UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta a la investigación

ISSN 1692-0694

INFERENCIA VISUAL PARA LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS LBPco, LBPc y LBPo

MANUEL SIERRA ARISTIZÁBAL

GRUPO DE INVESTIGACIÓN "LÓGICA Y COMPUTACIÓN"

Reporte técnico parcial

Medellín, Septiembre de 2002

DOCUMENTO 5-092002

Favor enviar sus comentarios a la dirección electrónica msierra@eafit.edu.co

T A B L A   D E   C O N T E N I D O

RESUMEN

La Negación Clásica prohibe la compatibilidad de un enunciado con su negación y las indeterminaciones respecto a la negación. El sistema presentado en este trabajo, es una generalización de la Lógica Clásica. En él se tiene un operador llamado Negación Débil, el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación ni las indeterminaciones respecto a la negación.

ABSTRACT

The Usual Negation prohibits the compatibility of a proposition with its negation and indetermination with respect to the negation. The system presented in this work is a generalization of the Classical Logic. In it there is a new operator called Weak Negation, which has the characteristic of not prohibiting the compatibility with its negation nor indetermination with respect to the negation.

EL AUTOR

Manuel Sierra A.

Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Medellin. Magister en Ciencias con especialidad en Lógica Matemática de la Universidad Nacional de Colombia. Profesor e Investigador de la Escuela de Ciencias y Humanidades de la Universidad EAFIT y coordinador de la Especialización en Lógica y Filosofía en la misma Universidad.

Sus actividades de investigación se han desarrollado en el área de Lógicas no Clásicas. Es el investigador principal del proyecto Inferencia Visual para Sistemas Deductivos con Operador Negación, y miembro del grupo de investigación Lógica y Computación de la Universidad EAFIT. Los trabajos originales que ha publicado recientemente pueden ser clasificados en tres grupos: en primer lugar está la jerarquía de Lógicas Diagonales, las cuales permiten trabajar con teorías donde la antinomía de Russell es un teorema; en un segundo grupo se encuentra una familia de Lógicas de la Vaguedad, las cuales extienden la Lógica Clásica con la virtud de permitir un razonamiento impecable en la presencia de inconsistencias e indeterminaciones; en un tercer grupo se encuentran los Árboles de Forzamiento Semántico, los cuales proporcionan una poderosa herramienta de inferencia visual muy útil en el estudio de teorías inconsistentes.

E-mail: msierra@eafit.edu.co

Inferencia Visual para los Sistemas Deductivos LBPco, LBPc y LBPo[1]

Introducción

El operador “negación clásica”, simbolizado “~”, está caracterizado desde el punto de vista semántico por la siguiente equivalencia:

A es aceptado ⇔ ~A no es aceptado

Ésta equivalencia dice que un enunciado es aceptado si y solamente si su negación no es aceptada. En ella pueden leerse 4 enunciados condicionales:

A es aceptado ⇒ ~A no es aceptado
~A es aceptado ⇒ A no es aceptado
A no es aceptado ⇒ ~A es aceptado
~A no es aceptado ⇒ A es aceptado

Los dos primeros enunciados son equivalentes y prohíben: que un enunciado y su negación sean ambos aceptados, es decir, se prohíbe que un enunciado sea compatible con su negación; los dos últimos son equivalentes y prohíben que un enunciado y su negación sean ambos no aceptados, es decir, se prohíbe las indeterminaciones respecto a la negación. La negación clásica prohíbe la compatibilidad de un enunciado con su negación y las indeterminaciones respecto a la negación. El sistema LBPco, presentado en éste trabajo, es una generalización de la lógica clásica, en él se tiene un operador llamado “negación débil”, el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación, ni las indeterminaciones respecto a la negación. Los sistemas LBPc y LBPo son casos particulares de LBPco, en el primero se prohíben las indeterminaciones y se permite la compatibilidad, en el segundo, se prohibe la compatibilidad y se permiten las indeterminaciones.

1. Árboles de Forzamiento Semántico Clásico[2]

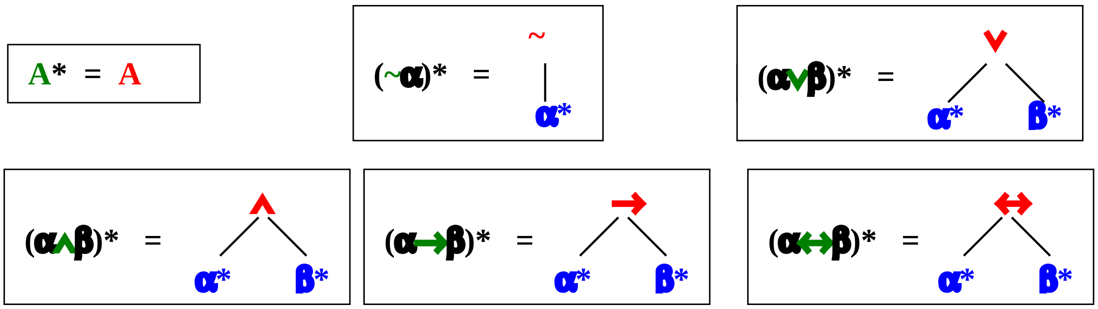
1.1 Construcción de enunciados

Enunciados atómicos: A, B, C, ...
Enunciados compuestos: generados a partir de los atómicos utilizando los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y el conectivo unario ~

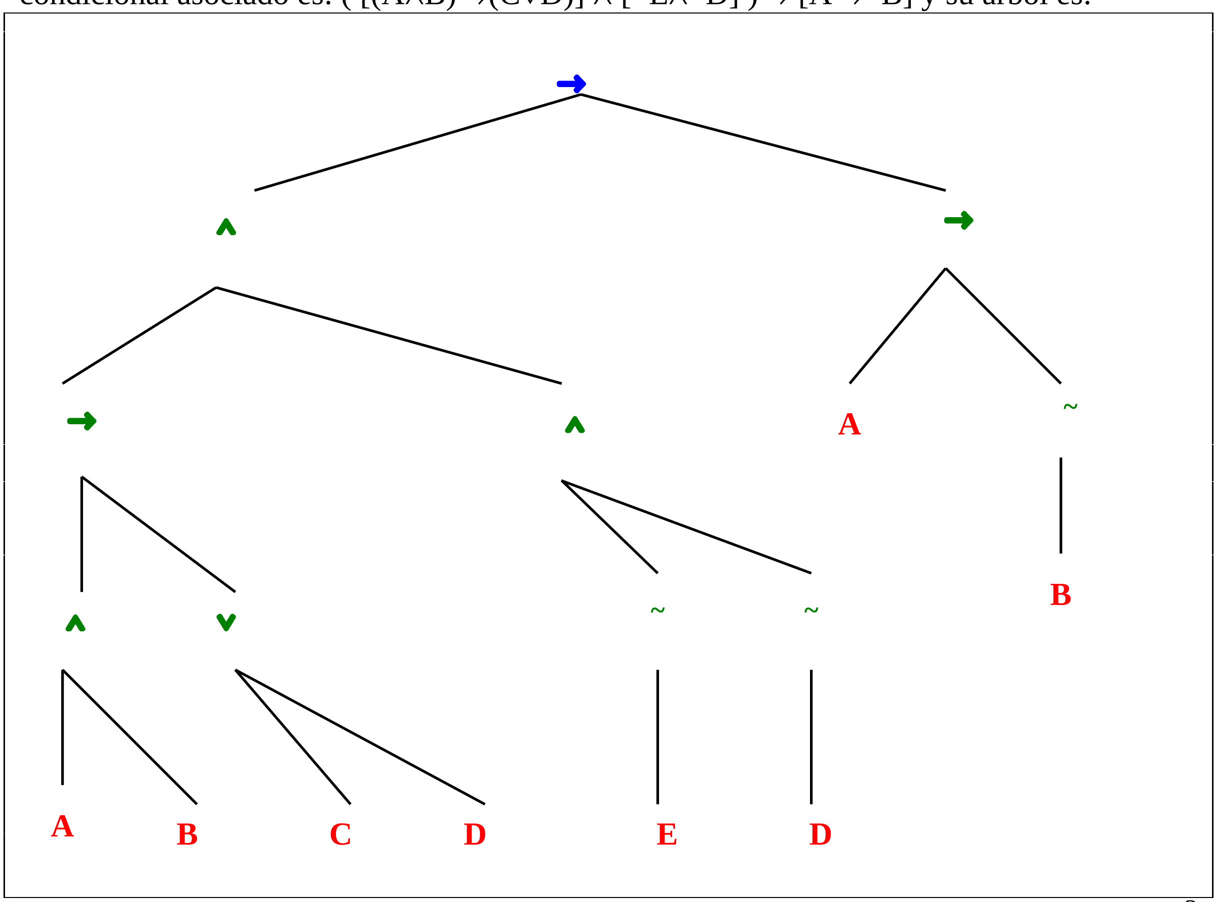
[1] Éste trabajo forma parte de los resultados del proyecto de investigación Py0137, *Inferencia visual para sistemas deductivos con operador negación*, el cual es financiado por la Universidad EAFIT en 2001 y 2002.
[2] Los Árboles de Forzamiento Semántico Clásico fueron presentados por primera vez en 1999, en el VII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, en la Universidad de Antioquia, Medellín. Presentado también en [Sierra01a].

1.2 Árboles de construcción de enunciados

El árbol de construcción del enunciado α lo representamos α^* y lo construimos utilizando las siguientes reglas (A enunciado atómico, α y β enunciados arbitrarios):



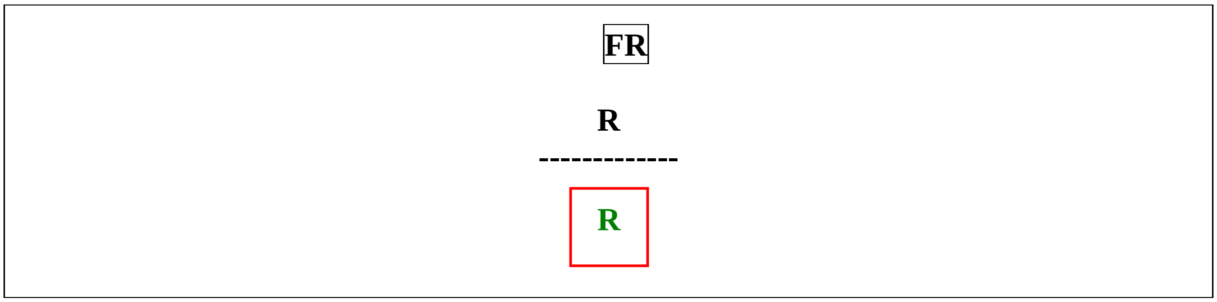
Definimos el árbol de construcción de un argumento $\alpha1, \ldots, \alpha n \vdash \beta$ como: $((\alpha1\wedge \ldots \wedge\alpha n)\rightarrow\beta)^*$, el árbol del condicional asociado al argumento. El nodo superior de un árbol lo llamamos la **raíz** del árbol y corresponde al conectivo principal del enunciado, los nodos inferiores, es decir aquellos de los cuales no salen ramas, los llamamos **hojas** y correspon-den a los enunciados atómicos. Para el argumento: $(A\wedge B)\rightarrow(C\vee D)$, $\sim E\wedge\sim D \vdash A\rightarrow\sim B$, el condicional asociado es: $([(A\wedge B)\rightarrow(C\vee D)] \wedge [\sim E\wedge\sim D])\rightarrow [A\rightarrow\sim B]$ y su árbol es:



1.3 Árboles de Forzamiento Clásico

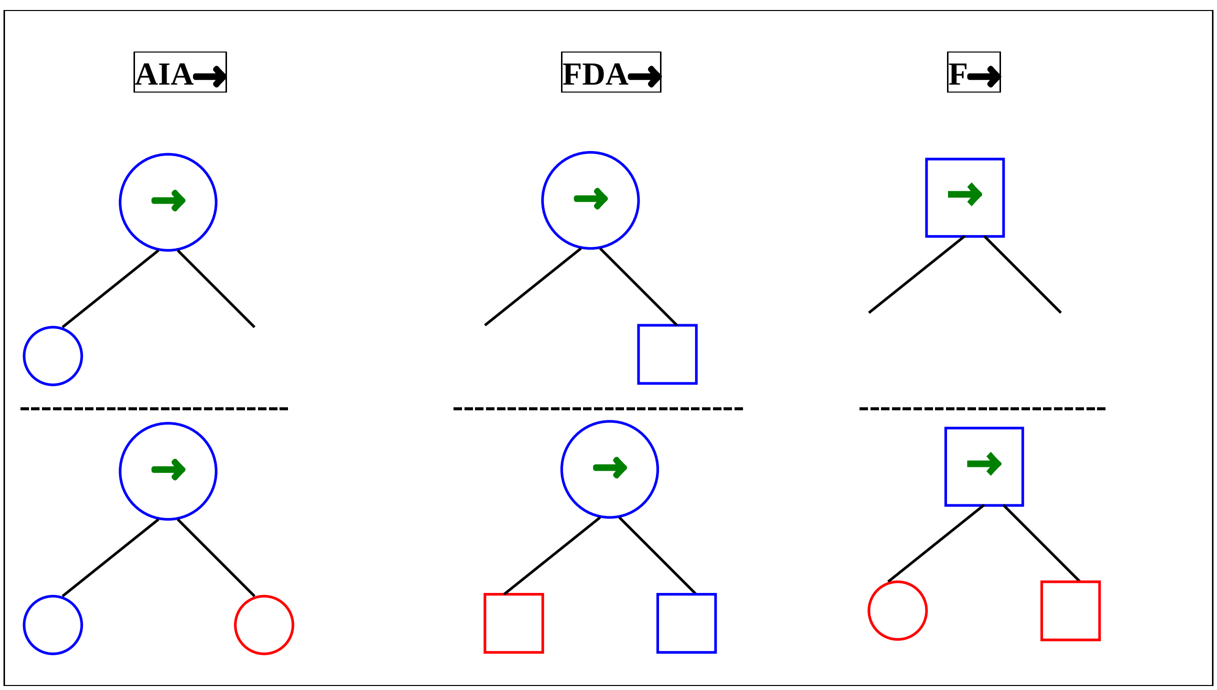
Los árboles de Forzamiento Semántico se construyen a partir de los árboles de construcción de enunciados utilizando las siguientes **reglas de inferencia para el forzamiento semántico**. Intuitivamente un nodo marcado con un círculo acepta el enunciado asociado al nodo, un nodo marcado con un cuadro rechaza el enunciado asociado al nodo.

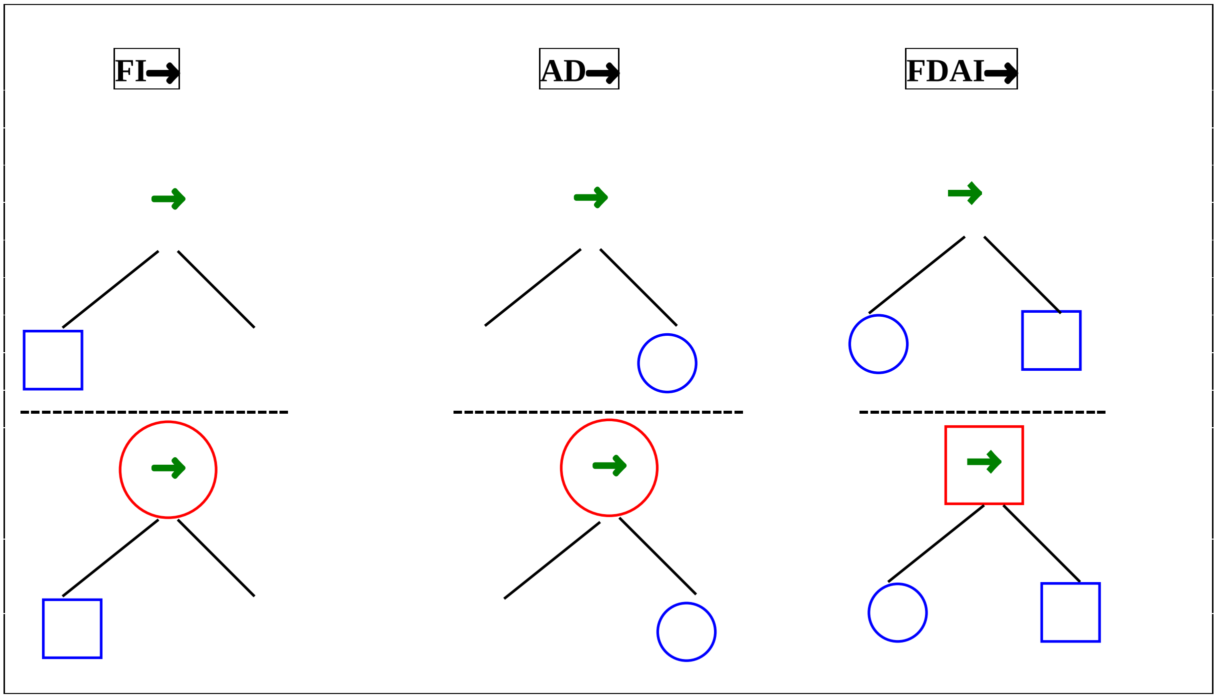
1.3.1 Regla básica



FR (Falsedad de la Raíz): El nodo raíz siempre está marcado con cuadro. Con ésta regla se está suponiendo que el enunciado (o argumento) asociado al árbol no es válido.

1.3.2 Reglas para el condicional →

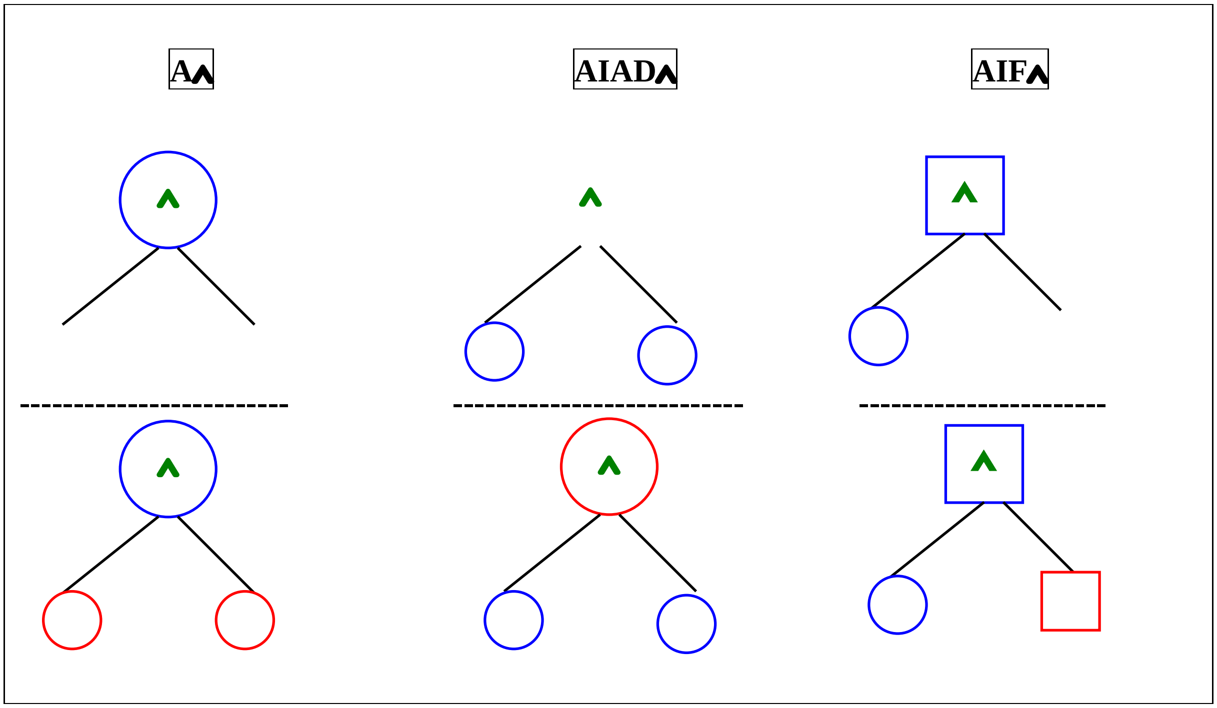


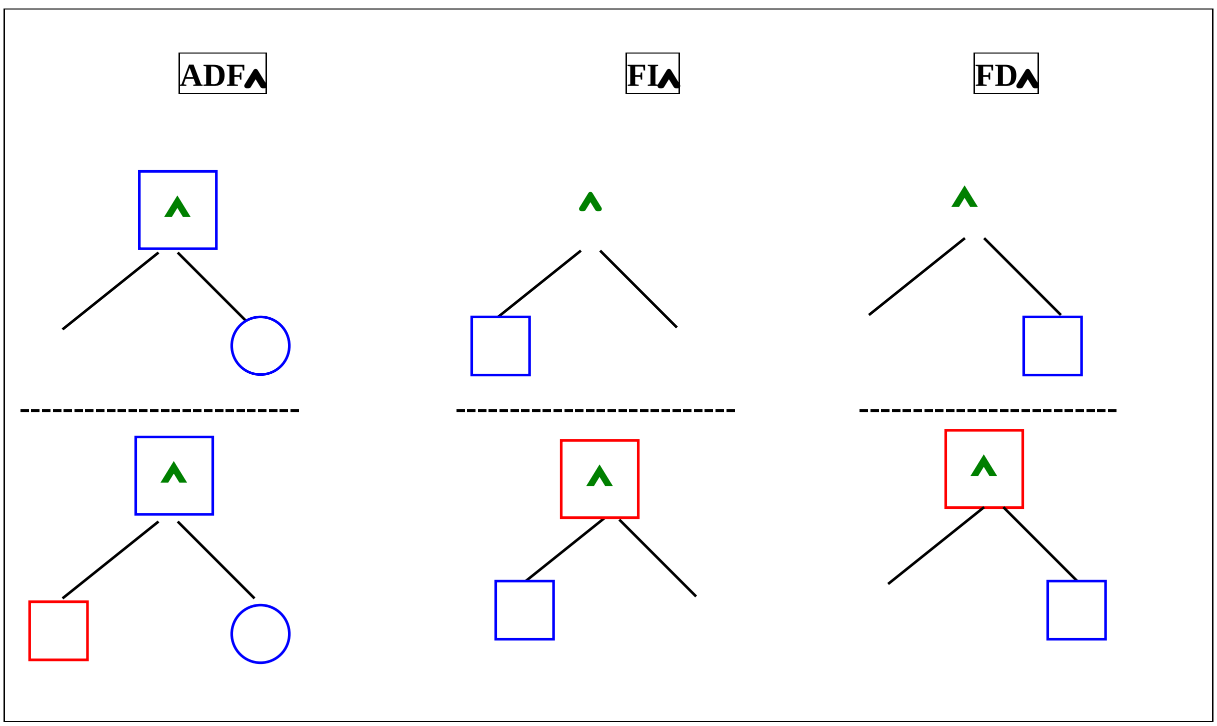


AIA→ (Afirmación a la Izquierda, Afirmación del Condicional): Cuando se tiene un condicional aceptado y el antecedente es aceptado, se infiere que el consecuente es aceptado.
FDA→ (Falsedad a la Derecha, Afirmación de Condicional): Cuando se tiene un condicional aceptado y el consecuente es rechazado, se infiere que el antecedente es rechazado.
F→ (Falsedad del Condicional): De un condicional rechazado, se infiere que el antecedente es aceptado y el consecuente rechazado.
FI→ (Falsedad a la Izquierda en un Condicional): Un condicional es aceptado cuando su antecedente es rechazado.
AD→ (Afirmación a la Derecha en un Condicional): Un condicional es aceptado cuando su consecuente es aceptado.
FDAI→ (Falsedad a la Derecha, Afirmación a la Izquierda en un Condicional): Un condicional es rechazado cuando el antecedente es aceptado y el consecuente es rechazado.
Basta tomar como **primitivas** las reglas **FI→, AD→ y FDAI→**, ya que las otras 3 reglas son derivadas de éstas.

1.3.3 Reglas para la conjunción ∧

A∧ (Afirmación de la Conjunción): Ambos componentes de una conjunción son aceptados cuando la conjunción lo es.
AIAD∧ (Afirmación a la Izquierda, Afirmación a la Derecha en la Conjunción): Si ambos componentes de una conjunción son aceptados, se infiere que la conjunción es aceptada.
AIF∧ (Afirmación Izquierda, Falsedad de la Conjunción): De una conjunción rechazada con uno de sus componentes aceptado, se infiere que el otro componente es rechazado.

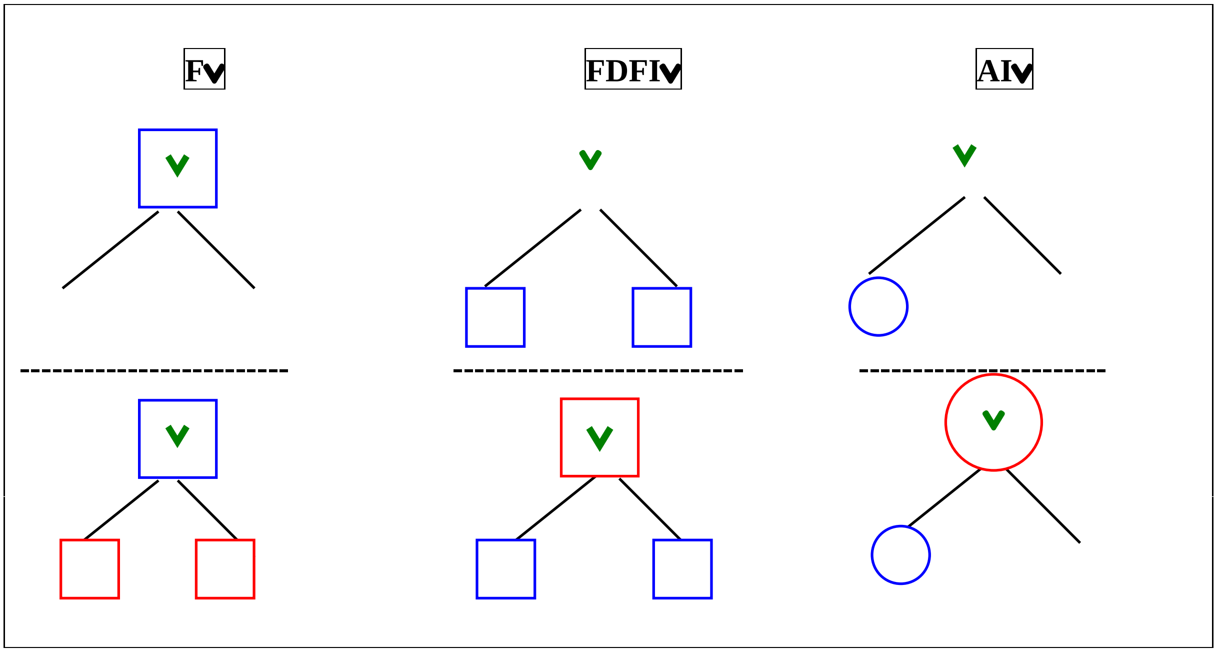




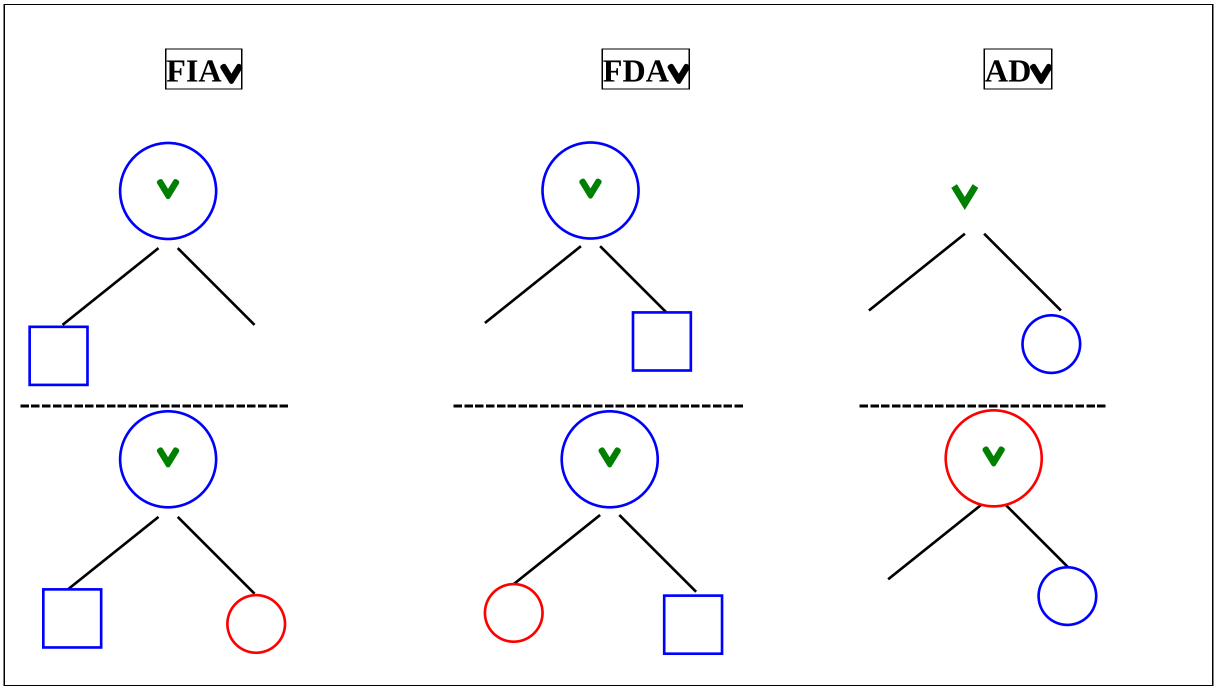
ADF∧: **(Afirmación Derecha, Falsedad de la Conjunción)**: De una conjunción rechazada con uno de sus componentes aceptado, se infiere que el otro componente es rechazado.
FI∧ (Falsedad a la Izquierda en la Conjunción): Una conjunción es rechazada cuando uno de sus componentes lo es.

