.04



Conclusiones

La simulación financiera permite la flexibilidad requerida para la adaptación del enfoque de opciones reales al medio colombiano, sorteando las limitaciones que impone el modelo de Black-Scholes, por lo siguiente: 1) permite involucrar distribuciones para el precio del activo A_T diferentes a la Log-normal, 2) permite considerar tasas de descuento diferentes a la libre de riesgo R, 3) si se estima directamente la distribución del A_T obvia el problema de la determinación de la probabilidad de *default* y de no ejercicio de la opción real, 4) puede involucrar una inversión inicial no necesariamente fija y 5) permite valorar opciones americanas, si se incluyen árboles de decisión en el modelo.

Se subraya, sin embargo, la necesidad de seguir tratando estos temas, sobre todo en cuanto se pueden aplicar métodos de estimación y valoración que han resultado exitosos en otras partes del globo, pero no de una manera ciega y descontextualizada, sino teniendo en cuenta el entorno y las condiciones específicas de los mercados colombianos, para que sean realmente aplicables y para ayudar a desarrollarlos , no sólo desde el punto de vista académico, sino también desde el punto de vista empleado.

Bibliografía

Basel Committee on Banking Supervision. 2005. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, A Revised Framework. Basilea: Bank for International Settlements, november.

Black, F. & M. Scholes. 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", in: *Journal of Political Economy*, N°.81, pp. 637-59.

Blanco, R. S.; Brennan, S., & Marsh, I. W. 2003. "An empirical analysis of the dynamic relationship between investment grade bonds and credit default swaps", in: *Bank of England Working paper*. Inglaterra: Publications Group Bank of England

Credit Suisse First Boston International. 1997. "CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework", in: *Credit Suisse, First Boston*. Suiza: Credit Suisse First Boston International

Duffie, D. 1999. "Credit Swap Valuation", in: *Financial Analysts Journal*, N° 55, pp. 73-89.

Duffie, D. & K. Singleton. 1999. "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", in: *Review of Financial Studies*, N° 12, pp. 687-720. Stanford University.

Eom, Y. H.; Helwege, J., & Huang, J-Z. 2000. "Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis", in: *Working Paper*. Pennsylvania: Pennsylvania State University.

Geske, R. 1979. "The Valuation of Compound Options", in: *Journal of Financial Economics*, N° 7, pp. 63-82.

______. 1977. "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options", in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, N° 5, pp. 541-552.

Hull, J.; Nelken, I., & White, A. 2004. *Merton´s Model, Credit Risk, and Volatility Skews*. Super Computing Consulting Group. Toronto: University of Toronto. pp. 1-7, 38-7.

Hull, J.; Predescu, M, & White, A. 2002. "The Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Ratings Announcements", in: *Working paper*. Toronto: University of Toronto.

Jackwerth, J. C. & M. Rubinstein. 1996. "Recovering Probabilities from Option Prices", in: *Journal of Finance*, N° 51, pp. 1611-31.

Jones, E. P.; Mason, S., & Rosenfeld, E. 1984. "Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structure: An Empirical Investigation", in: *Journal of Finance*, N° 39, pp. 611-25.

Morgan, J. P. 1997. *Credit Metrics Technical Document*, april. New York: Risk Metrics Group.

Kealhofer, S. 2003a. "Quantifying Credit Risk I: Default Prediction", in: *Financial Analysts Journal*, Vol. 59, N° 1. New York: CFA Institute, pp. 30-44.

______. 2003b. "Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation", in: *Financial Analysts Journal*, vol. 59, N° 3. New York: CFA Institute, pp. 78-92.

Litterman, R. & T. Iben. 1991. "Corporate Bond Valuation and the Term Structure of Credit Spreads", in: *Journal of Portfolio Management*, N° 17. New York: Institutional Investors, pp. 52-64.

Maya O., C. & Gabriel Torres A. 2004. "The Unification of the Colombian Stock Market: A Step Towards of Efficiency – Empirical Evidence", in: *Latin American Business Review*, Vol. 5. Rio de Janeiro: COPPEAD Graduate School of Business, pp. 69-95.

Merton, R. C. 1974. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", in: *Journal of Finance*, N° 29. California: American Finance Association, pp. 449-70.

Rodríguez, R. J. 1994. "Default Risk, Yield Spreads, and Time to Maturity", in: *Journal of Rubinstein, M., Implied Binomial Trees, Journal of Finance*, N° 49 California: American Finance Association, pp. 771-818.

Wilson, T. 1998. "Portfolio Credit Risk", in: *FRBNY Economic Policy Review*, October. New York: Federal Reserve Bank of New York, pp. 71-82