FD∧ (Falsedad a la Derecha en la Conjunción): Una conjunción es rechazada cuando uno de sus componentes lo es.
Basta tomar como **primitivas** las reglas **A∧** y **AIAD∧**, ya que las otras 4 reglas son derivadas de éstas.

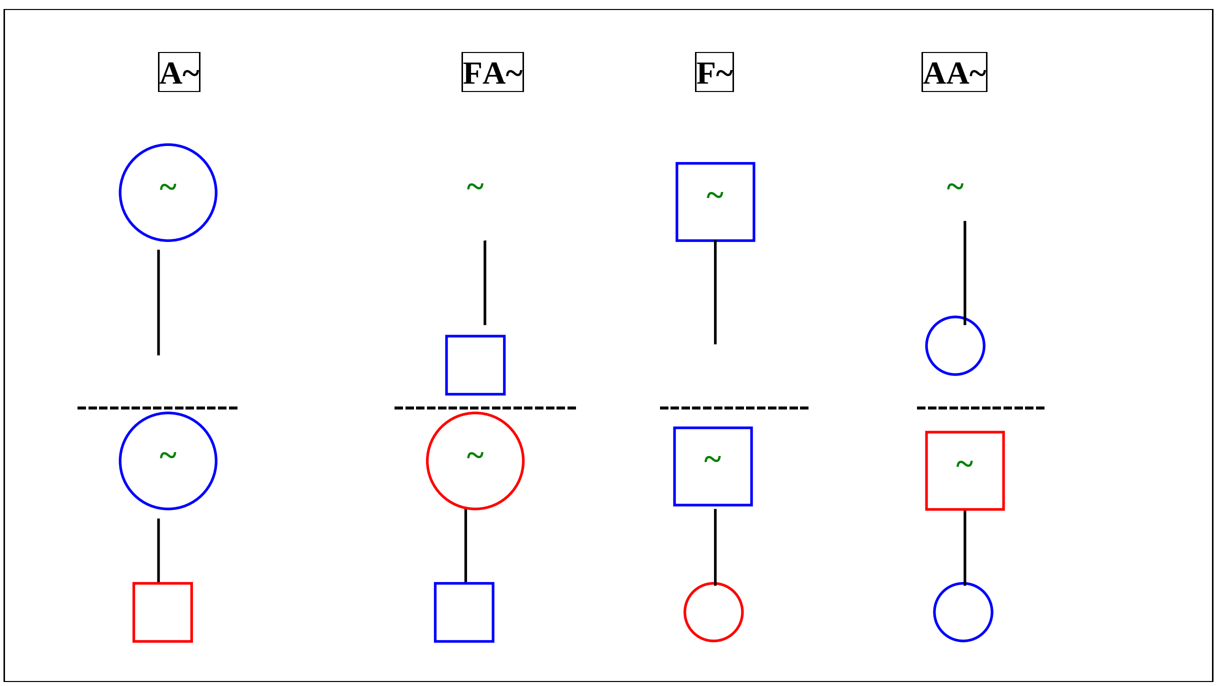
1.3.4 Reglas para la disyunción ∨



F∨ (Falsedad de la Disyunción): Se infiere que ambos componentes de una disyunción son rechazados cuando la disyunción es rechazada.
FDFI∨ (Falsedad a la Derecha, Falsedad a la Izquierda de una Disyunción): Una disyunción es rechazada cuando sus componentes son rechazados.
AD∨ (Afirmación a la Derecha de una Disyunción): Una disyunción es aceptada cuando uno de sus componentes lo es.
AI∨ (Afirmación a la Izquierda de una Disyunción): Una disyunción es aceptada cuando uno de sus componentes lo es.
FIA∨ (Falsedad a la izquierda, Afirmación de la Disyunción): Cuando una disyunción es aceptada y uno de sus componentes es rechazado, se infiere que el otro componente es aceptado.
FDA∨ (Falsedad a la Derecha, Afirmación de la Disyunción): Cuando una disyunción es aceptada y uno de sus componentes es rechazado, se infiere que el otro componente es aceptado.
Basta tomar como **primitivas** las reglas **F∨** y **FDFI∨**, ya que las otras 4 reglas son derivadas de éstas.



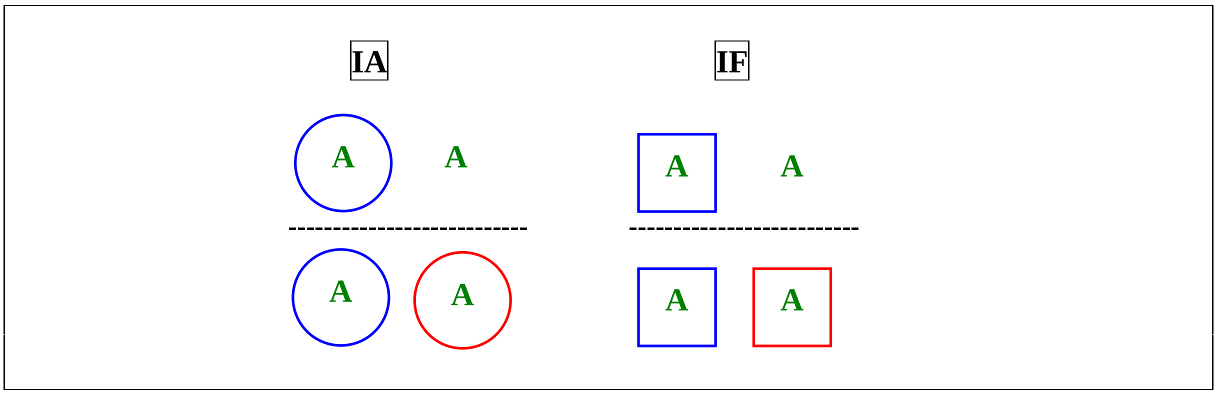
1.3.5 Reglas para la negación clásica ~



A~ (Afirmación de la Negación): El alcance de una negación es rechazado cuando la negación es aceptada.
FA~ (Falsedad del Alcance de la Negación): Una negación es aceptada cuando su alcance es rechazado.

F~ (Falsedad de la Negación): El alcance de una negación es aceptado cuando la negación es rechazada.
AA~ (Afirmación del Alcance de la Negación): Una negación es rechazada cuando su alcance es aceptado.
Basta tomar como **primitivas** las reglas **A~** y **FA~**, ya que las otras 2 reglas son derivadas de éstas.

1.3.6 Reglas para la iteración de marcas

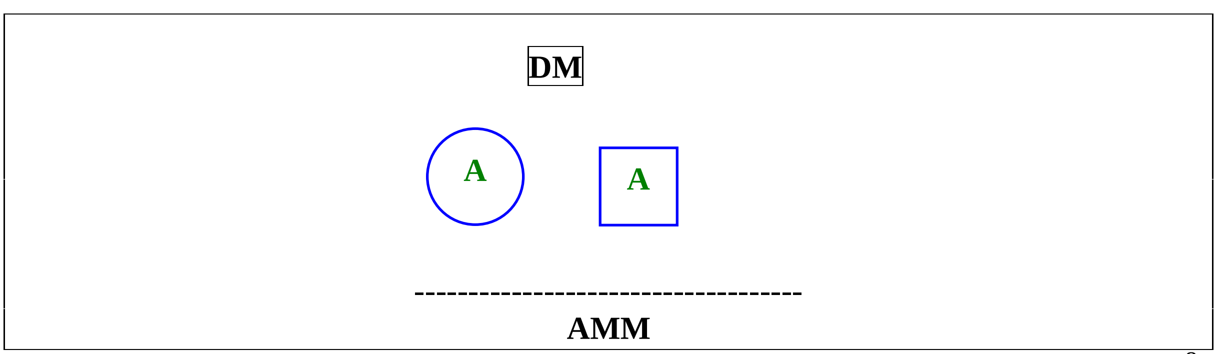


IA (Iteración de la Afirmación): Cuando un enunciado es aceptado, lo seguirá siendo siempre.
IF (Iteración de la Falsedad): Cuando un enunciado es rechazado, lo seguirá siendo siempre.

1.4 Tipos de árboles

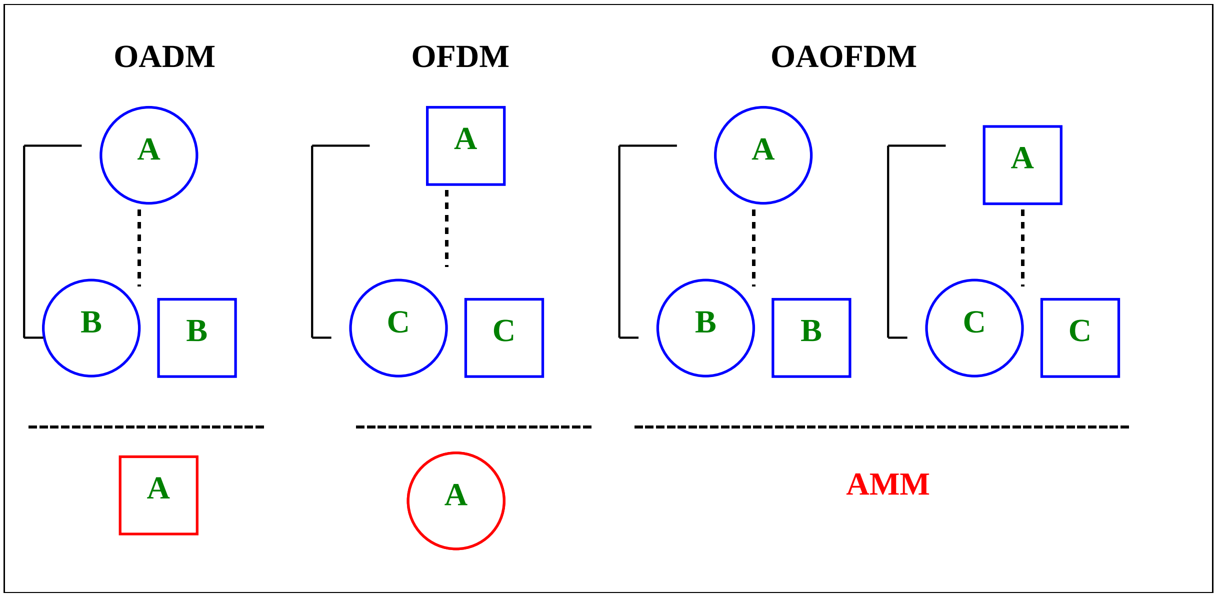
Un **árbol** de forzamiento semántico está **bien marcado** (**ABM**) si todos sus nodos están marcados y no existe doble marca (no existen nodos asociados a un mismo enunciado y con distinta marca). Un árbol de forzamiento semántico está **mal marcado** (**AMM**) si no está bien marcado, es decir, si existe un nodo con doble marca (existen nodos asociados a un mismo enunciado y con distinta marca).

Doble marca



DM (Doble Marca): Si dos nodos asociados a un mismo enunciado tienen marcas distintas entonces el árbol está mal marcado.

1.5 Opciones en el forzamiento



Sea A un hoja sin marcar:

1.5.1 **OADM (Opción Afirmativa con Doble Marca)**: Si se supone que un enunciado es aceptado y se obtiene una contradicción entonces dicho enunciado es rechazado.
1.5.2 **OFDM**: **(Opción Falsa con Doble Marca)**: Si se supone que un enunciado es rechazado y se obtiene una contradicción entonces dicho enunciado es aceptado.
1.5.3 **OAOFDM (Opción Afirmativa y Opción Falsa con Doble Marca)**: Si suponemos que un enunciado es rechazado y se obtiene una contradicción, y además, si se supone que el enunciado es aceptado y se obtiene una contradicción entonces la contradicción no depende de dicho enunciado.

Éste teorema nos permite tomar opciones cuando es imposible aplicar las reglas de inferencia para el forzamiento semántico y el árbol está incompleto (opción 1: A marcado con círculo, opción 2: A marcado con cuadro).

Éste procedimiento se generaliza de manera natural si es necesario tomar opciones sobre hojas asociadas a enunciados diferentes.

1.6 Validez y completitud

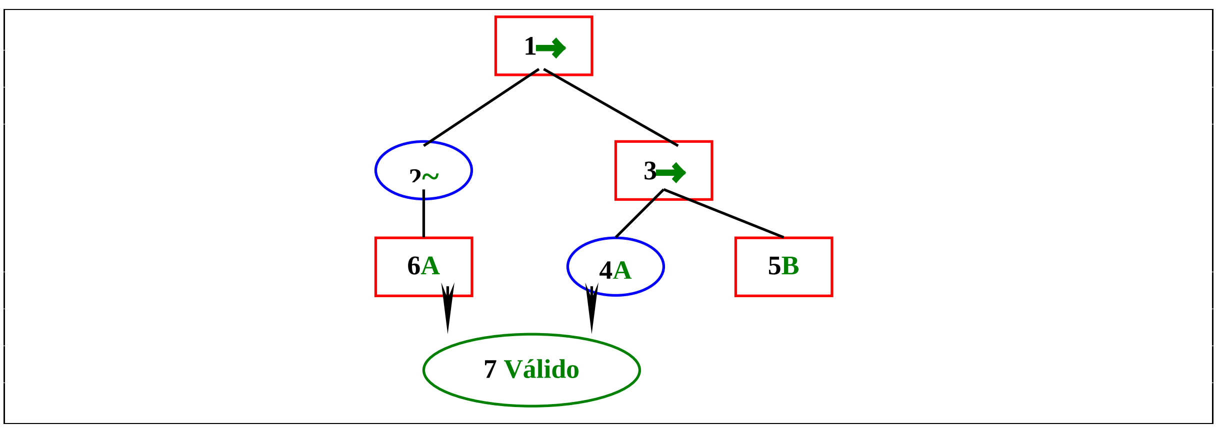
Si interpretamos un enunciado marcado con círculo como verdadero y un enunciado marcado con cuadro como falso, podemos verificar que las reglas de forzamiento sólo generan enunciados que se siguen lógicamente de las premisas, también podemos verificar que dado un sistema deductivo para la lógica clásica, los árboles de forzamiento de todos sus axiomas están mal marcados, podemos así concluir que:

Un enunciado (o argumento) es válido (no existe una asignación de valores de verdad que lo refute) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado (o al argumento) está mal marcado, es decir, un enunciado (o argumento) es inválido (existe una asignación de valores de verdad que lo refuta) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado (o al argumento) está bien marcado.
Si un árbol de forzamiento semántico asociado a un enunciado (o argumento) está bien marcado, la interpretación de las marcas de sus hojas nos proporciona una asignación de valores de verdad que refuta el enunciado (o argumento).
Podemos concluir que los árboles de forzamiento semántico nos proporcionan un método de decisión para el cálculo proposicional clásico.

1.7 Algunos teoremas importantes

Las preguntas naturales en éste punto están relacionadas con la validez de los siguientes principios: Principio de no contradicción $\sim(A\wedge\sim A)$, principio del tercero excluido $A\vee\sim A$, principio de trivialización $A\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$, principio de reducción al absurdo débil $(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\sim B)\rightarrow\sim A]$, principio de reducción al absurdo fuerte $(\sim A\rightarrow B)\rightarrow[(\sim A\rightarrow\sim B)\rightarrow A]$ negación de la conjunción $\sim(A\wedge B)\leftrightarrow(\sim A\vee\sim B)$, negación de la disyunción $\sim(A\vee B)\leftrightarrow(\sim A\wedge\sim B)$, negación del condicional $\sim(A\rightarrow B)\leftrightarrow(A\wedge\sim B)$, negación del bicondicional $\sim(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(A\wedge\sim B)\vee(\sim A\wedge B)$, negación de la negación $\sim\sim A\leftrightarrow A$, contrarrecíproca $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$, implicación material $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\sim A\vee B)$, silogismo disyuntivo $((A\vee B)\wedge\sim A)\rightarrow B$ y modus tollens $((A\rightarrow B)\wedge\sim B)\rightarrow\sim A$.

1.7.1 Principio de Trivialización: $\models \sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$



JUSTIFICACIONES

1. FR. 2, 3. F→ en 1. 4, 5. F→ en 3.
6. A~ en 2. 7. DM en 6 y 4.

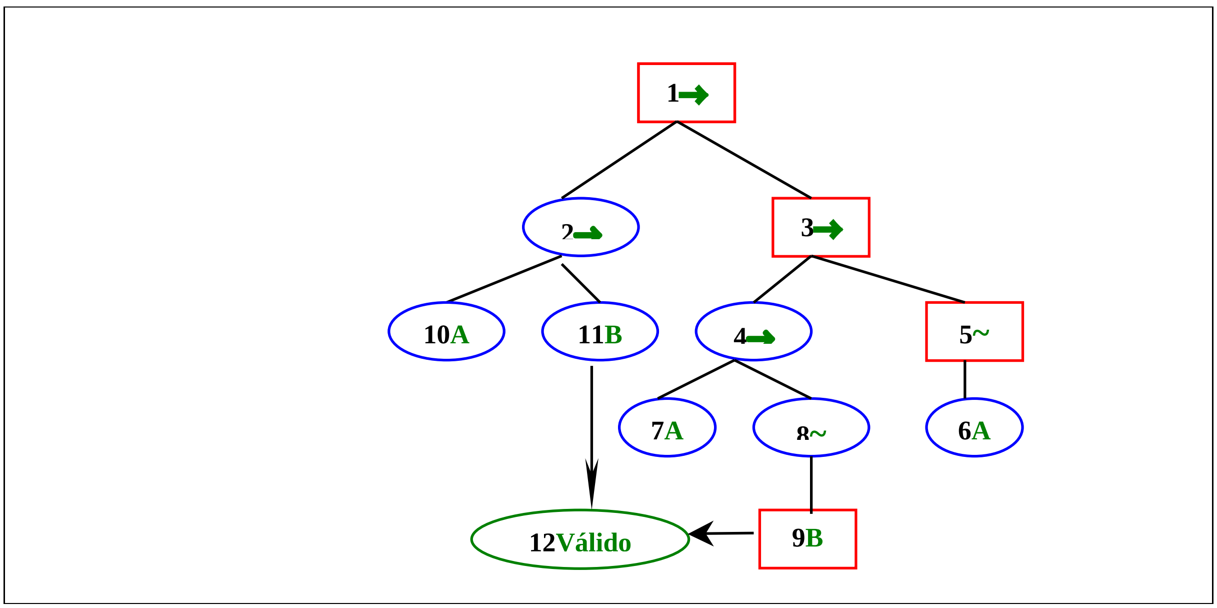
El anterior resultado indica que la lógica clásica no soporta contradicciones, es decir: de un enunciado y su negación se puede deducir cualquier otro enunciado (el sistema se triviali

za)[3], por lo que la lógica clásica no sirve de base para teorías inconsistentes, puesto que las hace triviales, es decir, las teorías serían completamente inútiles.
Para fundamentar teorías inconsistentes pero no triviales, debe tenerse una lógica de base en la cual el principio de trivialización no sea válido, es decir, una lógica que soporte las inconsistencias, tales lógicas son llamadas Lógicas Paraconsistentes.
Más adelante se presenta el operador negación débil, el cual no trivializa las teorías inconsistentes.

1.7.2 Reducción al Absurdo Débil: $\models (A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A\}$

JUSTIFICACIONES

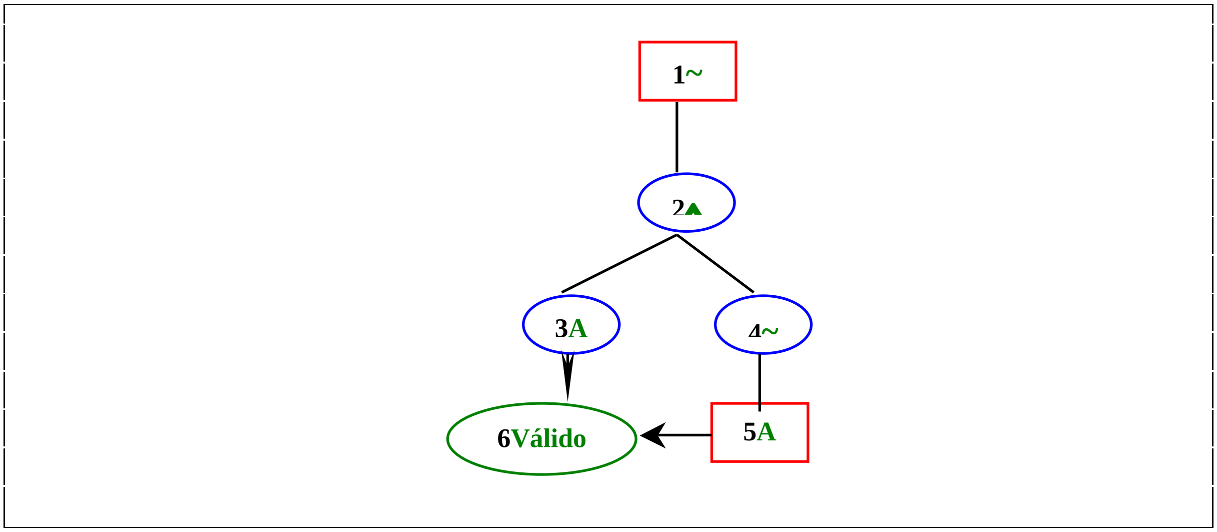
1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.
6. F~ en 5.	7. IA en 6.	8. AIA→ en 7 y 4.
9. A~ en 8.	10. IA en 6.	11. AIA→ en 10 y 2.
12. DM en 11 y 9.		



Del anterior resultado se concluye que cuando se quiere probar que un enunciado es rechazado, basta suponer que es aceptado y obtener a partir de éste supuesto otro enunciado y la negación de éste, es decir una contradicción.

[3] Una teoría es *inconsistente* con respecto a un operador negación * con una lógica de base L sii existe un enunciado A tal que la teoría tiene como consecuencia con la lógica L tanto A como *A. Una teoría es *trivial* con una lógica de base L sii la teoría tiene como consecuencia con la lógica L todas las fórmulas.

1.7.3 Principio de No Contradicción: ⊨ ~ (A∧~A)

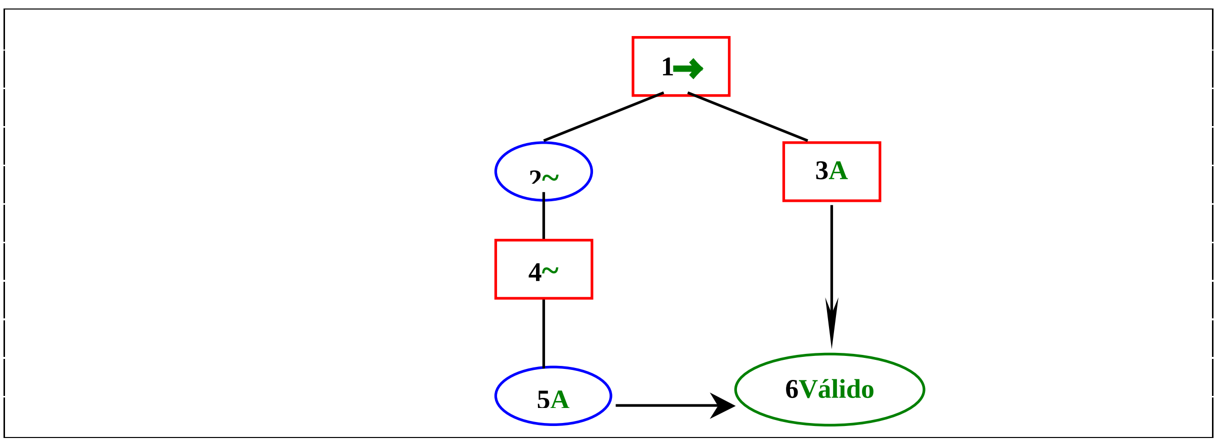


JUSTIFICACIONES

1. FR. 2. F~ en 1. 3, 4. A∧ en 2.
5. A~ en 4. 6. DM en 3 y 5.

Éste resultado puede leerse: un enunciado no puede ser a la vez aceptado y rechazado.

1.7.4 Eliminación de la Doble Negación: ⊨ ~~A → A

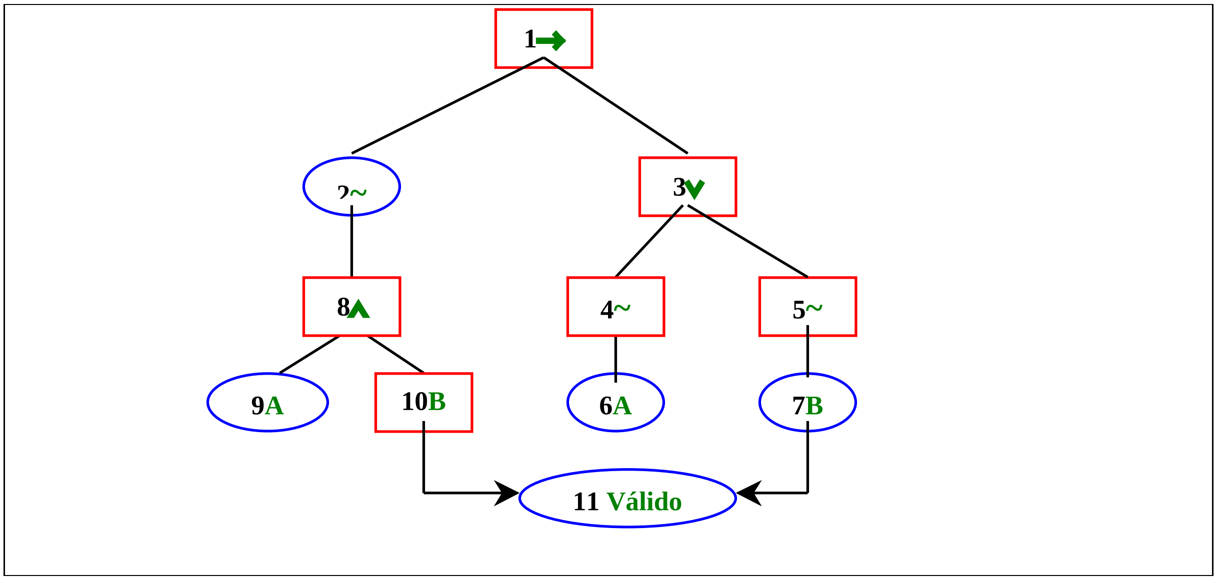


JUSTIFICACIONES

1. FR. 2, 3. F→ en 1. 4. A~ en 2.
5. F~ en 4. 6. DM en 5 y 3.

Éste resultado puede leerse: si es rechazada el rechazo de un enunciado entonces éste enunciado es aceptado.

1.7.5 Negación de la Conjunción: $\models \sim(A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee \sim B$



JUSTIFICACIONES

1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F∨ en 3.
6. F~ en 4.	7. F~ en 5.	8. A~ en 8.
9. IA en 6.	10. AIF∧ en 9 y 8.	11. DM en 10 y 7.

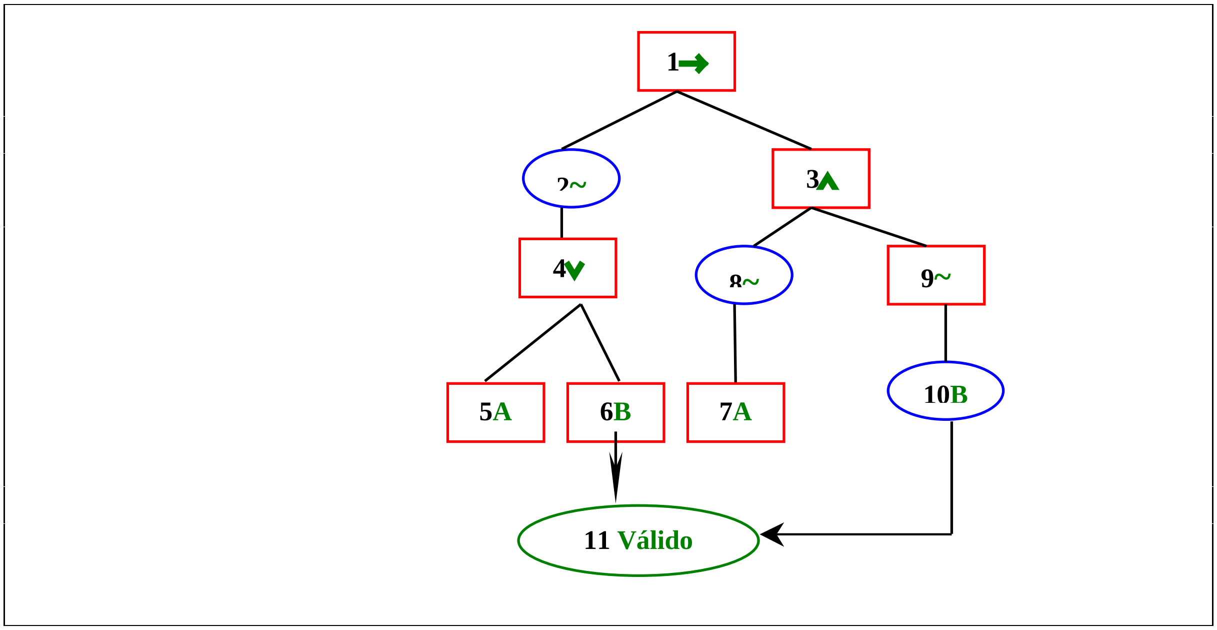
El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Si es rechazado que ambos son aceptados entonces uno de los dos es rechazado.

1.7.6 Negación de la Disyunción: $\models \sim(A \vee B) \rightarrow \sim A \wedge \sim B$

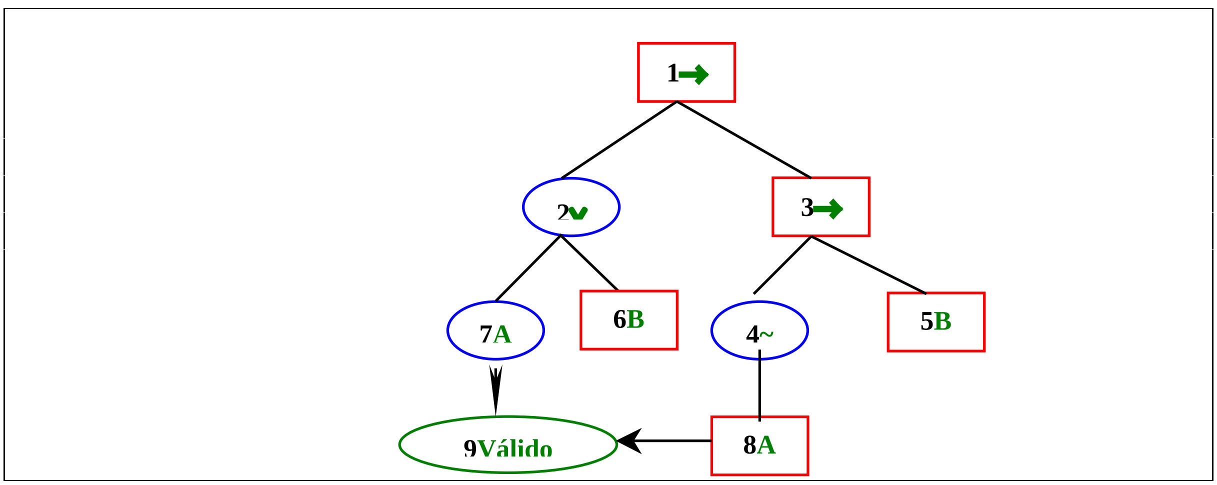
JUSTIFICACIONES

1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4. A~ en 2.
5, 6. F∨ en 4.	7. IF en5.	8. FA~ en 7.
9. AIF∧ en 8 y 3.	10. F~ en 9.	11. DM en 6 y 10.

El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Si es rechazado que uno de los dos sea aceptado entonces ambos son rechazados.



1.7.7 Silogismo Disyuntivo: ⊨ A∨B → (~A → B)

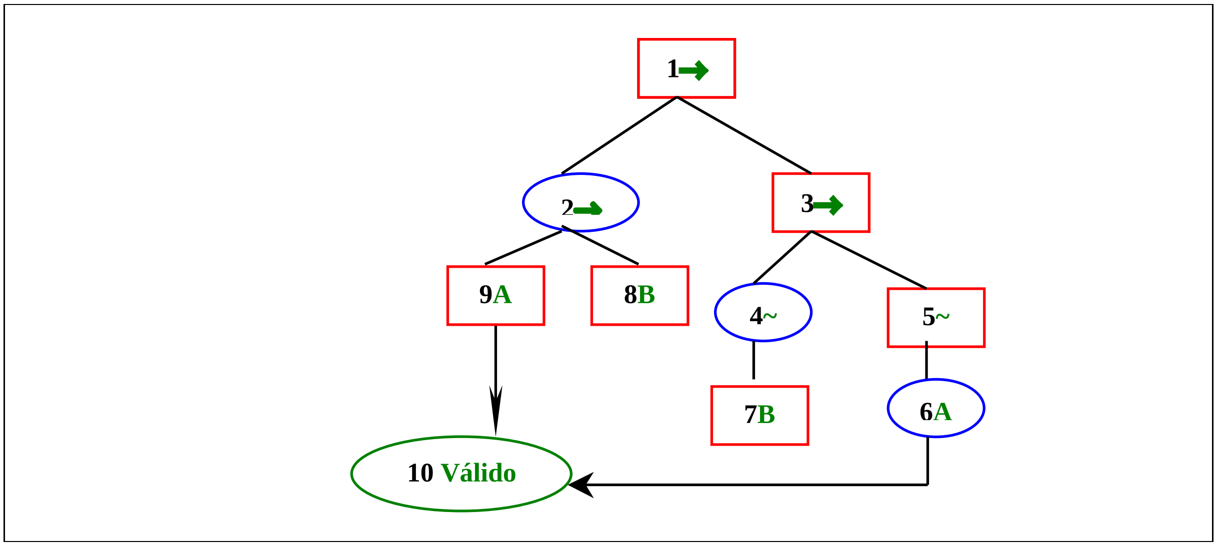


JUSTIFICACIONES

1. FR. 2, 3. F→ en 1. 4, 5. F→ en 3.
6. IF en 5. 7. FDA∨ en 6 y 2. 8. A~ en 4.
9. DM en 7 y 8.

El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Si al menos uno de dos enunciados es aceptado y uno de ellos es rechazado entonces el otro es aceptado.

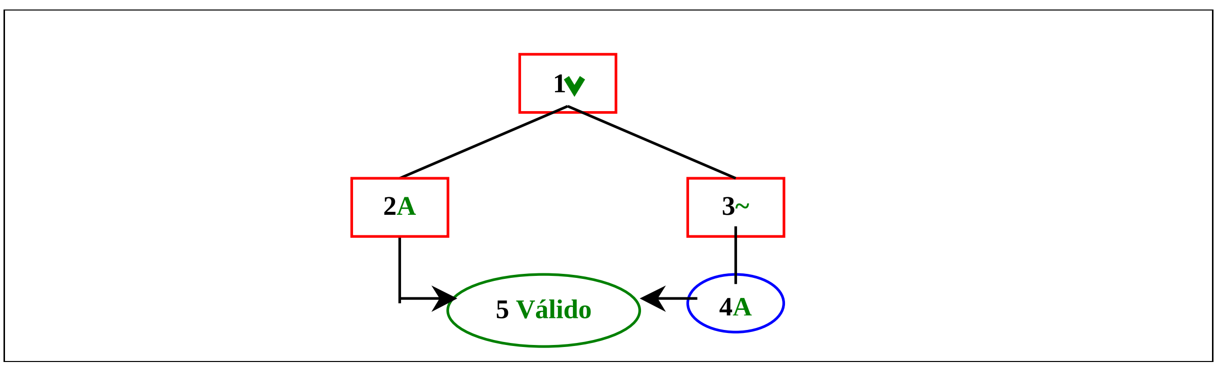
1.7.8 Contrarrecíproca Débil $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$



JUSTIFICACIONES

1. FR. 2, 3. F→ en 1. 4, 5. F→ en 3.
6. F~ en 5. 7. A~ en 4. 8. IF en 7.
9. FDA→ en 8 y 2. 10. DM en 9 y 6.

1.7.9 Tercero Excluido: $\models A \vee \sim A$



JUSTIFICACIONES

1. FR. 2, 3. F∨ en 1. 4. F~ en 3.
5. DM en 2 y 4.

El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Un enunciado es aceptado o es rechazado. Éste resultado junto con el principio de no contradicción dicen que un enunciado es aceptado o rechazado pero no ambos.

2. Árboles de Forzamiento Semántico para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica[4] - LBPco

Los árboles de forzamiento semántico para el sistema de Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica LBPco, se obtienen a partir de los árboles de forzamiento semántico clásicos, agregando otro operador de negación llamado **Negación Débil (¬)** junto con reglas de inferencia similares a las del operador **Negación Clásica (~)** pero debilitadas.

Para obtener el sistema LBPco, no se toman las reglas Afirmación de la Negación Débil (A¬) y Afirmación del Alcance de la Negación Débil (AA¬), éstas reglas sólo podrán ser aplicadas a una fórmula cuando dicha fórmula sea incompatible con su negación, es decir cuando A^I sea aceptada (la fórmula A^I se lee: A es incompatible con su negación). Tampoco se toman las reglas Falsedad de la Negación Débil (F¬) y Falsedad del Alcance de la Negación Débil (FA¬), éstas reglas sólo podrán ser aplicadas a una fórmula cuando dicha fórmula sea completa respecto a la negación, es decir cuando A^C sea aceptada (La fórmula A^C se lee: A es completa).

Con éste debilitamiento puede ocurrir que una fórmula y su negación débil estén marcadas con círculo (sean ambas aceptadas) y no se genere doble marca, es decir, la fórmula y su negación son compatibles. También puede ocurrir que una fórmula y su negación débil estén marcadas con cuadro (sean ambas rechazadas) y no se genere doble marca, es decir, la fórmula es incompleta respecto a la negación.

Los árboles de una incompatibilidad y una completez tienen la siguiente forma (A* = el árbol de A y X es I o C):

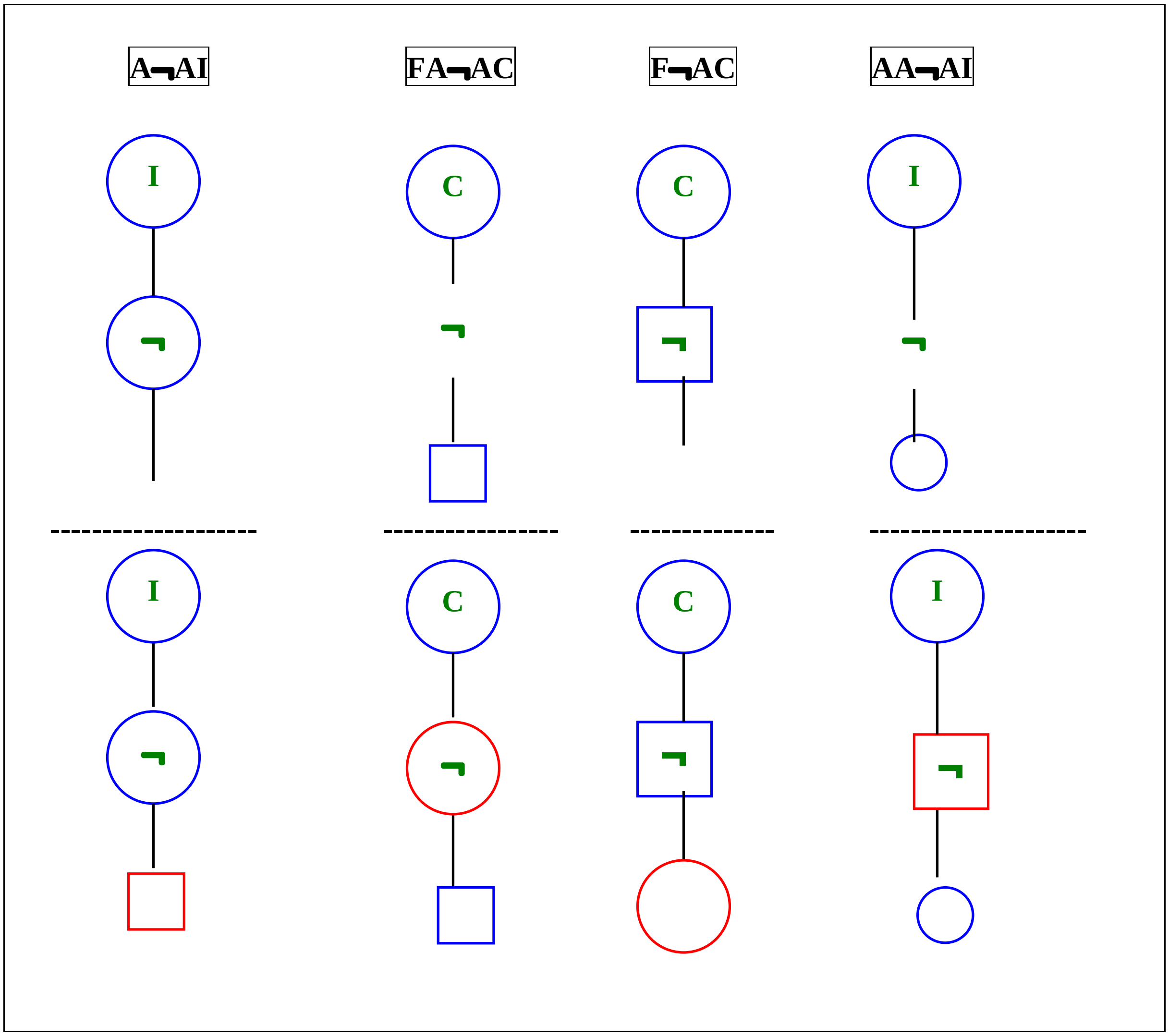
$$(A^X)^* = \begin{array}{c} X \\ | \\ \neg \\ | \\ A^* \end{array}$$

2.1 Reglas de inferencia para la Negación Débil

A¬AI (Afirmación de la Negación y Afirmación de la Incompatibilidad): Los enunciados cuestionados que son incompatibles con su negación son rechazados.

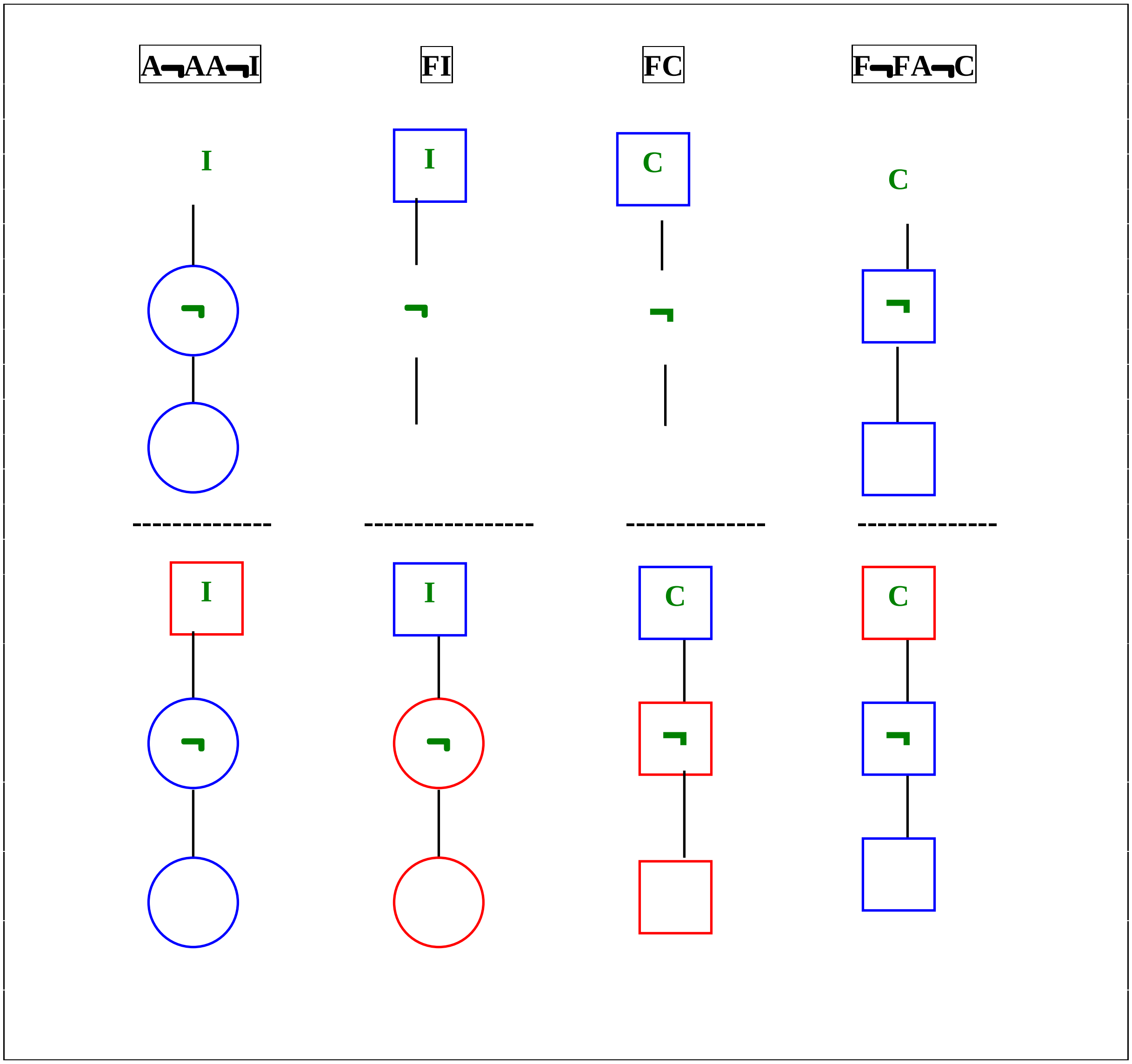
[4] El fragmento correspondiente a la Lógica básica paraconsistente fue presentado por primera vez en el VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas celebrado en la ciudad de Pasto en septiembre de 2001. Presentado en [Sierra01b]. Los árboles de forzamiento semántico para el sistema LBPcoC fueron presentados por primera vez en el XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones celebrado en Bogotá en junio de 2002.

FA¬AC (Falsedad del Alcance de la Negación y Afirmación de la Completez): Los enunciados determinables que son rechazados, son cuestionados.
F¬AC (Falsedad de la Negación y Afirmación de la Completez): Los enunciados determinables que no son cuestionados, son aceptados.



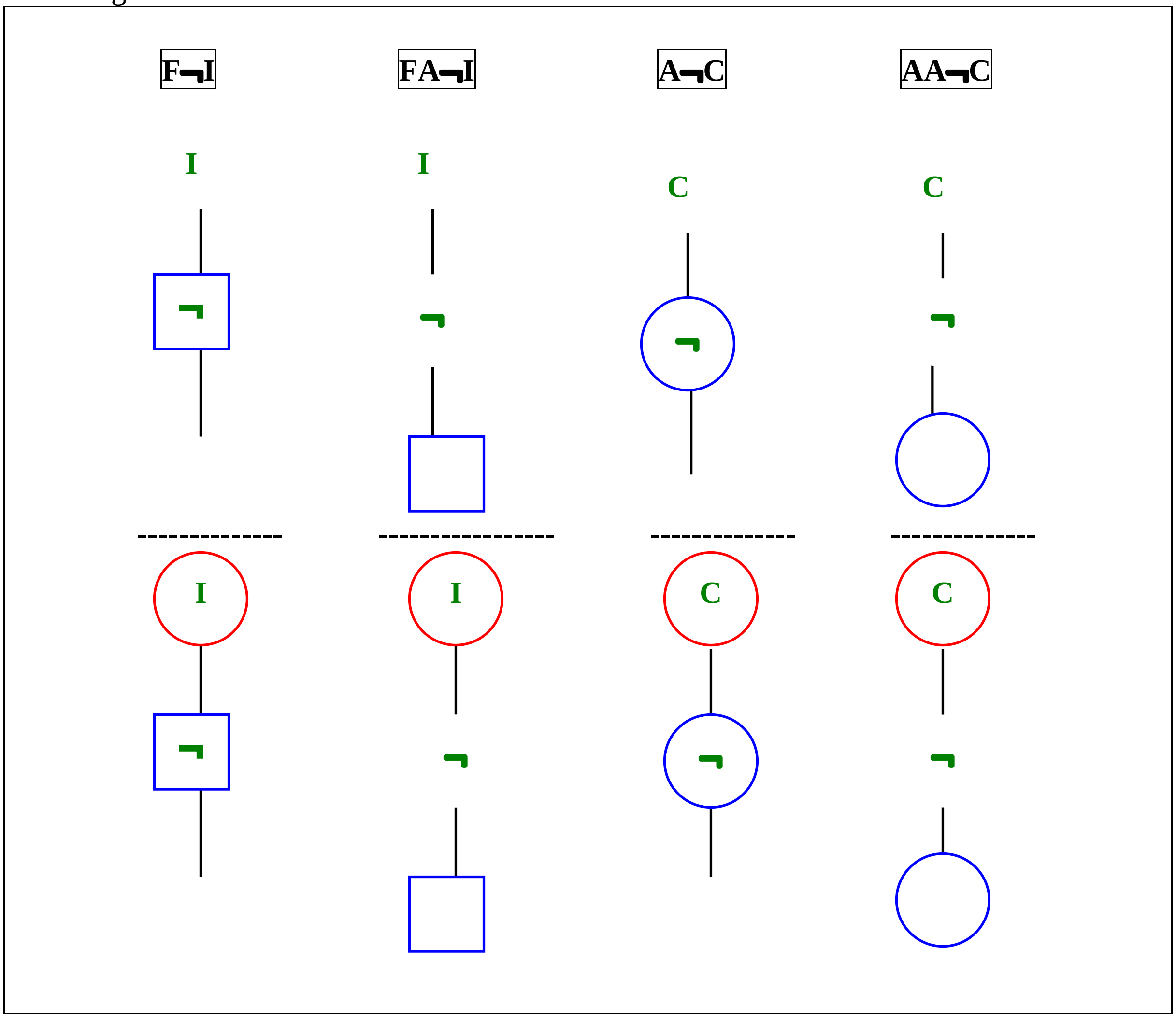
AA¬AI (Afirmación del Alcance de la Negación y Afirmación de la Incompatibilidad): No son cuestionados los enunciados que se aceptan y además sean incompatibles con su negación.
A¬AA¬I (Afirmación de la Negación y Afirmación del Alcance de la Negación en la Incompatibilidad: Los enunciados que son aceptados y cuestionados son compatibles con su negación.
FI (Falsedad de la Incompatibilidad: Los enunciados compatibles con su negación se aceptan y se cuestionan.

F¬I (Falsedad de la Negación en la Incompatibilidad: Si un enunciado no es cuestionado entonces es incompatible con su negación.
FA¬I (Falsedad del Alcance de la Negación en la Incompatibilidad: Si un enunciado es rechazado entonces es incompatible con su negación.
A¬C (Afirmación de la Negación en la Completez): Un enunciado es determinable cuando es cuestionado.



AA¬C (Afirmación del Alcance de la Negación en la Completez): Un enunciado es determinable cuando es aceptado.
FC (Falsedad de la Completez): Cuando un enunciado no es determinable, ni se acepta ni se rechaza.
F¬FA¬C (Falsedad de la Negación Falsedad del Alcance de la Negación en la Completez): Cuando un enunciado es rechazado y no es cuestionado, es indeterminable.

Observar que basta tomar como **primitivas** las reglas **A¬AI, FI, FA¬AC y FC** ya que las otras reglas son derivadas de éstas.

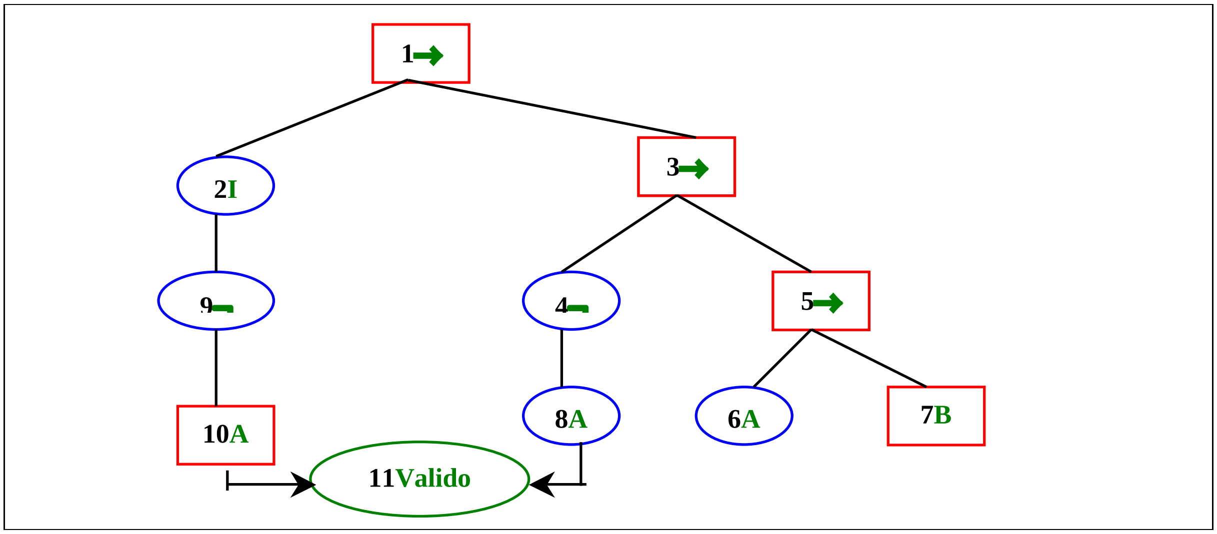


2.2 Algunas consecuencias

Las preguntas naturales en éste punto están relacionadas con la validez de los siguientes principios, los cuales son válidos cuando la negación es clásica:

Principio de no contradicción $\neg(A\wedge\neg A)$, principio del tercero excluido $A\vee\neg A$, Principio de trivialización $A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$, principio de reducción al absurdo $(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]$, negación de la conjunción $\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$, negación de la diyunción $\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)$, negación del condicional $\neg(A\rightarrow B)\leftrightarrow(A\wedge\neg B)$, negación del bicondicional $\neg(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow[(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)]$, negación de la negación $\neg\neg A\leftrightarrow A$, contrarrecíproca $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$, etc.

2.2.1 Principio de Trivialización: $\models A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$



JUSTIFICACIONES

1. FR.
2, 3. F→ en 1.
4, 5. F→ en 3.
6, 7. F→ en 5.
8. IA en 6.
9. IA en 4.
10. A¬AI en 2 y 9
11. DM en 8 y 10.

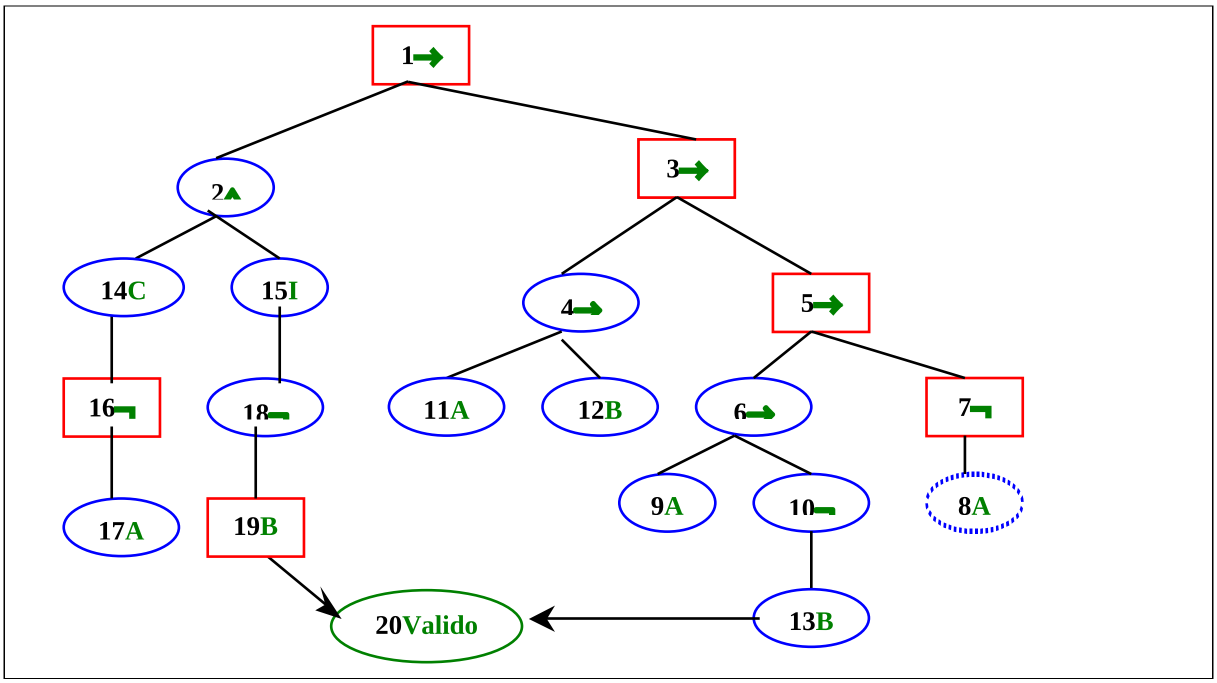
Los pasos 1, …, 11 indican que es válido el enunciado $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$. Los pasos 3, …, 8 indican que el enunciado $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, ¬A=1 y B=0, los modelos en los cuales ocurre que un enunciado y su negación son aceptados se llaman Modelos Inconsistentes[5].
La no validez del enunciado $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (principio de trivialización) indica que el sistema LBPcoC soporta las contradicciones, es decir, pueden tenerse como teoremas los enunciados A y ¬A y a pesar de ello el sistema no se trivializa (demuestra todas las fórmulas).

[5] Los *modelos consistentes respecto al operador negación* ~ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos, los cuales satisfacen la siguiente definición (para M un modelo, A y B fórmulas, p fórmula atómica): M satisface p sii $p \in M$. M satisface ~A sii M no satisface A. M satisface $A \wedge B$ sii M satisface A y M satisface B. M satisface $A \vee B$ sii M satisface A o M satisface B. M satisface $A \rightarrow B$ sii M no satisface A o M satisface B. Los *modelos inconsistentes (y completos) respecto al operador negación débil* ¬ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbitrarios, los cuales satisfacen la siguiente definición: M satisface ¬A sii M no satisface A o $\neg A \in M$. Los *modelos incompletos (y consistentes) respecto al operador negación débi* ¬ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbitrarios, los cuales satisfacen la siguiente definición: M satisface ¬A sii M no satisface A y $\neg A \in M$. Los *modelos incompletos e inconsistentes respecto al operador negación débi* ¬ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbitrarios.

2.2.2 Reducción al Absurdo Débil: $\models A^C \wedge B^I \to [(A \to B) \to \{(A \to \neg B) \to \neg A\}]$

JUSTIFICACIONES

1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.
6, 7. F→ en 5.	8. Opción.	9. IA en 8.
10. AIA→ en 9 y 6.	11. IA en 8.	12. AIA→ en 11 y 4.
13. IA en 12.	14, 15. A∧ en 2.	16. IF en 7.
17. F¬AC en 16 y 14.	18. IA en 10.	19. A¬AI en 18 y 15.
20. DM en 13 y 19.		



Los pasos 1, …, 20 indican que es válido el enunciado $A^C \wedge B^I \to [(A \to B) \to \{(A \to \neg B) \to \neg A\}]$. Los pasos 3, …, 13 indican que el enunciado $(A \to B) \to \{(A \to \neg B) \to \neg A\}$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, ¬A=0, B=1 y ¬B=1. Observar que en análisis final el paso 8 no es una opción ya que se infiere en el paso 17.

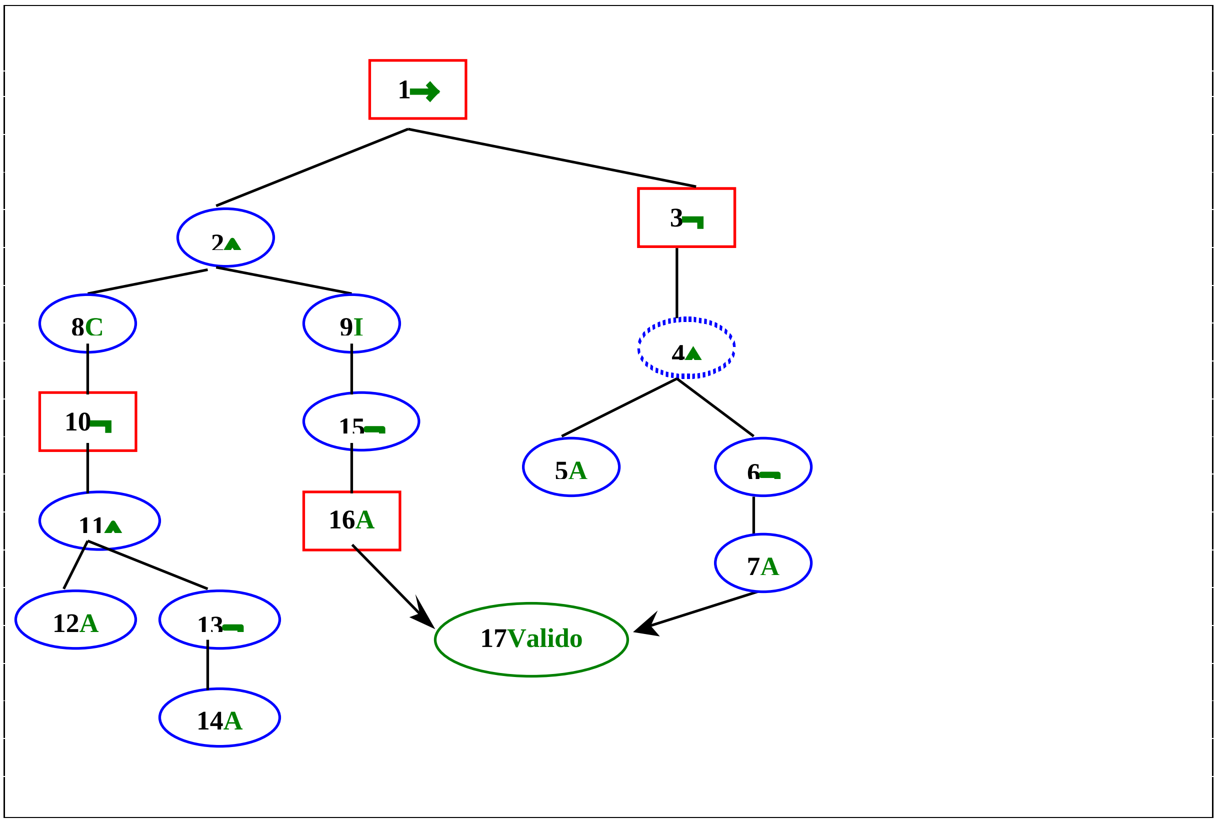
2.2.3 Principio de No Contradicción $\models (A \wedge \neg A)^C \wedge A^I \to \neg(A \wedge \neg A)$

JUSTIFICACIONES

1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4. Opción.
5, 6. A∧ en 4.	7. IA en 5.	8, 9. A∧ en 2.
10. IF en 3.	11. F¬AC en 10 y 8.	12, 13. A∧ en 11.
14. IA en 12.	15. IA en 13.	16. A¬AI en 15 y 9.

17. DM en 16 y 7.

Los pasos 1, …, 17 indican que es válido el enunciado $(A\wedge\neg A)^C\wedge A^I\rightarrow\neg(A\wedge\neg A)$. Los pasos 3, …, 7 indican que el enunciado $\neg(A\wedge\neg A)$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, ¬A=1 y $\neg(A\wedge\neg A)=0$. Observar que en análisis final el paso 4 no es una opción ya que se infiere en el paso 11. El anterior resultado indica que no es válido el principio de no contradicción para la negación débil, el cual es uno de los teoremas fundamentales de la lógica clásica.

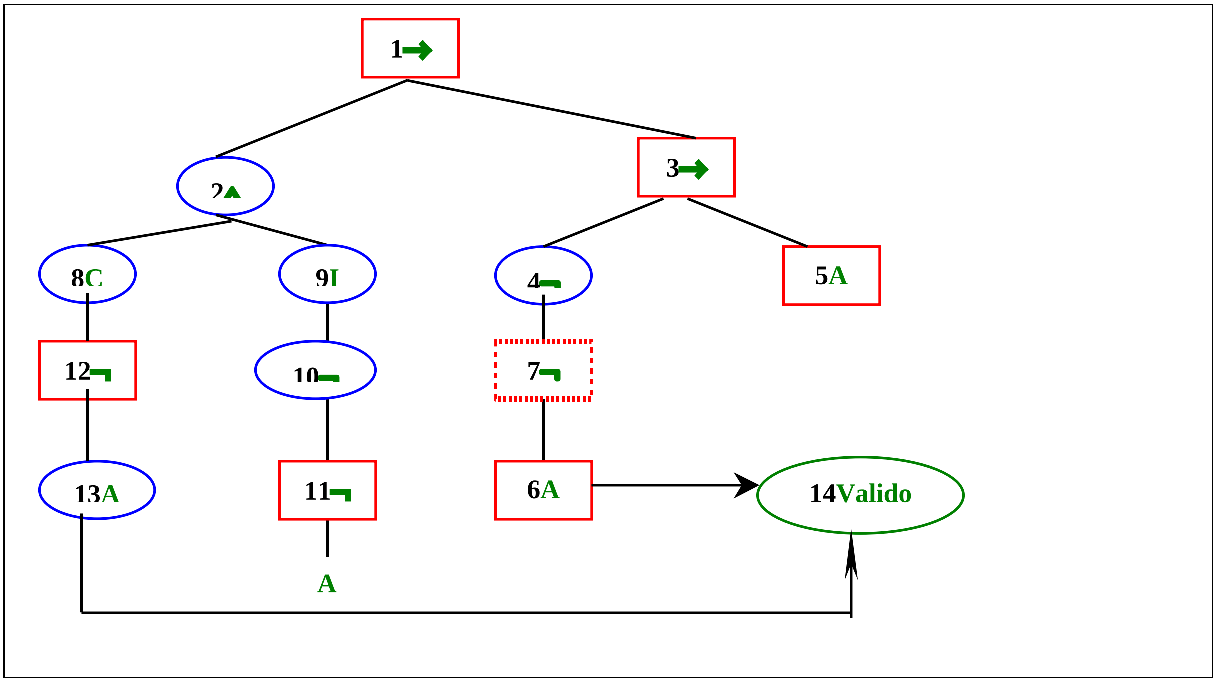


2.2.4 Eliminación de la Doble Negación: $\models (A^C\wedge(\neg A)^I)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$

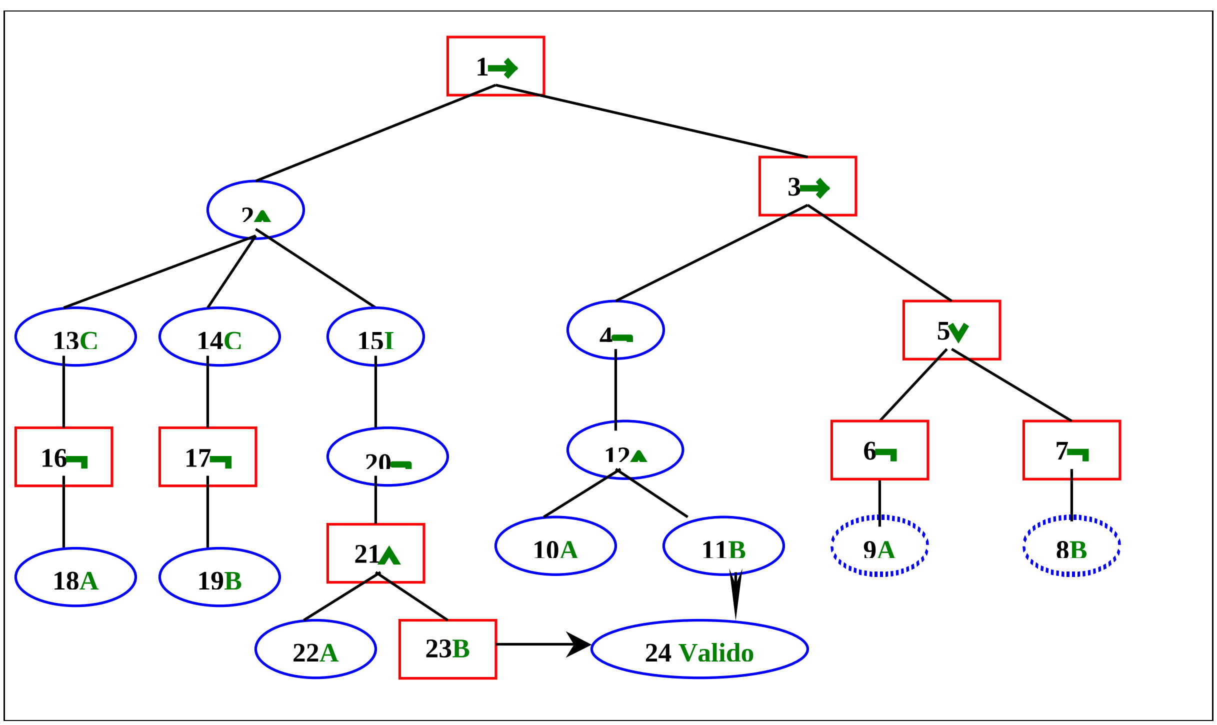
JUSTIFICACIONES

1. FR.
2, 3. F→ en 1.
4, 5. F→ en 3.
6. IF en 5.
7. Opción.
8, 9. A∧ en 2.
10. IA en 4.
11. A¬AI en 10 y 9.
12. IF en 11.
13. F¬AC en 12 y 8.
14. DM en 6 y 13.

Los pasos 1, …, 14 indican que el enunciado $(A^C\wedge(\neg A)^I)\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$ es válido, los pasos 3, …, 7 indican que el enunciado $\neg\neg A\rightarrow A$ es inválido y que es refutado por un modelo en el que A=0, ¬A=0 y ¬¬A=1. Observar que en análisis final el paso 7 no es una opción ya que se infiere en el paso 12.



2.2.5 Negación de la Conjunción: $\models\ [A^{C} \wedge B^{C} \wedge (A \wedge B)^{I}] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$

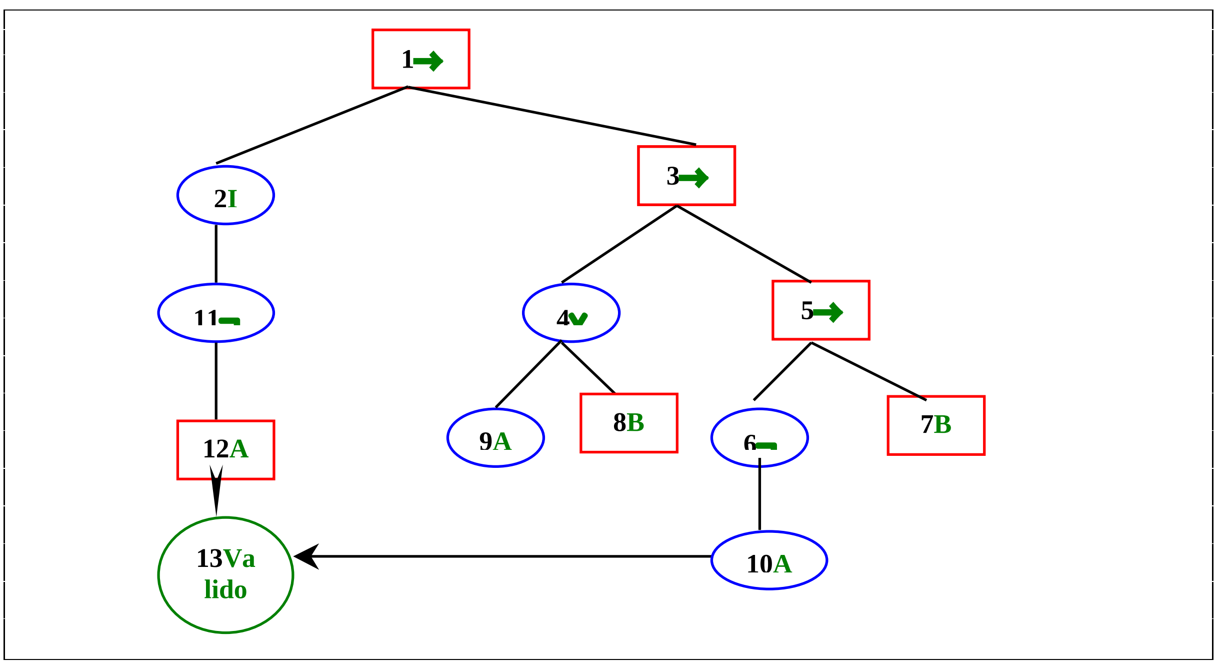


JUSTIFICACIONES

1. FR.
2, 3. F→ en 1.
4, 5. F→ en 3.
6, 7. F∨ en 5.
8. Opción.
9. Opción.
10. IA en 9.
11. IA en 8.
12. AIAD∧ en 10 y 11.
13, 14 y 15. A∧ en 2.
16. IF en 6.
17. IF en 7.
18. F¬AC en 16 y 13.
19. F¬AC en 17 y 14.
20. IA en 4.
21. A¬AI en 20 y 15.
22. IA en 18.
23. AIF∧ en 22 y 21.
24. DM en 23 y 11.

De los pasos 1, …, 24 se concluye que $[A^C \wedge B^C \wedge (A \wedge B)^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ es válida. De los pasos 3, …, 12 se concluye que $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ es inválida, y que es refutada por un modelo en el cual A=1, B=1, ¬A=0, ¬B=0 y ¬(A∧B)=1. Observar que en el análisis final los pasos 8 y 9 no no son opciones ya que se infieren en los pasos 18 y 19. Se observa de los pasos 6 y 7 que A y B son incompatibles con su negación, por lo que también es invalido $(A^I \wedge B^I) \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$.

2.2.6 Silogismo Disyuntivo: $\models A^I \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$



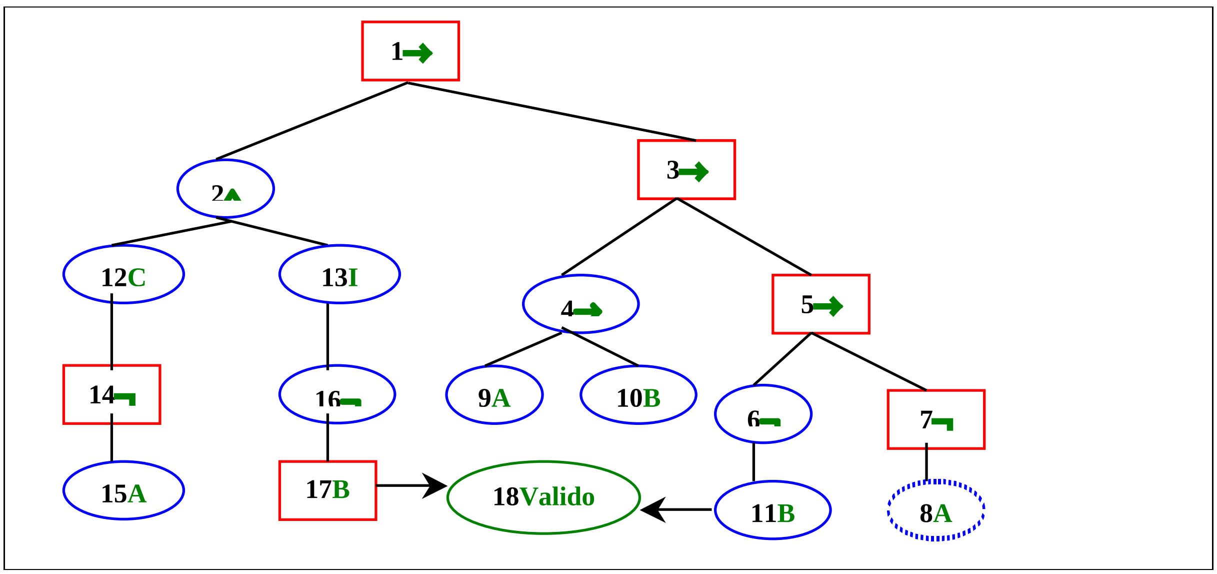
JUSTIFICACIONES

1. FR.
2, 3. F→ en 1.
4, 5. F→ en 3.
6, 7. F→ en 5.
8. IF en 7.
9. FDA∨ en 8 y 4.
10. IA en 9.
11. IA en 6.
12. A¬AI en 11 y 2.

13. DM en 12 y 10.

Los pasos 1, …, 13 indican que es válido el enunciado $A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$. Los pasos 3, …, 10 indican que el enunciado $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, B=0, ¬A=1.
Observar que el anterior enunciado está representando el Silogismo Disyuntivo (de A∨B y ¬A se sigue B), se tiene entonces que el Silogismo Disyuntivo es válido sólo si el enunciado negado es incompatible con su negación.

2.2.7 Contrarrecíproca Débil: $\models (A^{C}\wedge B^{I})\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$



JUSTIFICACIONES

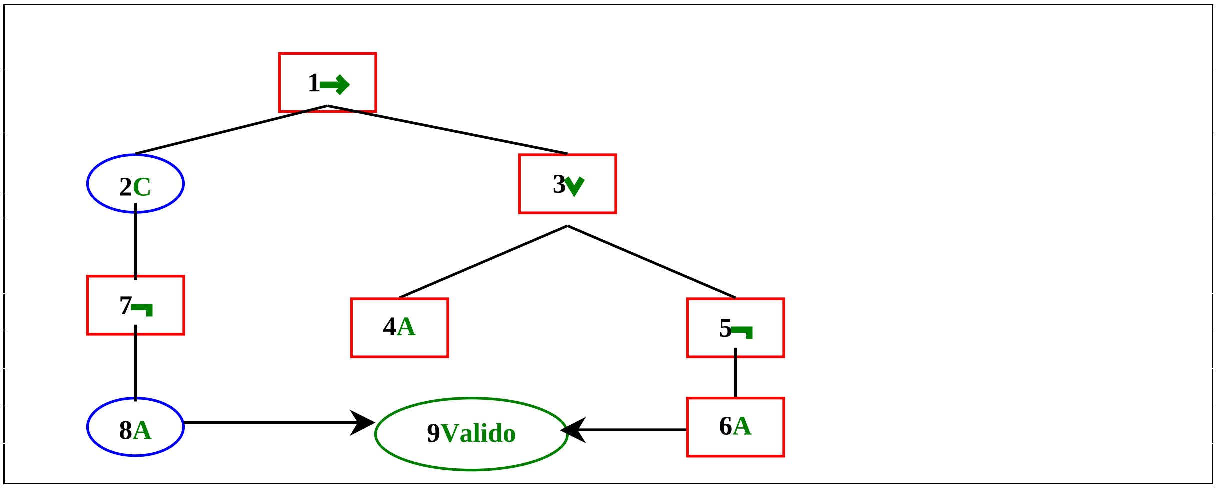
1. FR.
2, 3. F→ en 1.
4, 5. F→ en 3.
6, 7. F→ en 5.
8. Opción.
9. IA en 8.
10. AIA→ en 9 y 4.
11. IA en 10.
12, 13. A∧ en 2.
14. IF en 7.
15. F¬AC en 14 y 12.
16. IA en 6.
17. A¬AI en 16 y 13.
18. DM en 17 y 11.

Los pasos 1, …, 18 indican que es válido el enunciado $(A^{C}\wedge B^{I})\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg B)]$. Los pasos 3, …, 11 indican que el enunciado $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, B=1, ¬B=1 y ¬A=0. Observar que en análisis final el paso 8 no es una opción ya que se infiere en el paso 15.
Observar que el anterior enunciado está representando el Modus Tollens (de A→B y ¬B se sigue ¬A), se tiene entonces que el Modus Tollens es válido sólo si el antecedente es completo y el consecuente es incompatible con su negación.

2.2.8 Tercero Excluido: $\models A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$

JUSTIFICACIONES

1. FR.	2, 3. F$\rightarrow$ en 1.	4, 5. F$\vee$ en 3.
6. IF en 4.	7. IF en 5.	8. F$\neg$AC en 7 y 2.
9. DM en 8 y 6.		



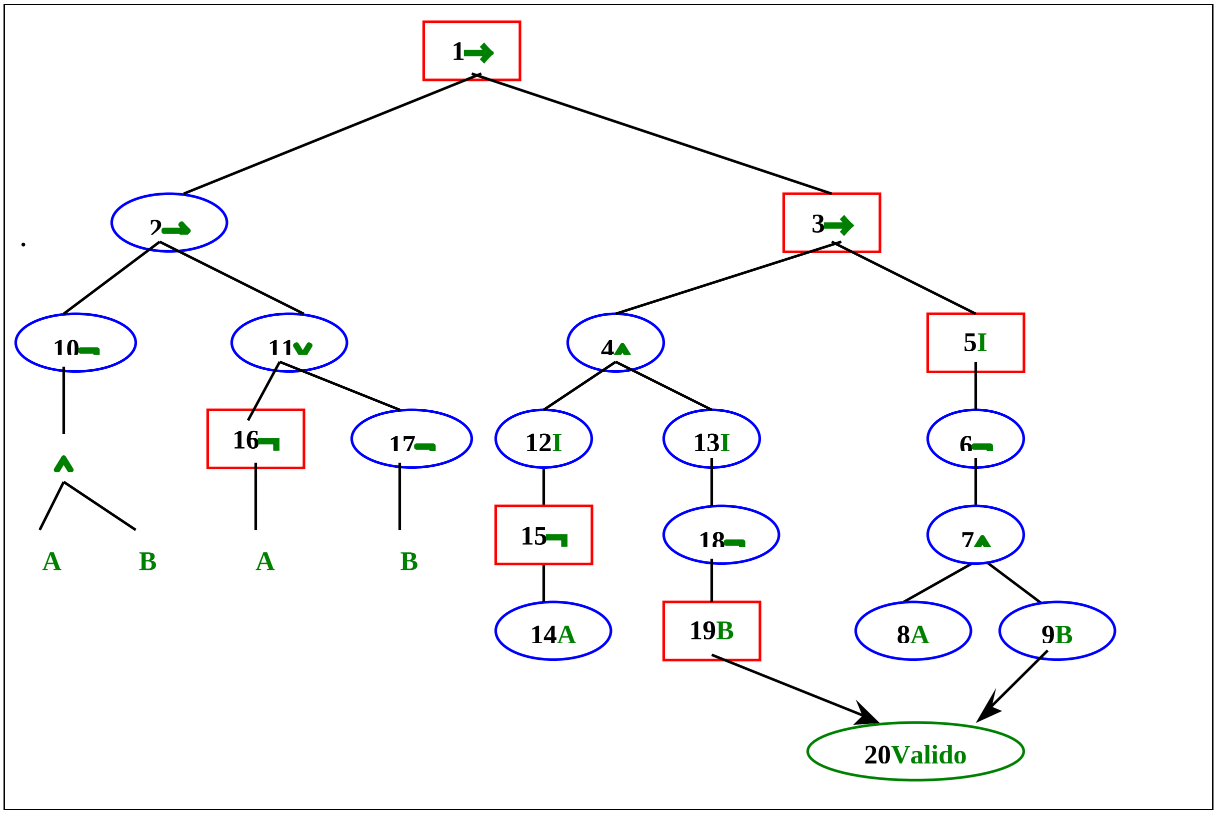
Los pasos 1, ..., 9 indican que $A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$ es válido. Los pasos 3, ..., 6 indican que $A \vee \neg A$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=0 y ¬A=0. El principio del tercero excluido o principio de no indeterminación es válido sólo cuando el enunciado es completo.

2.2.9 Preservación de la Incompatibilidad con la Conjunción: $\models [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)] \rightarrow [(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \wedge B)^I]$

JUSTIFICACIONES

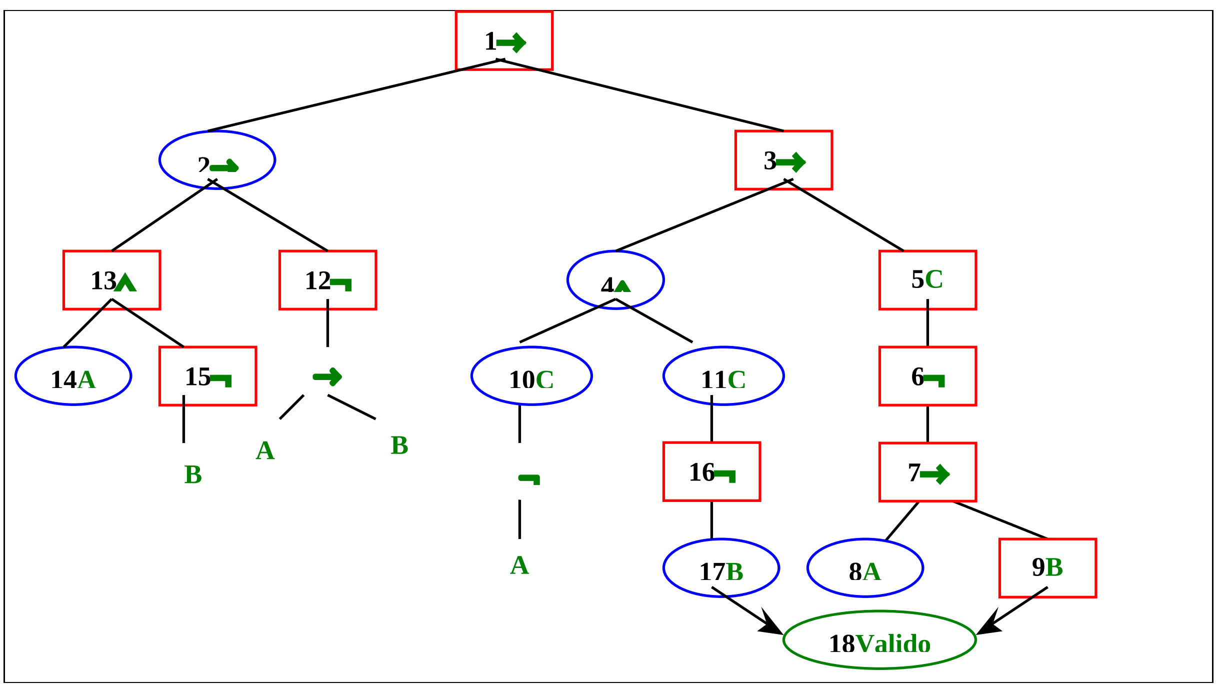
1. FR.	2, 3. F$\rightarrow$ en 1.	4, 5. F$\rightarrow$ en 3.
6, 7. FI en 5.	8, 9. A$\wedge$ en 7.	10. IA en 6.
11. AIA$\rightarrow$ en 10 y 2.	12, 13. A$\wedge$ en 4.	14. IA en 8.
15. AA$\neg$AI en 14 y 12.	16. IF en 15.	17. FIA$\vee$ en 16 y 11.
18. IA en 17.	19. A$\neg$AI en 18 y 13.	20. DM en 19 y 9.

Los pasos 1, …, 20 indican que es válido el enunciado $[\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)] \rightarrow [(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \wedge B)^I]$. El enunciado $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \wedge B)^I$ es inválido y es refutado por un modelo en el cual A=1, ¬A=0, B=1, ¬B=0 y ¬(A∧B)=1.



2.2.10 Preservación de la Completez con el Condicional:

$$\models \; [\, (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \,] \rightarrow [\, (B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \rightarrow B)^C \,]$$



JUSTIFICACIONES

1. FR.	2, 3. F$\rightarrow$ en 1.	4, 5. F$\rightarrow$ en 3.
6, 7. FC en 5.	8, 9. F$\rightarrow$ en 7.	10, 11. A$\wedge$ en 4.
12. IF en 6.	13. FDA$\rightarrow$ en 12 y 2.	14. IA en 8.
15. AIF$\wedge$ en 14 y 13.	16. IF en 15.	17. F$\neg$AC en 16 y 11.
18. DM en 17 y 9.		

Los pasos 1, …, 18 indican que es válido el enunciado $[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[(B^C\wedge A^C)\rightarrow(A\rightarrow B)^C]$. El enunciado $(B^C\wedge A^C)\rightarrow(A\rightarrow B)^C$ es inválido y es refutado por un modelo en el cual A=1, B=0, $\neg$B=1 y $\neg(A\rightarrow B)=0$. También es válido $[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[B^C\rightarrow(A\rightarrow B)^C]$.

3. Sistema deductivo para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta[6]

3.1 Axiomas para la lógica positiva clásica[7]

3.1.1 Axiomas para el condicional ($\rightarrow$)

Axioma 1. Irrelevancia del antecedente: Si el consecuente de un condicional es aceptado entonces el condicional es aceptado.

$$A\rightarrow(B\rightarrow A)$$

Axioma 2. Distributividad de $\rightarrow$: Si al aceptar dos enunciados se acepta un tercero y si del primero se sigue el segundo entonces al aceptar el primero se acepta el tercero.

$$[A\rightarrow(B\rightarrow C)]\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)]$$

Axioma 3. Ley de Peirce: Si se acepta que de un condicional se siga su antecedente entonces se acepta el antecedente.

$$[(A\rightarrow B)\rightarrow A]\rightarrow A$$

3.1.2 Axiomas para la disyunción ($\vee$)

Axioma 4. Introducción de la disyunción en el consecuente: Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de éste con cualquier otro.

$$A\rightarrow(A\vee B)$$

[6] Éste sistema deductivo se presenta por primera vez en [Sierra02].

[7] El lenguaje consta de los conectivos binarios $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$; los conectivos unarios $\{\sim, \neg, I, C\}$; los símbolos de puntuación {), (}; el conjunto de Fórmulas (enunciados) es generado recursivamente con los conectivos a partir del conjunto de enunciados atómicos {p1, p2, ...}. Se escribirá A^I en vez de I(A), y A^C en vez de C(A).

Axioma 5. Introducción de la disyunción en el consecuente: Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de cualquier otro con éste.

$$\mathbf{A \rightarrow (B \vee A)}$$

Axioma 6. Introducción de la disyunción en el antecedente: Un condicional con una disyunción de antecedente es aceptado cuando de cada uno de los disyuntos se sigue se sigue el consecuente.

$$\mathbf{(B \rightarrow A) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow \{(B \vee C) \rightarrow A\}]}$$

3.1.3 Axiomas para la conjunción ($\wedge$)

Axioma 7. Eliminación de la conjunción: Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto izquierdo.

$$\mathbf{(A \wedge B) \rightarrow A}$$

Axioma 8. Eliminación de la conjunción: Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto derecho.

$$\mathbf{(A \wedge B) \rightarrow B}$$

Axioma 9. Introducción de la conjunción en el consecuente: Se acepta que una conjunción se siga de un enunciado cuando de éste se siguen cada uno de los coyuntos.

$$\mathbf{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow \{A \rightarrow (B \wedge C)\}]}$$

3.2 Axiomas para la negación clásica (~):

Axioma 10. Principio de trivialización: Se acepta un enunciado arbitrario cuando algún enunciado rechazado es aceptado.

$$\mathbf{A \rightarrow ({\sim}A \rightarrow B)}$$

Axioma 11. Principio de bivalencia: Un enunciado es aceptado o es rechazado[8].

$$\mathbf{A \vee {\sim}A}$$

3.3 Axiomas para la negación básica paraconsistente y paracompleta (débil, $\neg$):

Axioma 12. AI A$\neg$ (Afirmación de la Incompatibilidad Afirmación de la Negación): Si un enunciado es incompatible con su negación[9] y se cuestiona entonces el enunciado es rechazado.

$$\mathbf{A^{I} \rightarrow (\neg A \rightarrow {\sim}A)}$$

[8] Rechazar significa no aceptar.

[9] Exactamente sería: incompatible con su negación débil, pero se omite el débil ya que un enunciado siempre es incompatible con su negación fuerte. Intuitivamente un enunciado α es Incompatible con su negación si no ocurre que éste sea aceptado y cuestionado.

Axioma 13. FI (Falsedad de la Incompatibilidad): Si un enunciado es compatible[10] con su negación entonces se acepta y se cuestiona.

$$\mathbf{\sim A^{I} \rightarrow (\neg A \wedge A)}$$

Axioma 14. ACFA¬ (Afirmación de la Completez[11] Falsedad del Alcance de la Negación): Si un enunciado es determinable y rechazado entonces es cuestionado.

$$\mathbf{A^{C} \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)}$$

Axioma 15. FC (Falsedad de la Completez): Si un enunciado es indeterminable[12] entonces ni él ni su negación son aceptados.

$$\mathbf{\sim A^{C} \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)}$$

3.4 Regla de inferencia

Mp (Modus Ponens): Si un condicional y su antecedente son aceptados entonces es aceptado su consecuente.

$$\mathbf{A, A \rightarrow B \vdash B}$$

3.5 Algunos teoremas[13]

3.5.1 FIFC (Falsedad de la Incompatibilidad y Falsedad de la Completez). Si un enunciado es compatible con su negación y es indeterminable entonces todo es aceptado. Esto significa que no puede ocurrir que un enunciado sea compatible con su negación e indeterminable.

$$\mathbf{\sim A^{I} \rightarrow (\sim A^{C} \rightarrow B)}$$

Prueba:

[10] Compatible significa no incompatible.
[11] Intuitivamente un enunciado α es Completo o Determinable (respecto a la negación débil) si ocurre que éste sea aceptado o cuestionado.
[12] Indeterminable significa no completo, no determinable.
[13] Un enunciado A es un teorema ($\vdash$ A) si y solamente si existe una prueba del enunciado A a partir de los axiomas, es decir, si existe una secuencia de enunciados de los cuales el enunciado A es el último y los demás son axiomas o se obtienen a partir de enunciados anteriores utilizando la regla de inferencia Modus ponens. Los axiomas 1 a 11, junto con la regla de inferencia Modus ponens, determinan la Lógica Clásica, puesto que ésta lógica es bastante conocida, sus teoremas y reglas de inferencia no serán probados.

1. $\sim A^I$	Premisa 1
2. $\sim A^C$	Premisa 2
3. $\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$	FI
4. $\neg A \wedge A$	Modus ponens en 1 y 3
5. A	Simplificación[14] en 4
6. $\sim A^C \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FC
7. $\sim\neg A \wedge \sim A$	Modus ponens en 2 y 6
8. $\sim A$	Simplificación en 7
9. $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$	A10 Principio de trivialización
10. $\sim A \rightarrow B$	Modus ponens en 5 y 9
11. B	Modus ponens en 8 y 10
12. $\sim A^C \rightarrow B$	MDC[15] en 2 y 11
13. $\sim A^I \rightarrow (\sim A^C \rightarrow B)$	MDC en 1 y 12

3.5.2 Principio de bivalencia. Si un enunciado se acepta o se cuestiona entonces es determinable.

$$\mathbf{(A \vee \neg A) \rightarrow A^C}$$

Prueba:

1. $\sim A^C \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FC
2. $\sim(\sim\neg A \wedge \sim A) \rightarrow A^C$	Transposición[16] en 1
3. $(\neg A \vee A) \rightarrow A^C$	DeMorgan[17] en 2

3.5.3 AIoAC (Afirmación de la Incompatibilidad o Afirmación de la Completez). Un enunciado es incompatible con su negación o es determinable.

$$\mathbf{A^I \vee A^C}$$

Prueba:

1. $\sim A^I$	Premisa
2. $\sim A^I \rightarrow A \wedge \neg A$	FI
3. $A \wedge \neg A$	Modus ponens en 1 y 2
4. A	Simplificación en 3
5. $(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$	Principio Bivalencia. T 3.5.2
6. $A \rightarrow A^C$	Simplificación de antecedente[18] en 5
7. A^C	Modus ponens 4 y 6
8. $\sim A^I \rightarrow A^C$	MDC en 1 y 7
9. $A^I \vee A^C$	Implicación disyunción[19] en 9

[14] De $X \wedge Y$ se sigue X. De $X \wedge Y$ se sigue Y.
[15] Si de X1, ..., Xn, Y se sigue Z entonces de X1, ..., Xn se sigue $Y \rightarrow Z$.
[16] De $A \rightarrow B$ se sigue $\sim B \rightarrow \sim A$. De $A \rightarrow \sim B$ se sigue $B \rightarrow \sim A$. De $\sim A \rightarrow B$ se sigue $\sim B \rightarrow A$. De $\sim A \rightarrow \sim B$ se sigue $B \rightarrow A$.
[17] De $\sim(A \wedge B)$ se sigue $\sim A \vee \sim B$. De $\sim(A \vee B)$ se sigue $\sim A \wedge \sim B$. De $\sim A \vee \sim B$ se sigue $\sim(A \wedge B)$. De $\sim A \wedge \sim B$ se sigue $\sim(A \vee B)$.
[18] De $(A \vee B) \rightarrow C$ se sigue $A \rightarrow C$ y $B \rightarrow C$.
[19] De $X \rightarrow Y$ se sigue $\sim X \vee Y$. De $\sim X \rightarrow Y$ se sigue $X \vee Y$.

Como consecuencia inmediata se tiene que si un enunciado es compatible con su negación entonces dicho enunciado es determinable: $\sim A^I \rightarrow A^C$. También se concluye que si un enunciado es indeterminable entonces es incompatible su negación: $\sim A^C \rightarrow A^I$.

3.5.4 Principio de bivalencia. Si un enunciado es determinable entonces se acepta o se cuestiona.

$$\mathbf{A^C \rightarrow (A \vee \neg A)}$$

Prueba:

1. $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA¬
2. $A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$	Implicación disyunción en 1

De los dos resultados anteriores se puede concluir la siguiente caracterización de A^C, los enunciados completos (determinables) son los que se aceptan o se cuestionan: $A^C \leftrightarrow$[20] $(A \vee \neg A)$, los enunciados incompletos (indeterminables) son los que ni se aceptan ni se cuestionan: $\sim A^C \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim\neg A)$.

3.5.5 Compatibilidad con la negación. Si un enunciado se acepta y se cuestiona entonces es compatible con su negación.

$$\mathbf{(A \wedge \neg A) \rightarrow \sim A^I}$$

Prueba:

1. $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬
2. $A^I \rightarrow (\sim\neg A \vee \sim A)$	Implicación disyunción en 1
3. $A^I \rightarrow \sim(\neg A \wedge A)$	DeMorgan en 2
4. $(A \wedge \neg A) \rightarrow \sim A^I$	Transposición en 3

Puesto que por FI se tiene la recíproca, se puede concluir la siguiente caracterización de A^I, los enunciados compatibles con su negación son los que se aceptan y se cuestionan: $\sim A^I \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$, los enunciados incompatibles con su negación son los que no se aceptan o no se cuestionan: $A^I \leftrightarrow (\sim A \vee \sim\neg A)$.

3.5.6 Principio de trivialización. Si un enunciado es incompatible con su negación y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado.

$$\mathbf{A^I \rightarrow [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)]}$$

Prueba:

1. $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬
2. $(A^I \wedge \neg A) \rightarrow \sim A$	Importación[21] en 1
3. $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Axioma 10 Principio de trivialización
4. $(A^I \wedge \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Silogismo hipotético[22] en 2 y 3
5. $A^I \rightarrow [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Exportación[23] en 4

---

[20] $A \leftrightarrow B$ se define como $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.
[21] De $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ se sigue $(X \wedge Y) \rightarrow Z$.
[22] De $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow Z$ se sigue $X \rightarrow Z$.
[23] De $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ se sigue $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$.

3.5.7 Principio de trivialización. Si un enunciado es indeterminable y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado.

$$\sim A^C \to [\neg A \to (A \to B)]$$

Prueba:

1. $\sim A^C \to (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FC
2. $\sim A^C \to \sim A$	Simplificación en 1
3. $\sim A \to [A \to (\neg A \to B)]$	Ax 10. Principio de trivialización
4. $\sim A \to [\neg A \to (A \to B)]$	Intercambio[24] en 3
5. $\sim A^C \to [\neg A \to (A \to B)]$	Silogismo hipotético en 2 y 4

3.5.8 Reducción al absurdo débil. Si de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es cuestionado.

$$(A^C \wedge B^I) \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]\}$$

Prueba:

1. $A^C \wedge B^I$	Premisa 1
2. A^C	Simplificación en 1
3. $A^C \to (\sim A \to \neg A)$	ACFA¬
4. $(\sim A \to \neg A)$	Modus ponens en 2 y 3
5. B^I	Simplificación en 1
6. $B^I \to (\neg B \to \sim B)$	AIA¬
7. $(\neg B \to \sim B)$	Modus ponens en 5 y 6
8. $A \to B$	Premisa 2
9. $A \to \neg B$	Premisa 3
10. $A \to \sim B$	Silogismo hipotético en 7 y 9
11. $A \to (B \wedge \sim B)$	Conjunción[25] en 8 y 10
12. $\sim(B \wedge \sim B)$	Principio de no contradicción[26]
13. $\sim A$	Modus tollens[27] en 11 y 12
14. $\neg A$	Modus ponens en 4 y 13
15. $(A \to \neg B) \to \neg A$	MDC en 9 y 14
16. $(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$	MDC en 8 y 15
17. $A^C \wedge B^I \to (A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$	MDC en 1 y 16

Observando la prueba, se tiene también que si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es rechazado: $B^I \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \sim A]\}$. De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte: Si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue la

[24] De $X \to (Y \to Z)$ se sigue $Y \to (X \to Z)$.

[25] De X, Y se sigue $X \wedge Y$. De $Z \to X$, $Z \to Y$ se sigue $Z \to (X \wedge Y)$.

[26] Los principios de no contradicción ($\sim(B \wedge \sim B)$), bivalencia ($B \vee \sim B$) e identidad ($B \to B$) son equivalentes gracias a las leyes de DeMorgan e Implicación disyunción.

[27] De $X \to Y$, $\sim Y$ se sigue $\sim X$. De $X \to \sim Y$, Y se sigue $\sim X$. De $\sim X \to Y$, $\sim Y$ se sigue X. De $\sim X \to \sim Y$, Y se sigue X.

aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es aceptado: $(A^C \wedge B^I) \rightarrow \{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$.

3.5.9 Cuestionamiento de la conjunción. Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación.

$$\mathbf{[(A \wedge B)^I \wedge A^C \wedge B^C] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]}$$

Prueba:

1. $(A \wedge B)^I \wedge A^C \wedge B^C$	Premisa 1
2. $\neg(A \wedge B)$	Premisa 2
3. $\sim\neg A$	Premisa 3
4. $(A \wedge B)^I$	Simplificación en 1
5. $(A \wedge B)^I \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow \sim(A \wedge B)]$	AIA$\neg$
6. $\neg(A \wedge B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$	Modus ponens en 4 y 5
7. $\sim(A \wedge B)$	Modus ponens en 2 y 6
8. $\sim A \vee \sim B$	DeMorgan en 7
9. A^C	Simplificación en 1
10. $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA$\neg$
11. $\sim A \rightarrow \neg A$	Modus ponens en 9 y 10
12. A	Modus tollens en 3 y 11
13. $\sim B$	Silogismo disyuntivo[28] 12 y 8
14. B^C	Simplificación en 1
15. $B^C \rightarrow (\sim B \rightarrow \neg B)$	ACFA$\neg$
16. $\sim B \rightarrow \neg B$	Modus ponens en 14 y 15
17. $\neg B$	Modus ponens en 13 y 16
18. $\sim\neg A \rightarrow \neg B$	MDC en 3 y 17
19. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\sim\neg A \rightarrow \neg B)$	MDC en 2 y 18
20. $(A \wedge B)^I \wedge A^C \wedge B^C \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\sim\neg A \rightarrow \neg B)]$	MDC en 1 y 19
21. $(A \wedge B)^I \wedge A^C \wedge B^C \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$	Implic disyunción en 20

Observando la prueba, también se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación: $[(A \wedge B)^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)]$.

[28] De $X \vee Y$, $\sim X$ se sigue Y. De $X \vee Y$, $\sim Y$ se sigue X.

3.5.10 Disyunción de cuestionamientos. Si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la conjunción de ellos cuando ésta es determinable.

$$\mathbf{[(A\wedge B)^C \wedge A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A\wedge B)]}$$

Prueba:

1. $(A\wedge B)^C\wedge A^I\wedge B^I$	Premisa 1
2. $\neg A\vee\neg B$	Premisa 2
3. A^I	Simplificación en 1
4. $A^I\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA¬
5. $\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6. B^I	Simplificación en 1
7. $B^I\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim B)$	AIA¬
8. $\neg B\rightarrow\sim B$	Modus ponens en 6 y 7
9. $\sim A\vee\sim B$	Dilema constructivo[29] 2, 5, 8
10. $\sim(A\wedge B)$	DeMorgan en 9
11. $(A\wedge B)^C$	Simplificación en 1
12. $(A\wedge B)^C\rightarrow[\sim(A\wedge B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$	ACFA¬
13. $\sim(A\wedge B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$	Modus ponens en 11 y 12
14. $\neg(A\wedge B)$	Modus ponens en 10 y 13
15. $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$	MDC en 2 y 14
16. $[(A\wedge B)^C\wedge A^I\wedge B^I]\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$	MDC en 1 y 15

Observando la prueba, también se tiene que si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación entonces se rechaza la conjunción de ellos: $[A^I \wedge B^I]\rightarrow [(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\sim(A\wedge B)]$.

[29] De $A\vee B$, $A\rightarrow C$, $B\rightarrow D$ se sigue $C\vee D$.

3.5.11 Cuestionamiento de la disyunción. Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento de ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación.

$$\mathbf{[(A\vee B)^I\wedge A^C\wedge B^C]\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]}$$

Prueba:

1. $(A\vee B)^I\wedge A^C\wedge B^C$	Premisa 1
2. $\neg(A\vee B)$	Premisa 2
3. $(A\vee B)^I$	Simplificación en 1
4. $(A\vee B)^I\to[\neg(A\vee B)\to\sim(A\vee B)]$	AIA$\neg$
5. $\neg(A\vee B)\to\sim(A\vee B)$	Modus ponens en 3 y 4
6. $\sim(A\vee B)$	Modus ponens en 2 y 5
7. $\sim A\wedge\sim B$	DeMorgan en 6
8. A^C	Simplificación en 1
9. $A^C\to(\sim A\to\neg A)$	ACFA$\neg$
10. $\sim A\to\neg A$	Modus ponens en 8 y 9
11. $\sim A$	Simplificación en 7
12. $\neg A$	Modus ponens en 11 y 10
13. $\sim B$	Simplificación en 7
14. B^C	Simplificación en 1
15. $B^C\to(\sim B\to\neg B)$	ACFA$\neg$
16. $\sim B\to\neg B$	Modus ponens en 14 y 15
17. $\neg B$	Modus ponens en 13 y 16
18. $\neg A\wedge\neg B$	Conjunción en 12 y 17
19. $\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$	MDC en 2 y 18
20. $(A\vee B)^I\wedge A^C\wedge B^C\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$	MDC en 1 y 19

Observando la prueba, también se tiene que del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el rechazo de ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación: $(A\vee B)^I\to[\neg(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)]$.

3.5.12 Conjunción de cuestionamientos. Si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la disyunción de ellos cuando ésta es determinable.

$$\mathbf{[(A\vee B)^C\wedge A^I\wedge B^I]\to[(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)]}$$

Prueba:

1. $(A\vee B)^C \wedge A^I \wedge B^I$	Premisa 1
2. $\neg A \wedge \neg B$	Premisa 2
3. A^I	Simplificación en 1
4. $A^I \to (\neg A \to \sim A)$	AIA¬
5. $\neg A \to \sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6. B^I	Simplificación en 1
7. $B^I \to (\neg B \to \sim B)$	AIA¬
8. $\neg B \to \sim B$	Modus ponens en 6 y 7
9. $\neg A$	Simplificación en 2
10. $\sim A$	Modus ponens en 9 y 5
11. $\neg B$	Simplificación en 2
12. $\sim B$	Modus ponens en 11 y 8
13. $\sim A \wedge \sim B$	Conjunción en 10 y 12
14. $\sim(A\vee B)$	DeMorgan en 13
15. $(A\vee B)^C$	Simplificación en 1
16. $(A\vee B)^C \to [\sim(A\vee B) \to \neg(A\vee B)]$	ACFA¬
17. $\sim(A\vee B) \to \neg(A\vee B)$	Modus ponens en 15 y 16
18. $\neg(A\vee B)$	Modus ponens en 14 y 17
19. $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A\vee B)$	MDC en 2 y 18
20. $[(A\vee B)^C \wedge A^I \wedge B^I] \to [(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A\vee B)]$	MDC en 1 y 19

Observando la prueba, también se tiene que si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se rechaza la disyunción de ellos: $[A^I \wedge B^I] \to [(\neg A \wedge \neg B) \to \sim(A\vee B)]$.

3.5.13 Contrarrecíproca débil. Modus tollens. Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y éste se cuestiona entonces se cuestiona el antecedente si éste es determinable.

$$\mathbf{[A^C \wedge B^I] \to [(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)]}$$

Prueba:

1. $A^C \wedge B^I$	Premisa 1
2. $A \to B$	Premisa 2
3. $\sim B \to \sim A$	Transposición en 2
4. A^C	Simplificación en 1
5. $A^C \to (\sim A \to \neg A)$	ACFA¬
6. $\sim A \to \neg A$	Modus ponens en 4 y 5
7. $\sim B \to \neg A$	Silogismo hipotético en 3 y 6
8. B^I	Simplificación en 1
9. $B^I \to (\neg B \to \sim B)$	AIA¬
10. $\neg B \to \sim B$	Modus ponens en 8 y 9
11. $\neg B \to \neg A$	Silogismo hipotético en 10 y 7
12. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	MDC en 2 y 11
13. $(A^C \wedge B^I) \to [(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, se tiene también que cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y éste se cuestiona entonces se rechaza el antecedente: $B^I\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)]$.

3.5.14 Contrarrecíproca fuerte. Modus tollens. Si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación, entonces, si se acepta el último, también se acepta el primero.

$$\mathbf{[A^I\wedge B^C]\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]}$$

Prueba:

1. $A^I\wedge B^C$	Premisa 1
2. $\neg B\rightarrow\neg A$	Premisa 2
3. A^I	Simplificación en 1
4. $A^I\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA¬
5. $\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6. $\neg B\rightarrow\sim A$	Silogismo hipotético en 2 y 5
7. B^C	Simplificación en 1
8. $B^C\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬
9. $\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 7 y 8
10. $\sim B\rightarrow\sim A$	Silogismo hipotético entre 9 y 6
11. $A\rightarrow B$	Transposición en 10
12. $(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$	MDC en 2 y 11
13. $(A^I\wedge B^C)\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, también se tiene que si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el rechazo de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $B^C\rightarrow[(\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$. Observando la prueba, también se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $A^I\rightarrow[(\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

3.5.15 Introducción del doble cuestionamiento. Si se acepta un enunciado incompatible con su negación cuyo cuestionamiento sea determinable entonces se cuestiona el cuestionamiento de éste.

$$\mathbf{[A^I\wedge(\neg A)^C]\rightarrow[A\rightarrow\neg\neg A)]}$$

Prueba:

1. $A^I\wedge(\neg A)^C$	Premisa 1
2. $A^I\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA¬
3. A^I	Simplificación en 1
4. $\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 3 y 2
5. $(\neg A)^C$	Simplificación en 1
6. $(\neg A)^C\rightarrow(\sim\neg A\rightarrow\neg\neg A)$	ACFA¬
7. $\sim\neg A\rightarrow\neg\neg A$	Modus ponens en 5 y 6
8. $A\rightarrow\sim\neg A$	Transposición en 4

9. $A\rightarrow\neg\neg A$	Silogismo hipotético en 8 y 7
10. $(A^{I}\wedge(\neg A)^{C})\rightarrow(A\rightarrow\neg\neg A)$	MDC en 1 y 9

3.5.16 Eliminación del doble cuestionamiento. Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado se sigue el enunciado cuando éste es determinable y su cuestionamiento es incompatible con la negación.

$$[A^{C}\wedge(\neg A)^{I}]\rightarrow[\neg\neg A\rightarrow A)]$$

Prueba:

1. $A^{C}\wedge(\neg A)^{I}$	Premisa 1
2. A^{C}	Simplificación en 1
3. $(\neg A)^{I}$	Simplificación en 1
4. $A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$	ACFA¬
5. $\sim A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 2 y 4
6. $(\neg A)^{I}\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow\sim\neg A)$	AIA¬
7. $\neg\neg A\rightarrow\sim\neg A$	Modus ponens en 3 y 6
8. $\sim\neg A\rightarrow A$	Transposición en 5
9. $\neg\neg A\rightarrow A$	Silogismo hipotético en 7 y 8
10. $[A^{C}\wedge(\neg A)^{I}]\rightarrow[\neg\neg A\rightarrow A]$	MDC en 1 y 9

3.5.17 Implicación disyunción. Cuando se tiene un condicional con antecedente determinable entonces se cuestiona el antecedente o se acepta el consecuente.

$$A^{C}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$$

Prueba:

1. A^{C}	Premisa 1
2. $A\rightarrow B$	Premisa 2
3. $A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$	ACFA¬
4. $\sim A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 1 y 3
5. $\sim\neg A\rightarrow A$	Transposición en 4
6. $\sim\neg A\rightarrow B$	Silogismo hipotético en 5 y 2
7. $\neg A\vee B$	Implicación disyunción en 6
8. $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)$	MDC en 2 y 7
9. $A^{C}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$	MDC en 1 y 8

3.5.18 Disyunción implicación. Silogismo disyuntivo. Si se cuestiona el componente incompatible con la negación de una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción.

$$A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$$

Prueba:

1. A^I	Premisa 1
2. $A \vee B$	Premisa 2
3. $\sim A \to B$	Implicación disyunción en 2
4. $A^I \to (\neg A \to \sim A)$	AIA$\neg$
5. $\neg A \to \sim A$	Modus ponens en 1 y 4
6. $\neg A \to B$	Silogismo hipotético en 5 y 3
7. $(A \vee B) \to (\neg A \to B)$	MDC en 2 y 6
8. $A^I \to [(A \vee B) \to (\neg A \to B)]$	MDC en 1 y 7

De manera similar se prueba que si se acepta el componente incompatible con la negación que se cuestiona en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $A^I \to [(\neg A \vee B) \to (A \to B)]$.

3.5.19 Cuestionamiento del condicional. Si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación y cuyo consecuente es determinable entonces se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente.

$$\mathbf{B^C \wedge (A \to B)^I \to [\neg (A \to B) \to (A \wedge \neg B)]}$$

Prueba:

1. $B^C \wedge (A \to B)^I$	Premisa 1
2. $\neg(A \to B)$	Premisa 2
3. $(A \to B)^I$	Simplificación en 1
4. $(A \to B)^I \to [\neg(A \to B) \to \sim(A \to B)]$	AIA$\neg$
5. $\neg(A \to B) \to \sim(A \to B)$	Modus ponens en 3 y 4
6. $\sim(A \to B)$	Modus ponens en 2 y 5
7. $A \wedge \sim B$	Negación del condicional[30] en 6
8. A	Simplificación en 7
9. $\sim B$	Simplificación en 7
10. B^C	Simplificación en 1
11. $B^C \to (\sim B \to \neg B)$	ACFA$\neg$
12. $(\sim B \to \neg B)$	Modus ponens en 10 y 11
13. $\neg B$	Modus ponens en 9 y 12
14. $A \wedge \neg B$	Conjunción en 8 y 13
15. $\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$	MDC en 2 y 14
16. $[B^C \wedge (A \to B)^I] \to [\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)]$	MDC en 1 y 15

Observando la prueba, se tiene también que si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación entonces se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente: $(A \to B)^I \to [\neg(A \to B) \to (A \wedge \sim B)]$.

3.5.20 Aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente. Si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que éste sea determinable y el consecuente sea incompatible con la negación.

[30] De $\sim(A \to B)$ se sigue $A \wedge \sim B$. De $A \wedge \sim B$ se sigue $\sim(A \to B)$.

$$\mathbf{B^I\wedge(A\rightarrow B)^C\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]}$$

Prueba:

1. $B^I\wedge(A\rightarrow B)^C$	Premisa 1
2. $A\wedge\neg B$	Premisa 2
3. B^I	Simplificación en 1
4. $B^I\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim B)$	AIA¬
5. $\neg B\rightarrow\sim B$	Modus ponens en 3 y 4
6. $\neg B$	Simplificación en 2
7. $\sim B$	Modus ponens en 6 y 5
8. A	Simplificación en 2
9. $A\wedge\sim B$	Conjunción en 8 y 7
10. $\sim(A\rightarrow B)$	Negación del condicional en 9
11. $(A\rightarrow B)^C$	Simplificación en 1
12. $(A\rightarrow B)^C\rightarrow[\sim(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$	ACFA¬
13. $\sim(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$	Modus ponens en 11 y 12
14. $\neg(A\rightarrow B)$	Modus ponens en 10 y 13
15. $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$	MDC en 2 y 14
16. $[B^I\wedge(A\rightarrow B)^C]\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$	MDC en 1 y 15

Observando la prueba, también se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se rechaza el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación: $B^I\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)]$. También se observa que si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que éste sea determinable: $(A\rightarrow B)^C\rightarrow[(A\wedge\sim B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$.

3.6 Validez y Completitud

Un enunciado A (se define) es válido ($\models$ A) si y solamente si no existe un árbol de forzamiento de A que esté bien marcado.

Es inmediato verificar la validez de los axiomas del sistema deductivo presentado, además se tiene que la regla de inferencia preserva validez, por lo que todos los teoremas[31] de la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta son válidos, se tiene así el teorema de validez.

Traducuiendo “el enunciado A está marcado con cuadro” como “~A” y “el enunciado A está marcado con círculo” como “A”, se verifica que la traducción de las reglas de inferencia para el forzamiento semántico de marcas genera teoremas en la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica, y la regla falsedad de la raíz en combinación con la doble marca simplemente es el método de reducción al absurdo[32], por lo que, también se tiene el recíproco del teorema de validez, es decir, el teorema de completitud: todo

[31] Un enunciado es un teorema de un sistema deductivo dado si y solamente si puede obtenerse a partir de los axiomas del sistema utilizando las reglas de inferencia del sistema.

[32] El método de reducción al absurdo dice: para probar que un enunciado es aceptado, se supone que es rechazado y se busca una contradicción.

enunciado válido es teorema, por lo que, la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica está caracterizada por los Arboles de forzamiento Semántico Paraconsistentes y Paracompletos:

$$\vdash A \Leftrightarrow \models A$$

Un enunciado es un teorema si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado está mal marcado, es decir, un enunciado no es un teorema si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado está bien marcado.
Éste resultado permite mostrar que la negación débil y la negación fuerte son diferentes, probando por ejemplo que no es un teorema $A\to(\neg A\to B)$, para lograrlo basta verificar que no es válido, lo cual se logra marcando A y $\neg A$ con círculo y B con cuadro.

3.7 Retículo de consecuencias para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta

En el diagrama 1 se resume, desde el punto de vista deductivo, la relación de implicación entre los operadores negación fuerte, negación débil, incompatibilidad y completez.

3.8 Resumen de resultados importantes

3.8.1 Principio de no contradicción: $\models \sim(A\wedge\sim A)$, no $\models \sim(A\wedge\neg A)$, no $\models \neg(A\wedge\neg A)$, $\models [(A\wedge\neg A)^C\wedge A^I]\to\neg(A\wedge\neg A)$, no $\models \neg(A\wedge\neg A)\to A^I$, no $\models A^I\to\neg(A\wedge\neg A)$, $\models A^I\leftrightarrow\sim(A\wedge\neg A)$.

3.8.2 Principio del tercero excluído: $\models A\vee\sim A$, no $\models A\vee\neg A$, $\models A^C\leftrightarrow(A\vee\neg A)$, no $\models A^I\to(A\vee\neg A)$, $\models \sim A^C\leftrightarrow(\sim A\wedge\sim\neg A)$, no $\models (A\vee \neg A)\to A^I$, no $\models A^C\to A^I$, no $\models A^I\to A^C$, $\models A^I\vee A^C$.

3.8.3 Principio de trivialización: $\models A\to(\sim A\to B)$, no $\models A\to(\neg A\to B)$, $\models A^I\to[A\to(\neg A\to B)]$, no $\models A^C\to[A\to(\neg A\to B)]$, $\models \sim A^C\to[A\to(\neg A\to B)]$, $\models (\sim A^C\wedge\sim A^I)\to B$.

3.8.4 Principio de reducción al absurdo débil: $\models (A\to B)\to[(A\to\sim B)\to\sim A]$, no $\models (A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]$, $\models [A^C\wedge B^I]\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]\}$, $\models B^I\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\sim A]\}$.

3.8.5 Principio de reducción al absurdo fuerte: $\models (\sim A\to B)\to[(\sim A\to\sim B)\to A]$, no $\models (\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]$, $\models [A^C\wedge B^I]\to\{(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]\}$, $\models B^I\to\{(\sim A\to B)\to[(\sim A\to\neg B)\to A]\}$.

3.8.6 Negación de la conjunción: $\models \sim(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)$, no $\models \neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$, $\models [A^C\wedge B^C\wedge(A\wedge B)^I]\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$, $\models (A\wedge B)^I\to[\neg(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)]$.

3.8.7 Disyunción de negaciones: $\models (\sim A\vee\sim B)\to\sim(A\wedge B)$, no $\models (\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)$, $\models [A^I\wedge B^I\wedge(A\wedge B)^C]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]$, $\models [A^I\wedge B^I]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\sim(A\wedge B)]$.

3.8.8 Negación de la disyunción: $\models \sim(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)$, no $\models \neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$, $\models [A^C\wedge B^C\wedge(A\vee B)^I]\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]$, $\models (A\vee B)^I\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)]$.

3.8.9 Conjunción de negaciones: $\models (\sim A\wedge\sim B)\rightarrow\sim(A\vee B)$, no $\models (\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$, $\models [A^I\wedge B^I\wedge(A\vee B)^C]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$, $\models [A^I\wedge B^I]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\vee B)]$.

3.8.10 Negación del condicional: $\models \sim(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)$, no $\models \neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$, $\models [(A\rightarrow B)^I\wedge B^C]\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$, $\models (A\rightarrow B)^I\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)]$.

3.8.11 Afirmación del antecedente y negación del consecuente: $\models (A\wedge\sim B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$, no $\models (A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, $\models [(A\rightarrow B)^C\wedge B^I]\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$, $\models B^I\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)]$.

3.8.12 Eliminación de la doble negación: $\models \sim\sim A\rightarrow A$, no $\models \neg\neg A\rightarrow A$, $\models [A^C\wedge(\neg A)^I]\rightarrow[\neg\neg A\rightarrow A]$, $\models A^C\rightarrow[\sim\neg A\rightarrow A]$.

3.8.13 Introducción de la doble negación: $\models A\rightarrow\sim\sim A$, no $\models A\rightarrow\neg\neg A$, $\models [A^I\wedge(\neg A)^C]\rightarrow[A\rightarrow\neg\neg A]$, $\models A^I\rightarrow[A\rightarrow\sim\neg A]$.

3.8.14 Contra recíproca débil: $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$, no $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$, $\models [A^C\wedge B^I]\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$, $\models B^I\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)]$.

3.8.15 Contra recíproca fuerte: $\models (\sim B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, no $\models (\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\models [A^I\wedge B^C]\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\models A^I\rightarrow[(\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\models B^C\rightarrow[(\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

3.8.16 Implicación material: $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\sim A\vee B)$, no $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)$, $\models A^C\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$, no $\models A^I\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$.

3.8.17 De disyunción a implicación: $\models (\sim A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, no $\models (\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\models A^I\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\models A^I\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$, no $\models A^C\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$.

3.8.18 Silogismo disyuntivo y Modus tollens: $\vdash (A\vee B)$ y $\vdash \sim A \Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A\vee B)$ y $\vdash \neg A$ no$\Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A\vee B)$ y $\vdash \neg A$ y $\vdash A^I \Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A\rightarrow B)$ y $\vdash \sim B \Rightarrow \vdash \sim A$, $\vdash (A\rightarrow B)$ y $\vdash \neg B$ no$\Rightarrow \vdash \neg A$, $\vdash (A\rightarrow B)$ y $\vdash \neg B$ y $\vdash A^C$ y $\vdash B^I \Rightarrow \vdash \neg A$, $\vdash (A\rightarrow B)$ y $\vdash \neg B$ y $\vdash B^I \Rightarrow \vdash \sim A$.

3.8.19 Preservación de la incompatiblidad: no $\models (A^I\wedge B^I)\rightarrow(A\wedge B)^I$, $\models [\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]\rightarrow[(A^I\wedge B^I)\rightarrow(A\wedge B)^I]$, no $\models (A^I\wedge B^I)\rightarrow(A\vee B)^I$, $\models [\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]\rightarrow[(A^I\wedge B^I)\rightarrow(A\vee B)^I]$, no $\models (A^I\wedge B^I)\rightarrow(A\rightarrow B)^I$, $\models [\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]\rightarrow[B^I\rightarrow(A\rightarrow B)^I]$, no $\models A^I\rightarrow(\neg A)^I$, $\models (\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow[A^I\rightarrow(\neg A)^I]$, no $\models A^I\rightarrow(\sim A)^I$, $\models (\neg\sim A\rightarrow A)\rightarrow\{[A^I\rightarrow(\sim A)^I]\wedge(\sim A)^I\}$.

3.8.20 Preservación de la completez: no $\models (A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\wedge B)^C$, $\models [(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]\rightarrow[(A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\wedge B)^C]$, no $\models (A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\vee B)^C$, $\models [(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]\rightarrow[(A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\vee B)^C]$, no $\models (A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\rightarrow B)^C$, $\models [(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[B^C\rightarrow(A\rightarrow B)^C]$, no $\models A^C\rightarrow$

$(\neg A)^C$, $\models$ $(A\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow[A^C\rightarrow(\neg A)^C]$, no $\models$ $A^C\rightarrow(\sim A)^C$, $\models$ $(A\rightarrow\neg\sim A)\rightarrow\{[A^C\rightarrow(\sim A)^C]\wedge(\sim A)^C\}$.

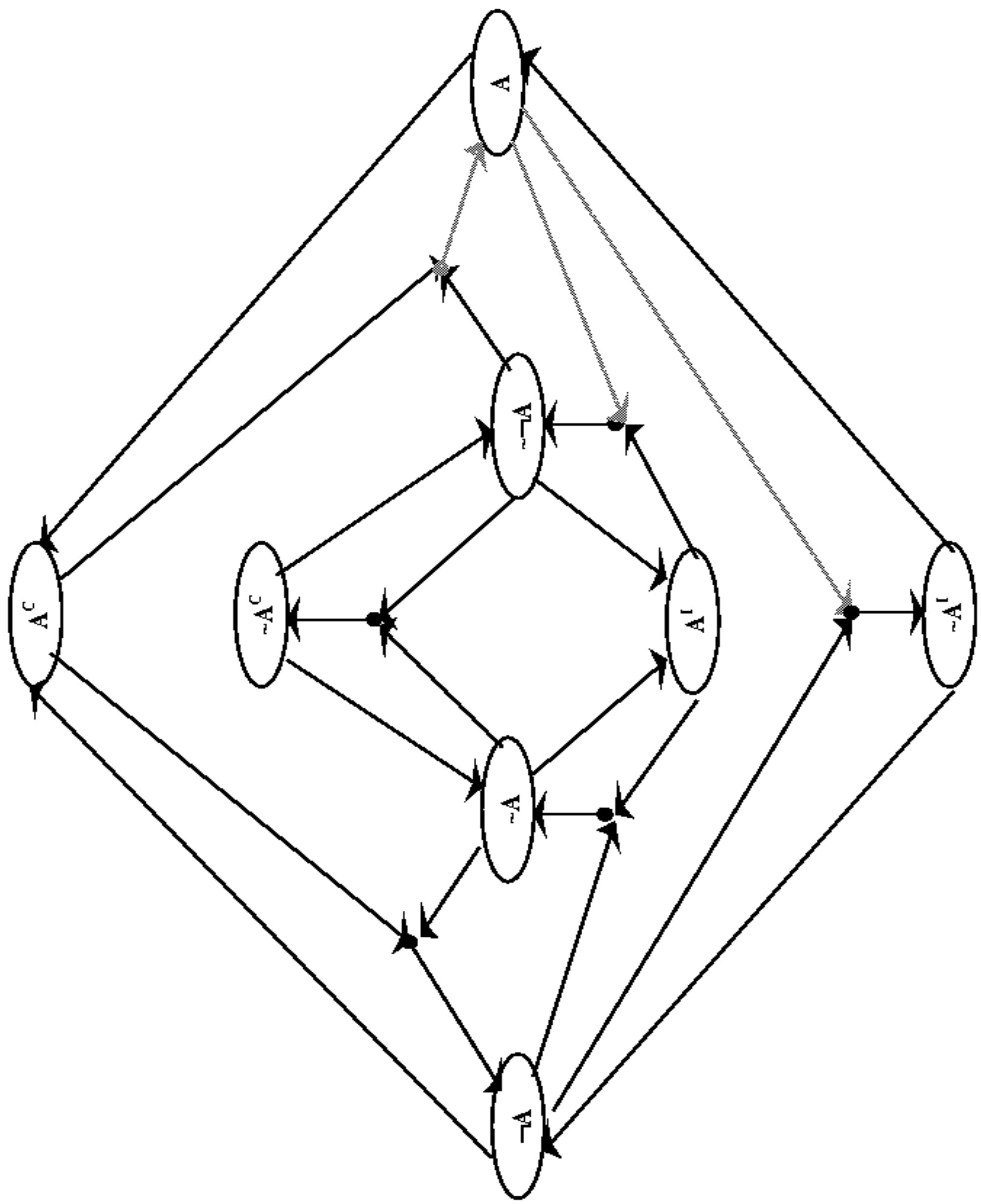
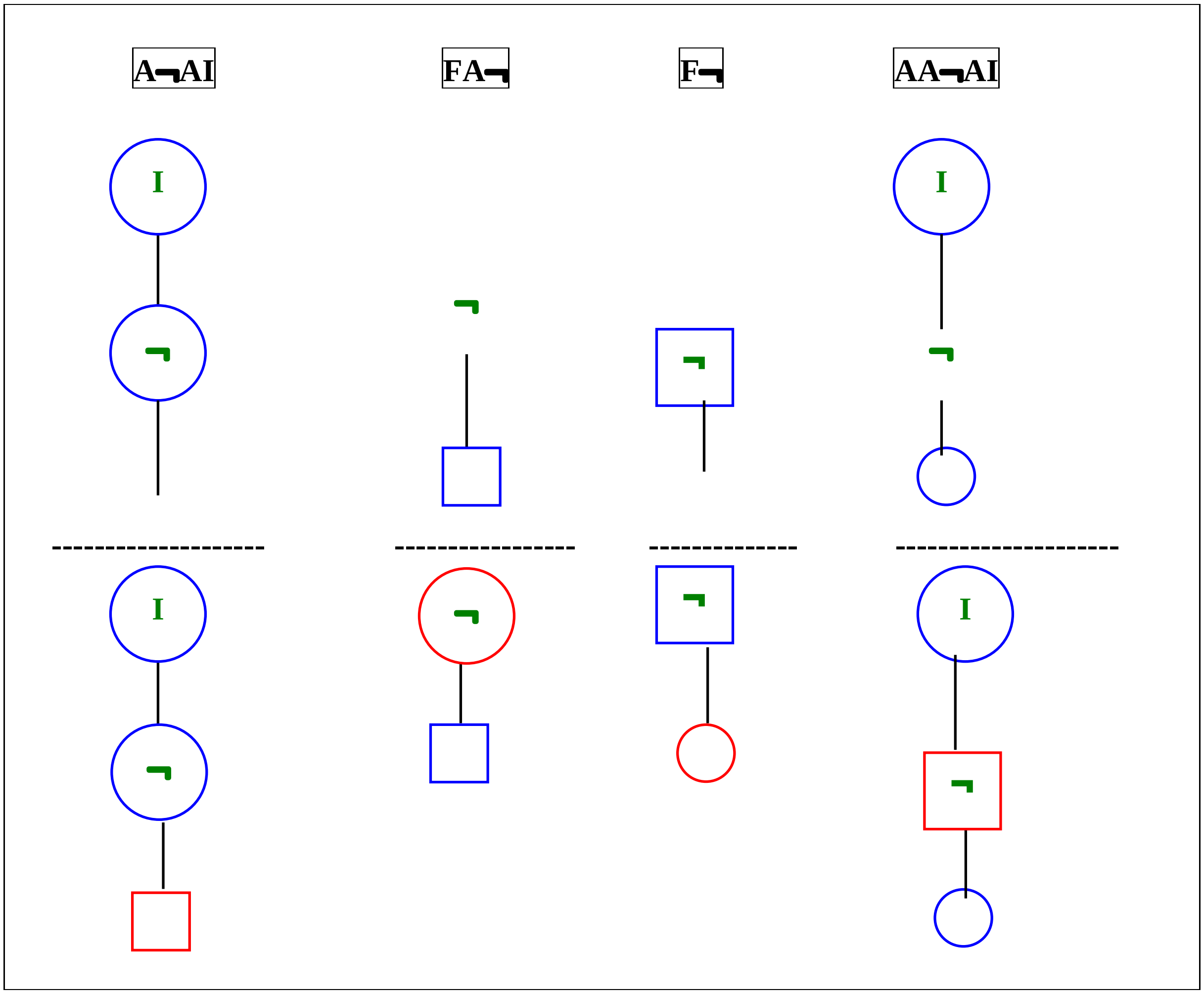


Diagrama 1

4. Árboles de forzamiento semántico para la Lógica Básica Paraconsistente - LBPc

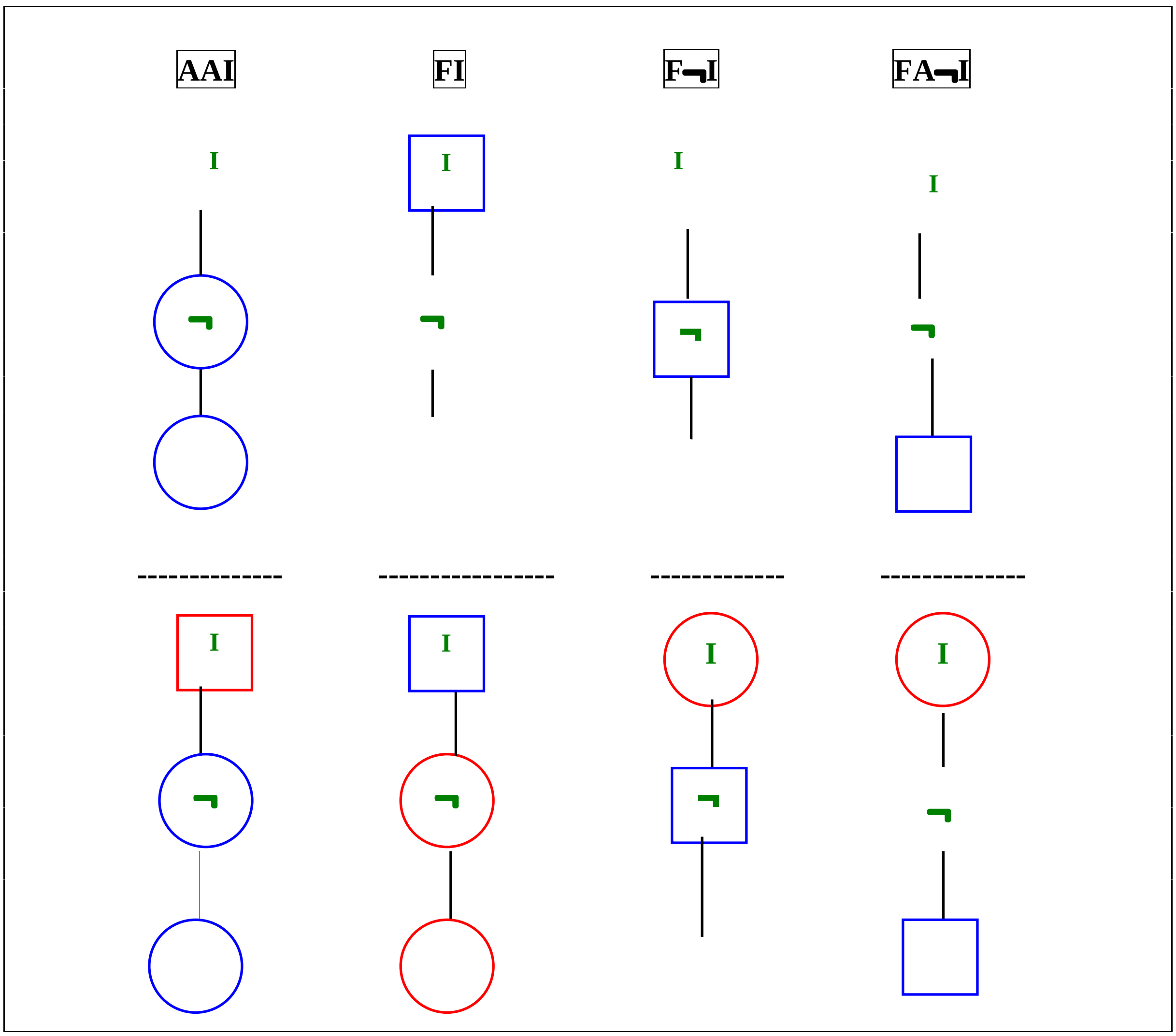
4.1 Reglas de inferencia para la negación paraconsistente ¬[33]



A¬AI (Afirmación de la Negación débil y Afirmación de la Incompatibilidad): Los enunciados cuestionados que son incompatibles con su negación son rechazados.
FA¬ (Falsedad del Alcance de la Negación débil): Los enunciados rechazados son cuestionados.
F¬ (Falsedad de la Negación débil): Son aceptados los enunciados que no son cuestionados.

[33] Las reglas de inferencia para la negación débil fueron presentadas por primera vez en 2001, en el sistema "Lógica Básica Paraconsistente Clásica" el cual fue presentado en el VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, en la Universidad de Nariño, Pasto.

AA¬AI (Afirmación del Alcance de la Negación débil y Afirmación de la Incompatibilidad): No son cuestionados los enunciados que se aceptan y además sean incompatibles con su negación.
AAI (Afirmación del Alcance de la Incompatibilidad): Los enunciados que se aceptan y se cuestionan son compatibles con su negación.
FI (Falsedad de la Incompatibilidad): Los enunciados compatibles con su negación se aceptan y se cuestionan.
F¬I (Falsedad de la Negación débil en la Incompatibilidad): Si un enunciado no es cuestionado entonces es incompatible con su negación.



FA¬I (Falsedad del Alcance de la Negación débil en la Incompatibilidad): Si un enunciado es rechazado entonces es incompatible con su negación.
Observar que basta tomar como **primitivas** las reglas **A¬AI, FA¬** y **FI**, ya que las otras reglas son derivadas de éstas.

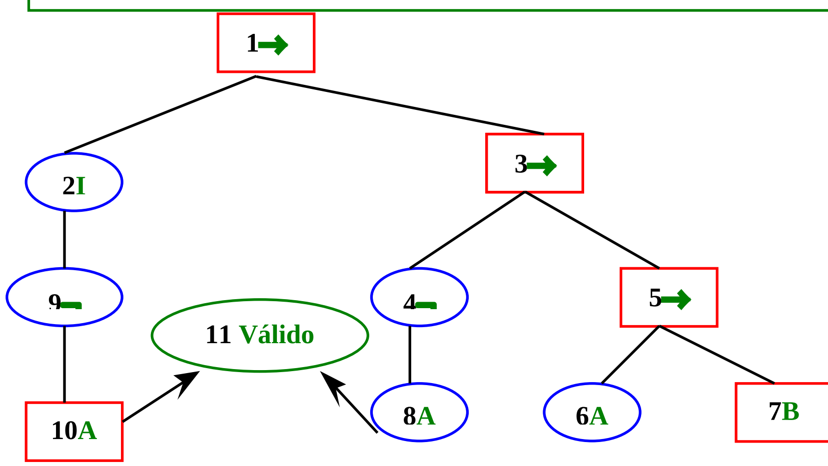
Con éste debilitamiento puede ocurrir que una fórmula y su negación débil estén marcadas con círculo (sean ambas aceptadas) y no se genere doble marca, es decir, la fórmula y su negación débil son compatibles.

4.2 Algunos teoremas importantes para la negación paraconsistente

Observando las reglas de inferencia para la negación débil se tiene como consecuencia inmediata la validez de los siguientes enunciados: $A^I \to (\neg A \to \sim A)$, $\sim A \to \neg A$, $\sim\neg A \to A$, $A^I \to (A \to \sim\neg A)$, $\sim A^I \to (A \wedge \neg A)$, $(A \wedge \neg A) \to \sim A^I$, $\sim A \to A^I$, $\sim\neg A \to A^I$.

4.2.1 Principio de Trivialización

no $\models \neg A \to (A \to B)$, $\models A^I \to (\neg A \to (A \to B))$



1. FR. 2, 3. F→ en 1. 4, 5. F→ en 3. 6, 7. F→ en 5. 8. IA en 6.
9. IA en 4. 10. A¬AI en 9 y 2 11. DM en 8 y 10.

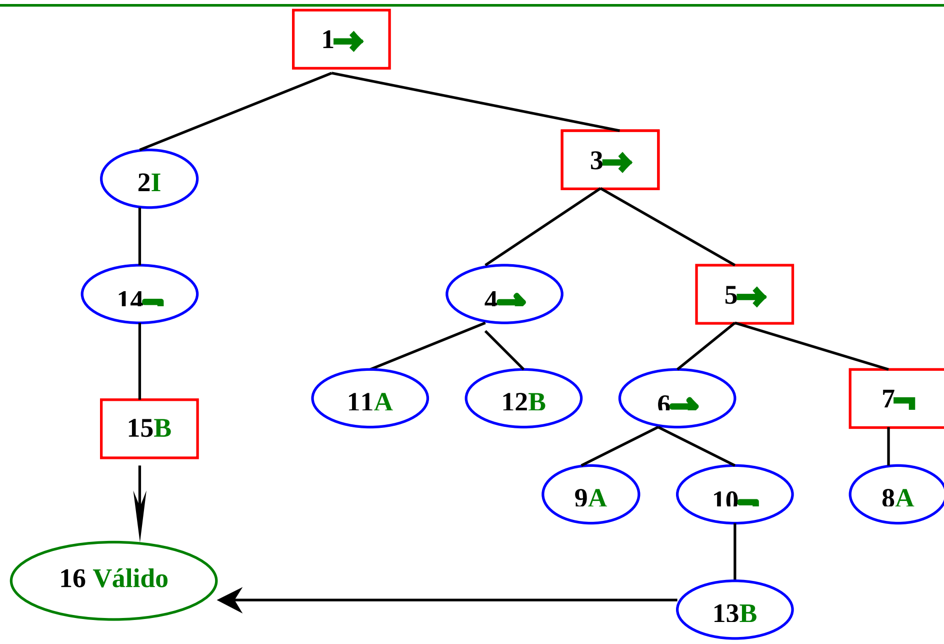
Los pasos 1, …, 11 indican que es válido el enunciado $A^I \to (\neg A \to (A \to B))$. Los pasos 3, …, 8 indican que el enunciado $\neg A \to (A \to B)$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=1$ y $B=0$, los modelos en los cuales ocurre que un enunciado y su negación débil son verdaderos se llaman Modelos Inconsistentes[34].
La no validez del enunciado $\neg A \to (A \to B)$ (principio de trivialización) indica que el sistema LBPc soporta las contradicciones, es decir, pueden tenerse como teoremas de una teoría

[34] Los *modelos consistentes respecto al operador negación* ~ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos, los cuales satisfacen la siguiente definición (para M un modelo, A y B fórmulas, p fórmula atómica): M satisface p sii $p \in M$. M satisface ~A sii M no satisface A. M satisface $A \wedge B$ sii M satisface A y M satisface B. M satisface $A \vee B$ sii M satisface A o M satisface B. M satisface $A \to B$ sii M no satisface A o M satisface B. Los *modelos inconsistentes respecto al operador negación débil* ¬ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbitrarios, los cuales satisfacen la siguiente definición: M satisface ¬A sii M no satisface A o $\neg A \in M$.

los enunciados A y ¬A y a pesar de ello la teoría no se trivializa, es decir, no demuestra todas las fórmulas.

4.2.2 Reducción al Absurdo Débil

no $\models$ (A→B)→{(A→¬B)→¬A}, $\models$ B^I→[(A→B)→{(A→¬B)→¬A}]



1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.	6, 7. F→ en 5.
8. F¬ en 7.	9. IA en 8.	10. AIA→ en 9 y 6.	11. IA en 8.
12. AIA→ en 11, 4.	13. IA en 12.	14. IA en 10.	15. A¬AI en 14 y 2.
16. DM en 13 y 15.			

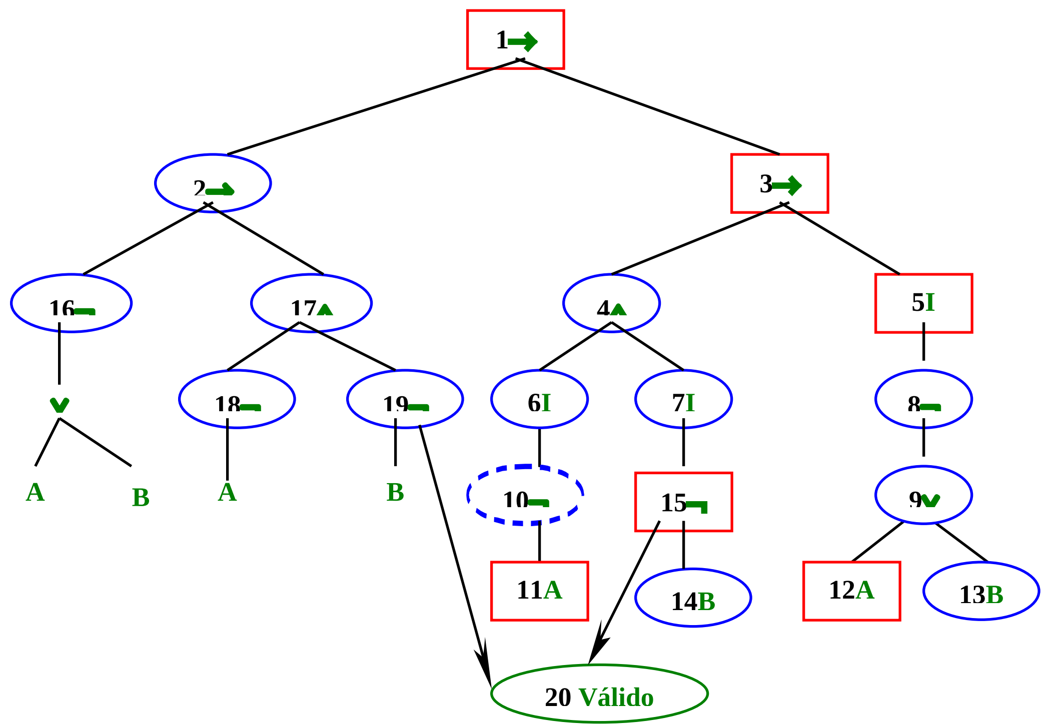
Los pasos 1, …, 16 indican que es válido el enunciado B^I→[(A→B)→{(A→¬B)→ ¬A}]. Los pasos 3, …, 13 indican que el enunciado (A→B)→{(A→¬B)→¬A} es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, ¬A=0, B=1 y ¬B=1.

De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte: no $\models$ (¬A→B)→{(¬A→¬B)→A}, $\models$ B^I→[(¬A→B)→{(¬A→¬B)→A}]. Los anteriores resultados indican que no puede utilizarse el método de demostración indirecta (reducción al absurdo) si la contradicción débil[35] encontrada se da con una fórmula que no es incompatible con su negación débil.

[35] Una contradicción débil tiene la forma A∧¬A, también se dice que A∧¬A es una contradicción respecto a la negación débil ¬.

4.2.3 Preservación de la Incompatibilidad con la Disyunción

No $\models$ $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \vee B)^I \models [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)] \rightarrow [(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \vee B)^I]$



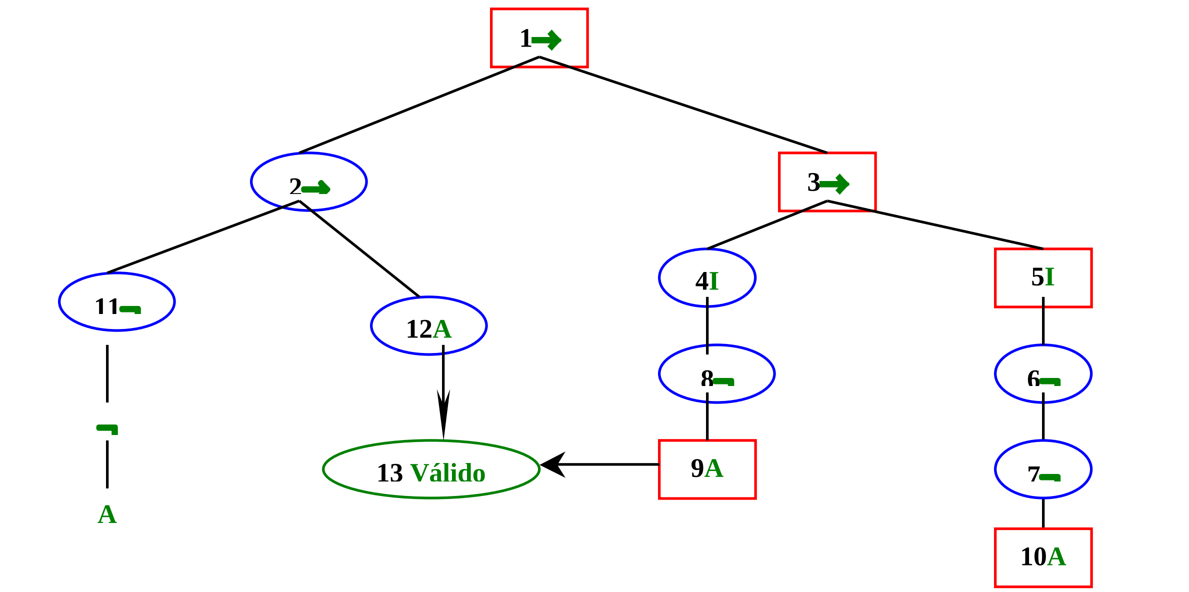
1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.	6, 7. A∧ en 4.
8, 9. FI en 5.	10. Opción.	11. A¬AI en 10, 6.	12. IF en 11.
13. FIA∨ en 12 y 9.	14. IA en 13.	15. AA¬AI en 14, 7.	16. IA en 8.
17. AIA→ en 16, 2.	18, 19. A∧ en 17.	20. DM en 15 y 19.	

Los pasos 1, …, 20 indican que es válido el enunciado $[\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)] \rightarrow [(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \vee B)^I]$. Los pasos 3, …, 15 indican que es inválido el enunciado $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \vee B)^I$ y es refutado por un modelo en el cual A=0, ¬A=1, B=1, ¬B=0 y ¬(A∨B)=1. Observar que en el análisis final el paso 10 deja de ser opción.

Éste resultado indica que la incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la disyunción cuando, al cuestionar la disyunción de los enunciados, se cuestionan ambos. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la disyunción y la preservación de la incompatibilidad con la disyunción.

4.2.4 Preservación de la Incompatibilidad con el Cuestionamiento

No $\models A^I \rightarrow (\neg A)^I$, $\models [\neg\neg A \rightarrow A] \rightarrow [A^I \rightarrow (\neg A)^I]$



1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.	6, 7. FI en 5.
8. IA en 7.	9. A¬AI en 8 y 4.	10. IF en 9.	11. IA en 6.
12. AIA→ en 11, 2.	13. DM en 12 y 9.		

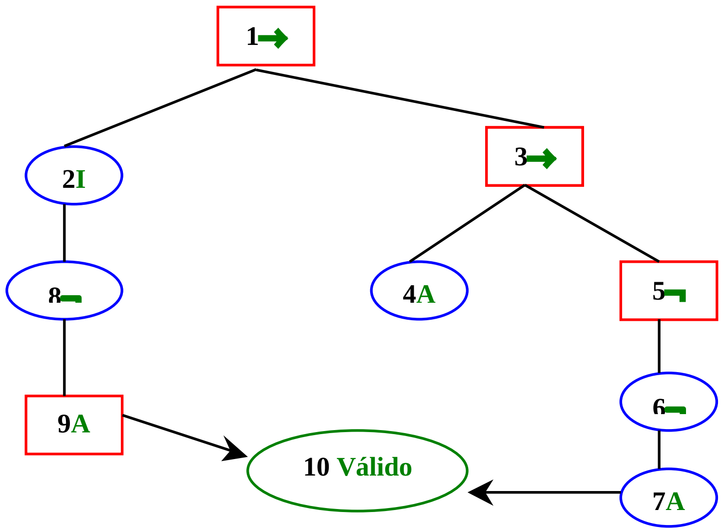
Los pasos 1, ..., 13 indican que es válido el enunciado $[\neg\neg A \rightarrow A] \rightarrow [A^I \rightarrow (\neg A)^I]$. Los pasos 3, ..., 10 indican que es inválido el enunciado $A^I \rightarrow (\neg A)^I$, y que es refutado por un modelo en el cual A=0, ¬A=1 y ¬¬A=1.

Éste resultado indica que la incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la negación cuando al cuestionar el cuestionamiento que se hace de un enunciado, se acepta éste. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la negación débil y la preservación de la incompatibilidad con la negación débil.

4.2.5 Introducción del Doble Cuestionamiento

Los pasos 1, …, 10 indican que es válido el enunciado $A^I \rightarrow [A \rightarrow \neg\neg A]$. Los pasos 3, …, 7 indican que es inválido el enunciado A→¬¬A y que es refutado por un modelo en el cual A=1, ¬A=1, ¬¬A=0.
El anterior resultado indica que la introducción del doble cuestionamiento de A es válida sólo cuando se satisface la incompatibilidad de A con su negación débil.

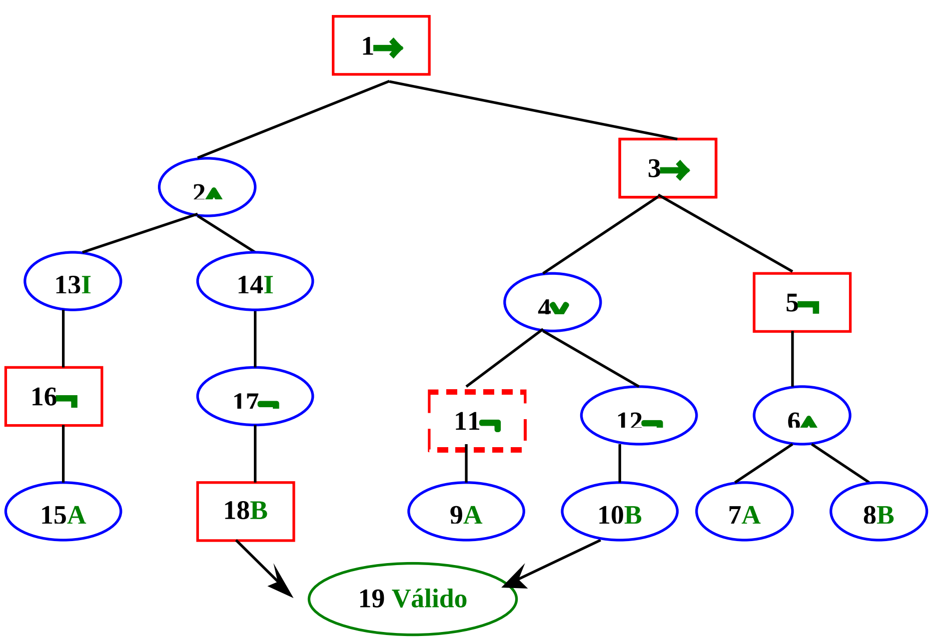
$$\text{no} \models A \rightarrow \neg\neg A, \quad \models A^{I} \rightarrow [A \rightarrow \neg\neg A]$$



1. FR. 2, 3. F→ en 1. 4, 5. F→ en 3. 6. F¬ en 5. 7. IA en 4.
8. IA en 6. 9. A¬AI en 8, 2. 10. DM en 7 y 9.

4.2.6 Disyunción de Cuestionamientos

$$\text{no} \models (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B), \quad \models (A^{I} \wedge B^{I}) \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$$



1. FR.	2, 3. F$\rightarrow$ en 1.	4, 5. F$\rightarrow$ en 3.	6. F$\neg$ en 5.
7, 8. A$\wedge$ en 6.	9. IA en 7.	10. IA en 8.	11. Opción.
12. FIA$\vee$ en 11, 4.	13 y 14. A$\wedge$ 2.	15. IA en 7.	16. AA$\neg$AI en 15 y 13.
17. IA en 12.	18. A$\neg$AI en 17, 14.	19. DM en 18 y 10.	

Los pasos 1, …, 19 indican que es válido el enunciado $(A^I\wedge B^I)\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow \neg(A\wedge B)]$. Los pasos 3, …, 12 indican que el enunciado $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=0$, $B=1$, $\neg B=1$ y $\neg(A\wedge B)=0$. Observar que cuando se tiene el análisis completo 1, …, 19, el paso 11 deja de ser una opción, puesto que realmente se infiere de 16. Se tiene entonces que de la disyunción de cuestionamientos se sigue el cuestionamiento de la conjunción sólo cuando cada enunciado es incompatible con su negación.

5. Sistema Deductivo para la Lógica Básica Paraconsistente LBPc

El sistema *lógica básica paraconsistente* LBPc, se obtiene del sistema *lógica básica paraconsistente y paracompleta* LBPco, introduciendo como nuevo axioma, A^C, o de forma equivalente cambiando los axiomas para la negación débil en LBPco por:

5.1 Axiomas para la negación básica paraconsistente

Axioma 12. AI A¬ (Afirmación de la Incompatibilidad Afirmación de la Negación). Si un enunciado es incompatible con su negación y se cuestiona entonces el enunciado es rechazado.

$$\mathbf{A^I\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)}$$

Axioma 13. FI (Falsedad de la Incompatibilidad). Si un enunciado es compatible con su negación entonces se acepta y se cuestiona.

$$\mathbf{\sim A^I\rightarrow(\neg A\wedge A)}$$

Axioma 14. FA¬ (Falsedad del Alcance de la Negación). Si un enunciado es rechazado entonces es cuestionado.

$$\mathbf{\sim A\rightarrow\neg A}$$

Completez[36].

$$\mathbf{A^C}$$

5.2 Algunos teoremas para la Lógica Básica Paraconsistente

Como consecuencia de los resultados obtenidos para la lógica básica paraconsistente y paracompleta, se tienen los siguientes resultados para la lógica básica paraconsistente.

[36] Esto es lo que significa el axioma 14.

5.2.1 F$\neg$ (Falsedad de la Negación). Si un enunciado no se cuestiona entonces es aceptado: $\sim\neg A\rightarrow A$.

5.2.2 AI AA$\neg$ (Afirmación de la Incompatibilidad y Afirmación del Alcance de la Negación). Si un enunciado es incompatible con su negación y es aceptado entonces no se cuestiona: $A^{I}\rightarrow(A\rightarrow\sim\neg A)$.

5.2.3 F$\neg$FA$\neg$ (Falsedad de la Negación y Falsedad del Alcance de la Negación). Si un enunciado no es cuestionado y no es aceptado entonces todo enunciado es aceptado: $\sim\neg A\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$.

5.2.4 AA$\neg$A$\neg$I (Afirmación del Alcance de la Negación y Afirmación de la Negación en la Incompatibilidad). Si un enunciado es aceptado y cuestionado entonces es compatible con su negación: $A\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A^{I})$.

5.2.5 FA$\neg$I (Falsedad del Alcance de la Negación en la Incompatibilidad). Si un enunciado no es aceptado entonces es incompatible con su negación: $\sim A\rightarrow A^{I}$.

5.2.6 F$\neg$I (Falsedad de la Negación en la Incompatibilidad). Si un enunciado no es cuestionado entonces es incompatible con su negación: $\sim\neg A\rightarrow A^{I}$.

5.2.7 FIFA$\neg$ (Falsedad de la Incompatibilidad y Falsedad del Alcance de la Negación). Si un enunciado es compatible con su negación y es no es aceptado entonces todo es aceptado: $\sim A^{I}\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$.

5.2.8 Propagación de la incompatibilidad. Si un enunciado es incompatible con su negación entonces el enunciado que lo acepta y cuestiona también es incompatible con su negación: $A^{I}\rightarrow(A\wedge\neg A)^{I}$.

5.2.9 Compatibilidad con la negación. Si un enunciado se acepta y se cuestiona entonces es compatible con su negación: $(A\wedge\neg A)\rightarrow\sim A^{I}$.

Puesto que por FI se tiene la recíproca, se puede concluir la siguiente caracterización de A^{I}, Los enunciados compatibles con su negación son los que se aceptan y se cuestionan: $\sim A^{I}\leftrightarrow(A\wedge\neg A)$. Los enunciados incompatibles con su negación son los que no se aceptan o no se cuestionan: $A^{I}\leftrightarrow(\sim A\vee\sim\neg A)$.

5.2.10 Principio de trivialización. Si un enunciado es incompatible con su negación y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: $A^{I}\rightarrow[\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

5.2.11 Reducción al absurdo débil. Si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es cuestionado: $B^{I}\rightarrow\{(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]\}$.

Se tiene también que si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es rechazado: $B^I \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow {\sim}A]\}$. De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte, si del cuestionamiento de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es aceptado: $B^I \rightarrow \{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$.

5.2.12 Si cuando de un enunciado incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de un segundo se sigue el cuestionamiento del incompatible entonces del incompatible se sigue el segundo: $A^I \rightarrow \{[(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$.

De manera similar se tiene, si cuando del cuestionamiento un enunciado incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de un segundo se sigue el incompatible entonces del cuestionamiento del incompatible se sigue el segundo: $A^I \rightarrow \{[(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)\}$.

5.2.13 Cuestionamiento de la conjunción. Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación: $(A \wedge B)^I \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$.

También se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación: $[(A \wedge B)^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow ({\sim}A \vee {\sim}B)]$.

5.2.14 Disyunción de cuestionamientos. Si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la conjunción de ellos: $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$.

También se tiene que si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación entonces se rechaza la conjunción de ellos: $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow {\sim}(A \wedge B)]$.

5.2.15 Cuestionamiento de la disyunción. Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el cuestionamiento ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación: $(A \vee B)^I \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$.

También se tiene que del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el rechazo de ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación: $(A \vee B)^I \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow ({\sim}A \wedge {\sim}B)]$.

5.2.16 Conjunción de cuestionamientos. Si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la disyunción de ellos: $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$.

También se tiene que si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se rechaza la disyunción de ellos: $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow {\sim}(A \vee B)]$.

5.2.17 Contrarrecíproca débil. Modus tollens. Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y éste se cuestiona entonces se cuestiona el antecedente: $B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$.

Se tiene también que cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y éste se cuestiona entonces se rechaza el antecedente: $B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow{\sim}A)]$.

5.2.18 Contrarrecíproca fuerte. Modus tollens. Si del cuestionamiento de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación, entonces, si se acepta el último, también se acepta el primero: $A^{I}\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

También se tiene que si del cuestionamiento de un enunciado se sigue el rechazo de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $(\neg B\rightarrow{\sim}A)\rightarrow(A\rightarrow B)$. También se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $A^{I}\rightarrow[({\sim}B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

5.2.19 Principio de bivalencia. Si un enunciado se sigue de otro y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es aceptado: $(B\rightarrow A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}$.

De manera similar se prueba que si el cuestionamiento de un enunciado se sigue de otro y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es cuestionado: $(B\rightarrow\neg A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A\}$.

5.2.20 Si al cuestionar un enunciado incompatible con su negación se sigue un segundo enunciado, y esto implica el segundo, entonces el segundo se sigue del incompatible: $B^{I}\rightarrow[\{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}\rightarrow(B\rightarrow A)]$.

5.2.21 Introducción del doble cuestionamiento. Si se acepta un enunciado incompatible con su negación entonces se cuestiona el cuestionamiento de éste: $A^{I}\rightarrow[A\rightarrow\neg\neg A)]$.

5.2.22 Eliminación del doble cuestionamiento. Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado se sigue el enunciado cuando su cuestionamiento es incompatible con la negación: $(\neg A)^{I}\rightarrow[\neg\neg A\rightarrow A)]$.

5.2.23 Implicación disyunción. En un condicional se cuestiona el antecedente o se acepta el consecuente: $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)$.

5.2.24 Disyunción implicación. Silogismo disyuntivo. Si se cuestiona el componente incompatible con la negación de una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción. $A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$.

De manera similar se prueba que si se acepta el componente incompatible con la negación que se cuestiona en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

5.2.25 Cuestionamiento del condicional. Si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación entonces se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente: $(A\to B)^I\to[\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]$.

Se tiene también que si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación entonces se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente: $(A\to B)^I\to[\neg(A\to B)\to(A\wedge{\sim}B)]$.

5.2.26 Aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente. Si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación: $B^I\to[(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)]$.

También se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se rechaza el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación: $B^I\to[(A\wedge\neg B)\to{\sim}(A\to B)]$. También se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se cuestiona el condicional: $(A\wedge{\sim}B)\to\neg(A\to B)$.

5.3 Validez y Completitud

Un análisis similar a 3.6 permite concluir que la lógica básica paraconsistente está caracterizada por los árboles de forzamiento paraconsistentes.

5.4 Resumen de resultados importantes

5.4.1 Principio de no contradicción: $\models{\sim}(A\wedge{\sim}A)$, no $\models{\sim}(A\wedge\neg A)$, no $\models\neg(A\wedge\neg A)$, $\models A^I\to\neg(A\wedge\neg A)$, no $\models\neg(A\wedge\neg A)\to A^I$, $\models A^I\to\neg(A\wedge\neg A)$, $\models A^I\leftrightarrow{\sim}(A\wedge\neg A)$.

5.4.2 Principio del tercero excluído: $\models A\vee{\sim}A$, $\models A\vee\neg A$, no $\models(A\vee\neg A)\to A^I$.

5.4.3 Principio de trivialización: $\models A\to({\sim}A\to B)$, no $\models A\to(\neg A\to B)$, $\models A^I\to[A\to(\neg A\to B)]$.

5.4.4 Principio de reducción al absurdo débil: $\models(A\to B)\to[(A\to{\sim}B)\to{\sim}A]$, no $\models(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]$, $\models B^I\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]\}$, $\models B^I\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to{\sim}A]\}$.

5.4.5 Principio de reducción al absurdo fuerte: $\models({\sim}A\to B)\to[({\sim}A\to{\sim}B)\to A]$, no $\models(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]$, $\models B^I\to\{(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]\}$, $\models B^I\to\{({\sim}A\to B)\to[({\sim}A\to\neg B)\to A]\}$.

5.4.6 Negación de la conjunción: $\models{\sim}(A\wedge B)\to({\sim}A\vee{\sim}B)$, no $\models\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$,

$\models (A\wedge B)^I\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$, $\models (A\wedge B)^I\to[\neg(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)]$.

5.4.7 Disyunción de negaciones: $\models (\sim A\vee\sim B)\to\sim(A\wedge B)$, no $\models (\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)$, $\models [A^I\wedge B^I\wedge]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]$, $\models [A^I\wedge B^I]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\sim(A\wedge B)]$.

5.4.8 Negación de la disyunción: $\models \sim(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)$, no $\models \neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$, $\models (A\vee B)^I\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$, $\models (A\vee B)^I\to[\neg(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)]$.

5.4.9 Conjunción de negaciones: $\models (\sim A\wedge\sim B)\to\sim(A\vee B)$, no $\models (\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)$, $\models [A^I\wedge B^I]\to[(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)]$, $\models [A^I\wedge B^I]\to[(\neg A\wedge\neg B)\to\sim(A\vee B)]$.

5.4.10 Negación del condicional: $\models \sim(A\to B)\to(A\wedge\sim B)$, no $\models \neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)$, $\models (A\to B)^I\to [\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]$, $\models (A\to B)^I\to [\neg(A\to B)\to(A\wedge\sim B)]$.

5.4.11 Afirmación del antecedente y negación del consecuente: $\models (A\wedge\sim B) \to\sim(A\to B)$, no $\models (A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$, $\models B^I\to[(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)]$, $\models B^I\to[(A\wedge\neg B)\to \sim(A\to B)]$.

5.4.12 Eliminación de la doble negación: $\models \sim\sim A\to A$, no $\models \neg\neg A\to A$, $\models (\neg A)^I\to[\neg\neg A \to A]$, $\models \sim\neg A\to A$.

5.4.13 Introducción de la doble negación: $\models A\to\sim\sim A$, no $\models A\to\neg\neg A$, $\models A^I\to[A\to\neg\neg A]$, $\models A^I\to[A\to\sim\neg A]$.

5.4.14 Contrarrecíproca débil: $\models (A\to B)\to(\sim B\to\sim A)$, no $\models (A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$, $\models B^I\to [(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)]$, $\models B^I\to[(A\to B)\to(\neg B\to\sim A)]$.

5.4.15 Contrarrecíproca fuerte: $\models (\sim B\to\sim A)\to(A\to B)$, no $\models (\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$, $\models A^I\to[(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)]$, $\models A^I\to[(\sim B\to\neg A)\to(A\to B)]$, $\models (\neg B\to\sim A)\to(A\to B)$.

5.4.16 Implicación material: $\models (A\to B)\to(\sim A\vee B)$, $\models (A\to B)\to(\neg A\vee B)$.

5.4.17 De disyunción a implicación: $\models (\sim A\vee B)\to(A\to B)$, no $\models (\neg A\vee B)\to(A\to B)$, $\models A^I\to [(\neg A\vee B)\to(A\to B)]$, $\models A^I\to [(A\vee B)\to(\neg A\to B)]$, no $\models (A\vee B)\to(\neg A\to B)$.

5.4.18 Silogismo disyuntivo y Modus tollens: $\vdash (A\vee B)$ y $\vdash \sim A \Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A\vee B)$ y $\vdash \neg A$ no$\Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A\vee B)$ y $\vdash \neg A$ y $\vdash A^I \Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A\to B)$ y $\vdash \sim B \Rightarrow \vdash \sim A$, $\vdash (A\to B)$ y $\vdash \neg B$ no$\Rightarrow \vdash \neg A$, $\vdash (A\to B)$ y $\vdash \neg B$ y $\vdash B^I \Rightarrow \vdash \neg A$, $\vdash (A\to B)$ y $\vdash \neg B$ y $\vdash B^I \Rightarrow \vdash \sim A$.

5.4.19 Preservación de la incompatiblidad: no $\models (A^I\wedge B^I)\to(A\wedge B)^I$, $\models [\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee \neg B)]\to[(A^I\wedge B^I)\to(A\wedge B)^I]$, no $\models (A^I\wedge B^I)\to(A\vee B)^I$, $\models [\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]\to[(A^I\wedge B^I)\to (A\vee B)^I]$, no $\models (A^I\wedge B^I)\to(A\to B)^I$, $\models [\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]\to[B^I\to(A\to B)^I]$, no $\models A^I\to (\neg A)^I$, $\models (\neg\neg A\to A)\to[A^I\to (\neg A)^I]$, no $\models A^I\to (\sim A)^I$, $\models (\neg\sim A\to A)\to\{[A^I\to (\sim A)^I]\wedge(\sim A)^I\}$.

5.5 Retículo de consecuencias para la Lógica Básica Paraconsistente

En el diagrama 2 se resume, desde el punto de vista deductivo, la relación de implicación entre los operadores negación fuerte, negación débil e incompatibilidad.

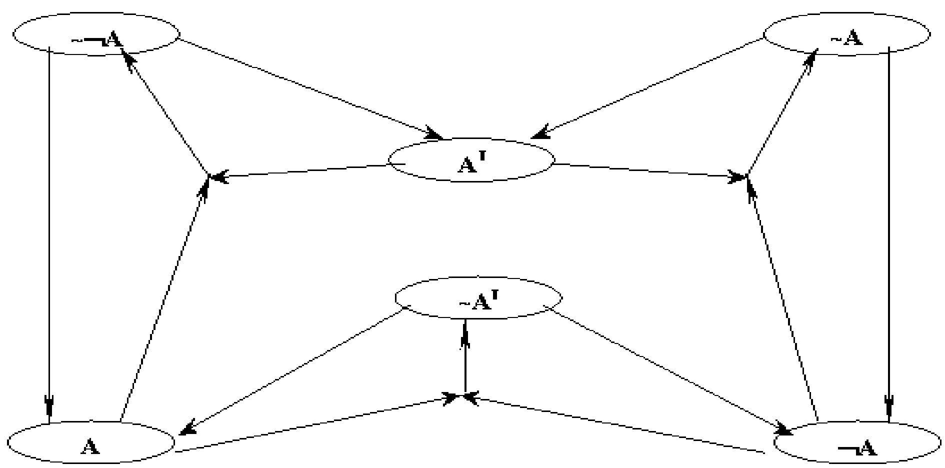
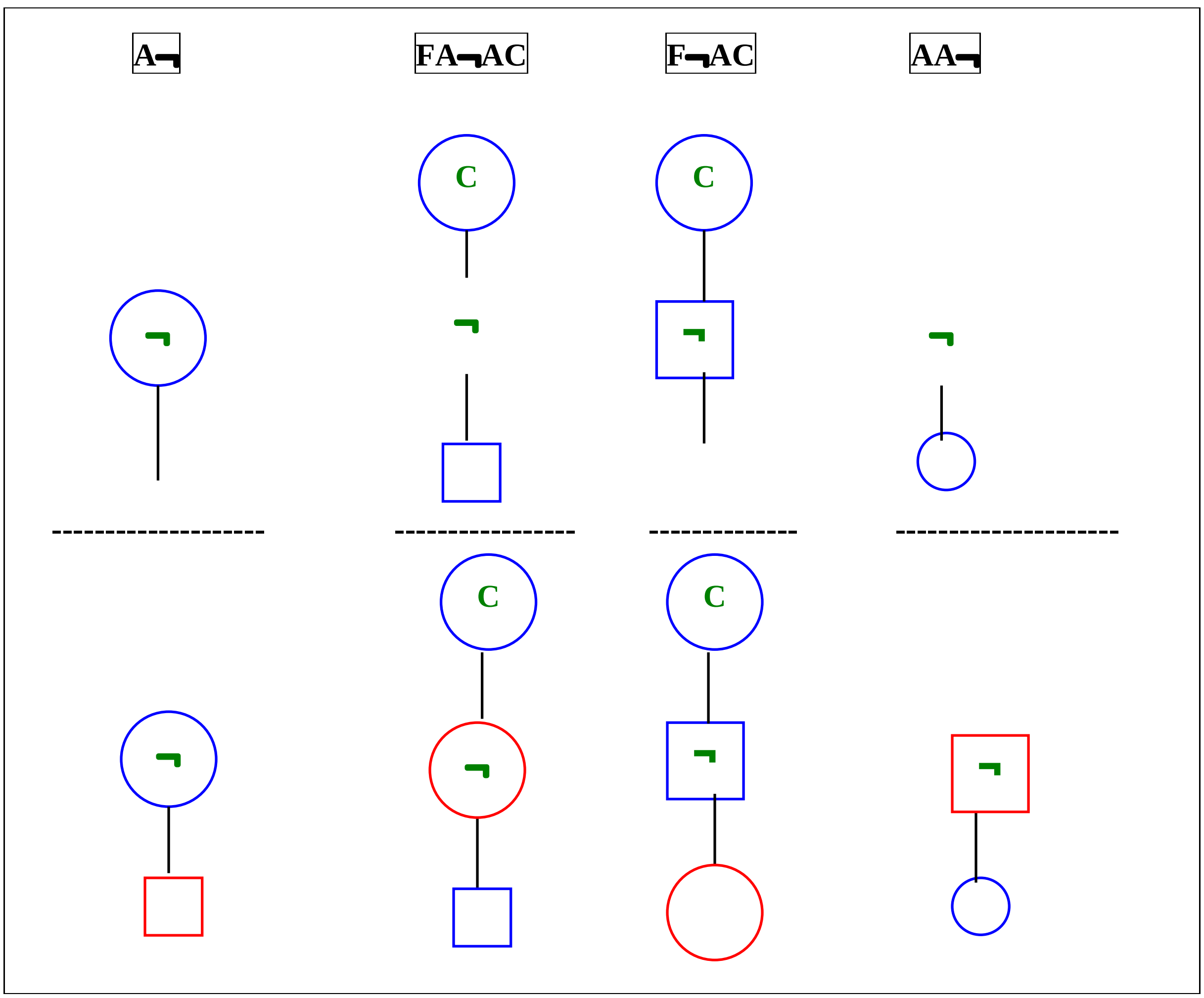


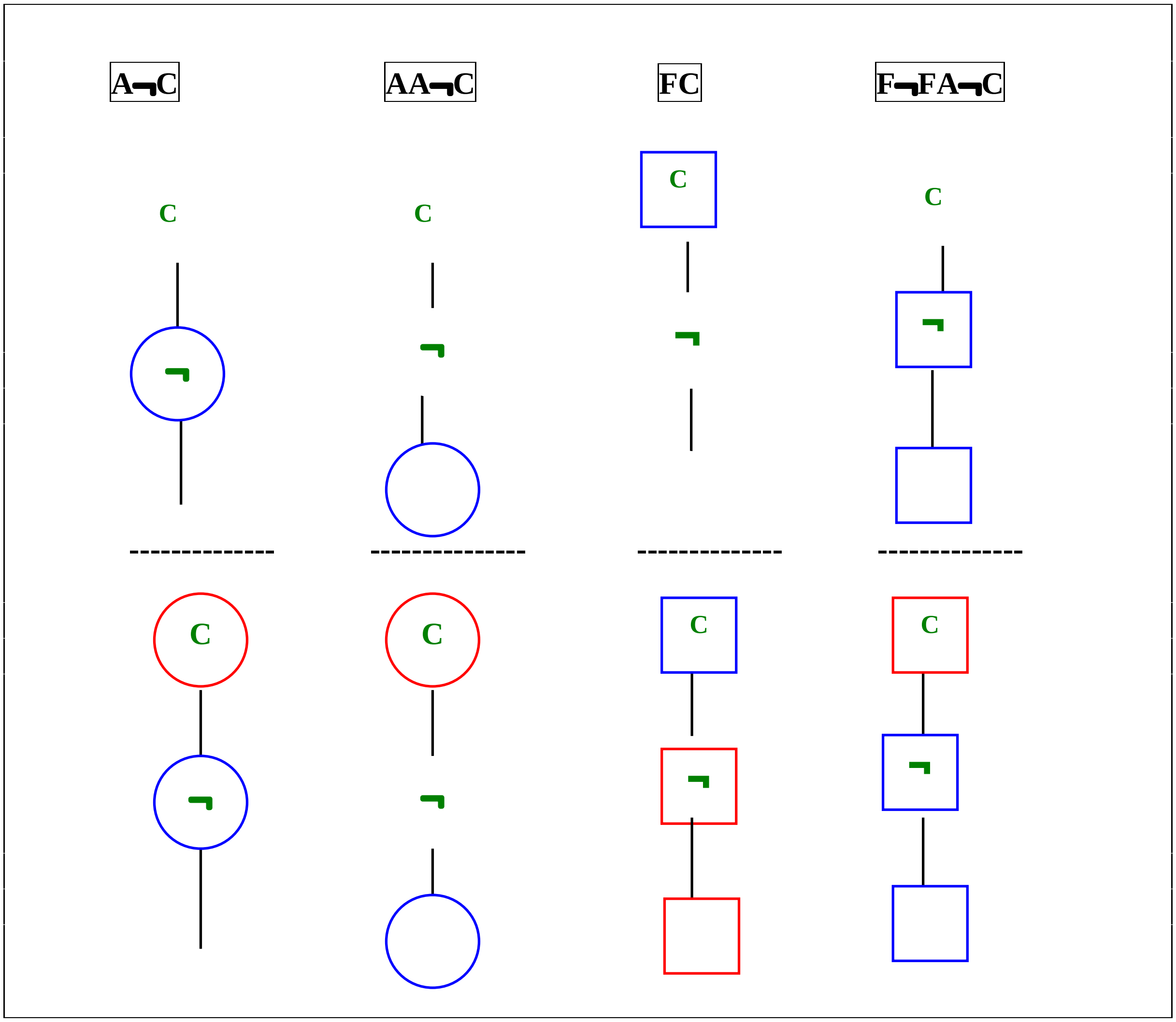
Diagrama 2

6. Árboles de Forzamiento para la Lógica Básica Paracompleta - LBPo

Los árboles de forzamiento semántico para el sistema de Lógica Básica Paracompleta LBPo, se obtienen a partir de los árboles de forzamiento semántico clásicos, agregando otro operador de negación llamado **Negación Débil (¬)** junto con reglas de inferencia similares a las del operador **Negación Clásica (~)** pero debilitadas. Para obtener el sistema LBPo, no se toman las reglas Falsedad de la Negación Débil (F¬) y Falsedad del Alcance de la Negación Débil (FA¬), éstas reglas sólo podrán ser aplicadas a una fórmula cuando dicha fórmula sea completa respecto a la negación, es decir cuando A^C sea verdadera (La fórmula A^C se lee: A es completa). Con éste debilitamiento puede ocurrir que una fórmula y su negación débil estén marcadas con cuadro (sean ambas falsas) y no se genere doble marca, es decir, la fórmula es incompleta respecto a la negación.

6.1 Reglas de inferencia para la Negación paracompleta



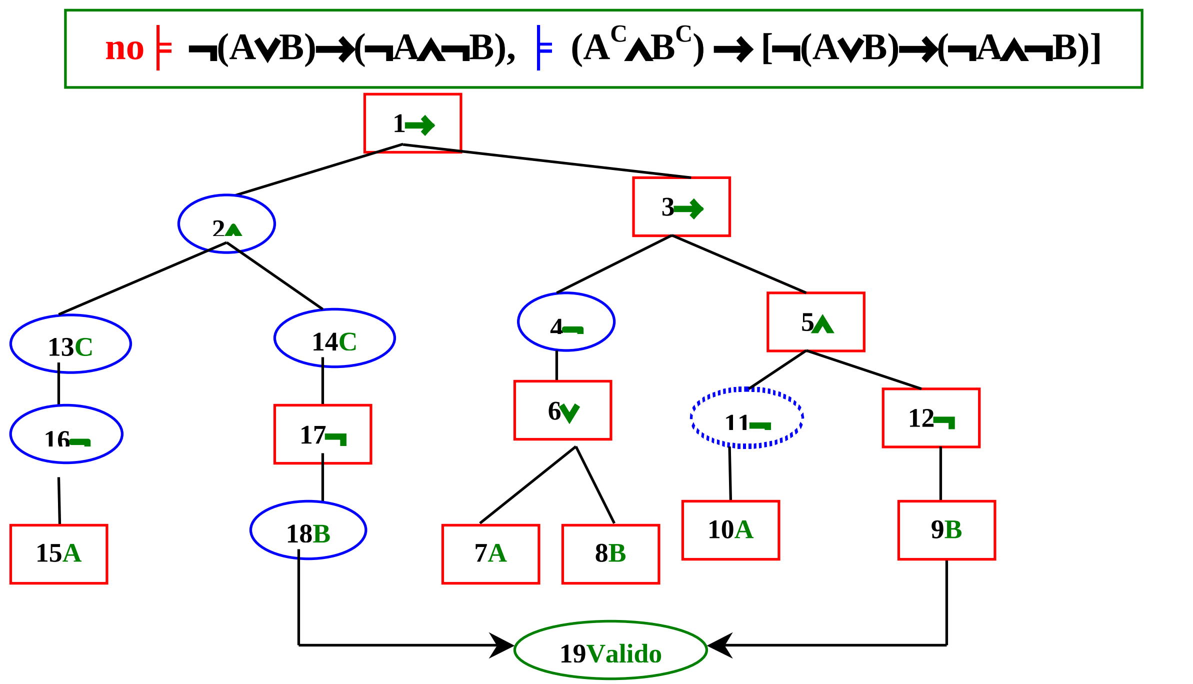


A¬ (Afirmación de la Negación): Los enunciados cuestionados son rechazados.
FA¬AC (Falsedad del Alcance de la Negación y Afirmación de la Completez): Un enunciado rechazado es cuestionado cuando es determinable.
F¬AC (Falsedad de la Negación y Afirmación de la Completez): Un enunciado determinable es aceptado cuando no es cuestionado.
AA¬ (Afirmación del Alcance de la Negación): Los enunciados aceptados no son cuestionados.
A¬C (Afirmación de la Negación en la Completez): Los enunciados cuestionados son determinables.
AA¬C (Afirmación del Alcance de la Negación en la Completez): Los enunciados aceptados son determinables.
FC (Falsedad de la Completez): Los enunciados indeterminables ni se aceptan ni se cuestionan.
F¬FA¬C (Falsedad de la Negación Falsedad del Alcance de la Negación en la Completez): Los enunciados que ni se aceptan ni se cuestionan son indeterminables.

Observar que basta tomar como **primitivas** las reglas **A¬, FA¬AC y FC** ya que las otras reglas son derivadas de éstas:

6.2 Algunos teoremas importantes para la negación paracompleta

6.2.1 Cuestionamiento de la Disyunción



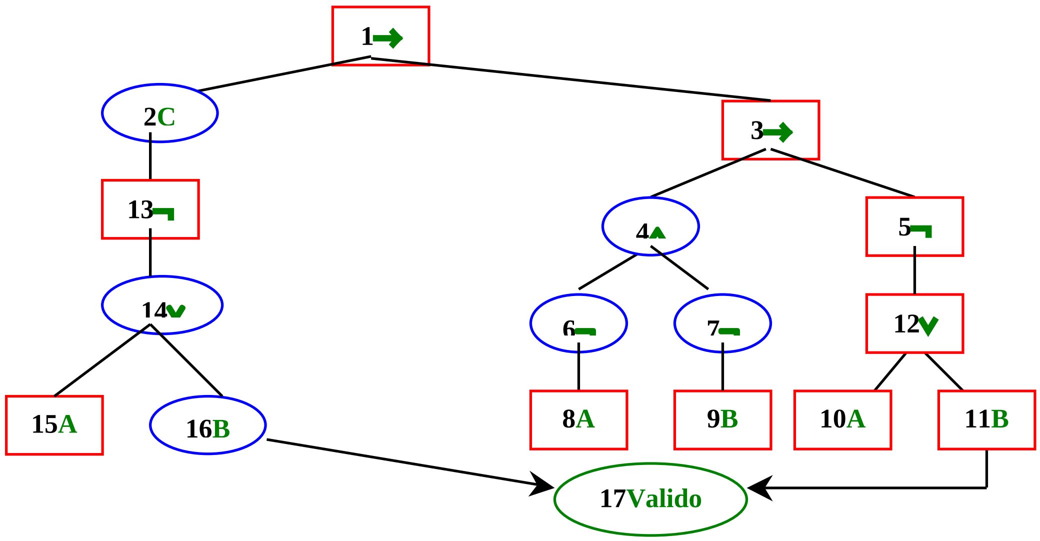
1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.	6. A¬ en 4.
7, 8. F∨ en 6.	9. IF en 8.	10. IF en 7.	11. Opción.
12. AIF∧ en 11, 5.	13, 14. A∧ en 2.	15. IF en 7.	16. FA¬AC en 15 y 13.
17. IF en 12.	18. F¬AC en 17, 14.	19. DM en 9 y 18.	

Los pasos 1, …, 19 indican que es válido el enunciado $(A^C \wedge B^C) \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$. Los pasos 3, …, 12 indican que el enunciado $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $\neg A=1$, $A=0$, $B=0$, $\neg B=0$ y $\neg(A \vee B)=1$.
Se tiene entonces que de la negación de la disyunción de dos enunciados se sigue la conjunción de sus negaciones cuando cada enunciado es completo.

6.2.2 Conjunción de Cuestionamientos

Los pasos 1, …, 17 indican que es válido el enunciado $(A \vee B)^C \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$. Los pasos 3, …, 12 indican que el enunciado $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$, $B=0$, $\neg B=1$ y $\neg(A \vee B)=0$.
Se tiene entonces que de la conjunción de las negaciones se sigue la negación de la disyunción cuando la disyunción es completa.

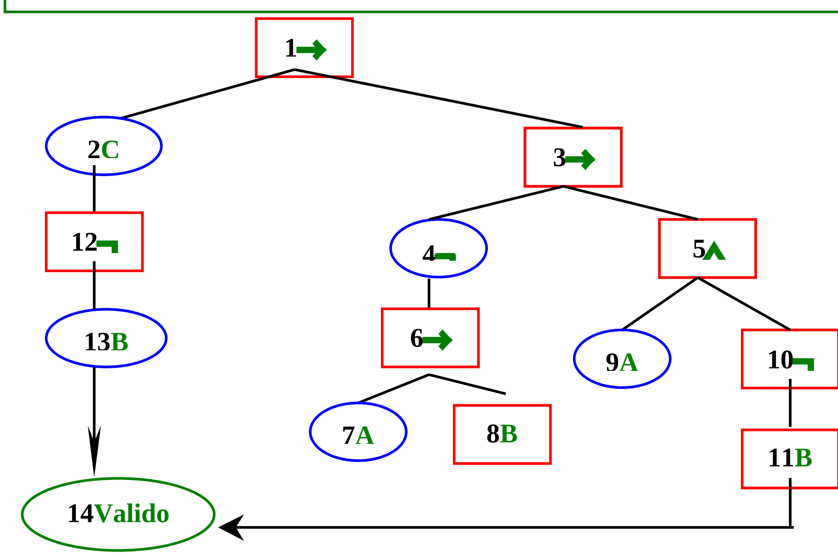
no $\models$ $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$, $\models$ $(A \vee B)^C \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$



1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.	6, 7. A∧ en 4.
8. A¬ en 6.	9. A¬ en 7.	10. IF en 8.	11. IF en 9.
12. FIFD∨ en 10, 11.	13. IF en 5.	14. F¬AC en 13, 2.	15. IF en 8.
16. FIA∨ en 15, 14.	17. DM en 11 y 16.		

6.2.3 Cuestionamiento del Condicional

no $\models$ $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$, $\models$ $B^C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)]$

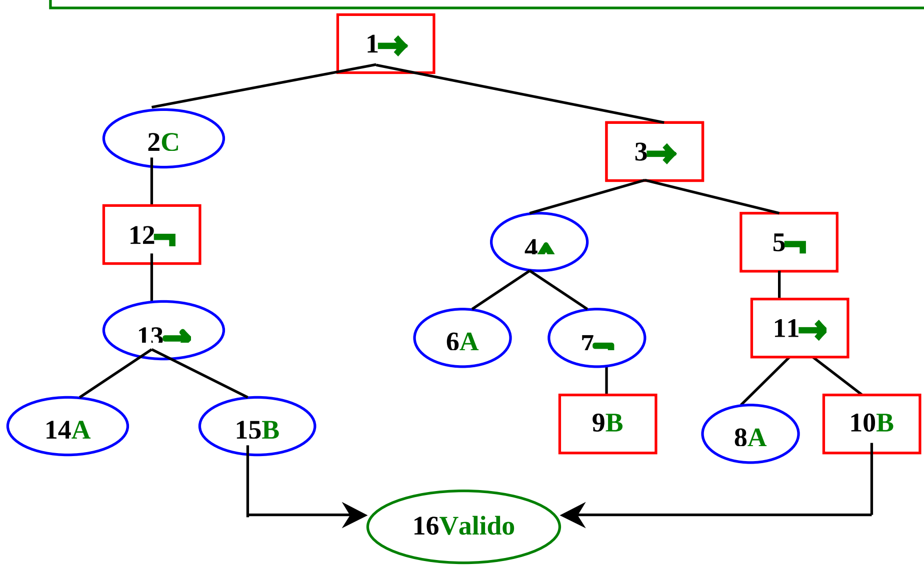


1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.	6. A¬ en 4.
7, 8. F→ en 6.	9. IA en 7.	10. AIF∧ en 9 y 5.	11. IF en 8.
12. IF en 10.	13. F¬AC en 12 y 2.	14. DM en 11 y 13.	

Los pasos 1, …, 14 indican que es válido el enunciado $B^C \rightarrow [\neg(A\rightarrow B)\rightarrow (A\wedge\neg B)]$. Los pasos 3, …, 11 indican que el enunciado $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow (A\wedge\neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, B=0, ¬B=0 y ¬(A→B)=1.
Se tiene entonces que de la negación de un condicional se sigue su antecedente y la negación de su consecuente cuando el consecuente es completo.

6.2.4 Conjunción entre el antecedente y el cuestionamiento del consecuente

no $\models$ $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, $\models$ $(A\rightarrow B)^C\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$

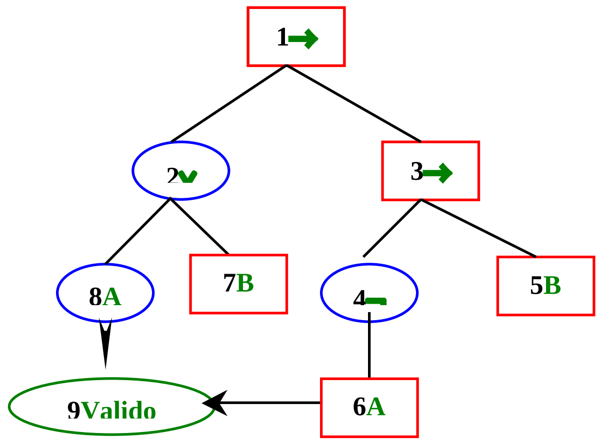


1. FR.	2, 3. F→ en 1.	4, 5. F→ en 3.	6, 7. A∧ en 4.
8. IA en 6.	9. A¬ en 7.	10. IF en 9.	11. AIFD→ en 8 y 10.
12. IF en 5.	13. F¬AC en 12, 2.	14. IA en 6.	15. AIA→ en 14 y 13.
16. DM en 15 y 10.			

Los pasos 1, …, 16 indican que es válido el enunciado $(A\rightarrow B)^C\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$. Los pasos 3, …, 11 indican que el enunciado $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=1, B=0, ¬B=1 y ¬(A→B)=0.
Se tiene entonces que del antecedente y la negación de su consecuente se sigue la negación de un condicional sólo cuando el condicional es completo.

6.2.5 Silogismo Disyuntivo

$\models (A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

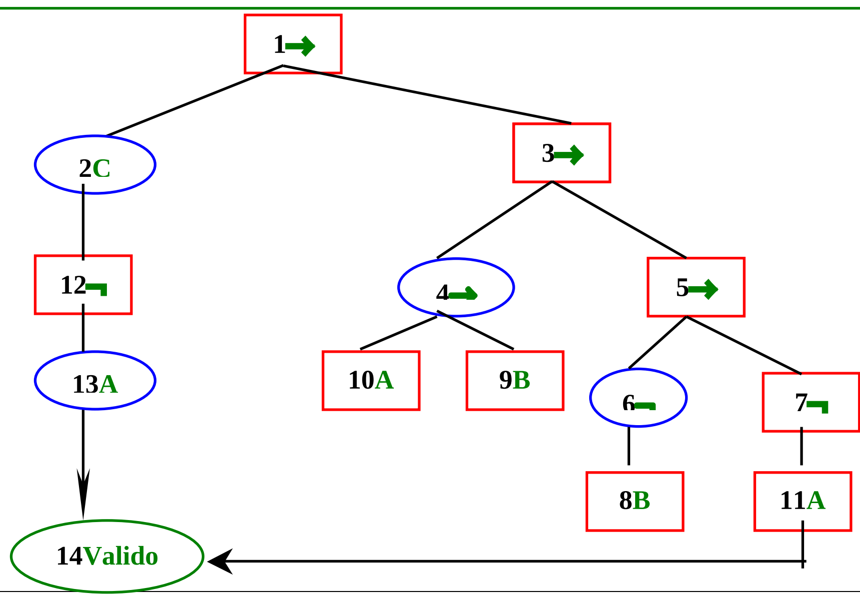


1. FR. 2, 3. F→ en 1. 4, 5. F→ en 3. 6. A¬ en 4.
7. IF en 5. 8. FDA∨ en 7 y 2. 9. DM en 8 y 6.

Los pasos 1, …, 9 indican que es válido el enunciado $(A\vee B)\rightarrow (\neg A\rightarrow B)$. Observar que el anterior enunciado está representando el Silogismo Disyuntivo (de $A\vee B$ y $\neg A$ se sigue B), se tiene entonces que el Silogismo Disyuntivo es válido.

6.2.6 Contrarrecíproca Débil

no $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$, $\models A^{C}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$

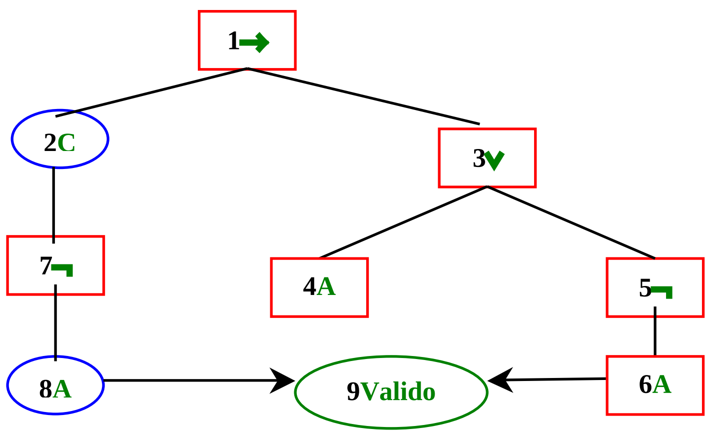


1. FR.	2, 3. F$\rightarrow$ en 1.	4, 5. F$\rightarrow$ en 3.	6, 7. F$\rightarrow$ en 5.
8. A$\neg$ en 6.	9. IF en 8.	10. FDA$\rightarrow$ en 9, 4.	11. IF en 10.
12. IF en 7.	13. F$\neg$AC en 12, 2.	14. DM en 13 y 11.	

Los pasos 1, …, 14 indican que es válido el enunciado $A^C \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)]$. Los pasos 3, …, 11 indican que el enunciado $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=0, B=0, $\neg$B=1 y $\neg$A=0.
Observar que el anterior enunciado está representando el Modus Tollens (de $A \rightarrow B$ y $\neg B$ se sigue $\neg A$), se tiene entonces que el Modus Tollens es válido sólo si el antecedente es completo.

6.2.7 Tercero Excluido

$\boxed{\text{No} \models A \vee \neg A, \ \models A^C \rightarrow (A \vee \neg A)}$



1. FR.	2, 3. F$\rightarrow$ en 1.	4, 5. F$\vee$ en 3.	6. IF en 4.
7. IF en 5.	8. F$\neg$AC en 7 y 2.	9. DM en 8 y 6.	

Los pasos 1, ..., 9 indican que $A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$ es válido. Los pasos 3, ..., 6 indican que $A \vee \neg A$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual A=0 y $\neg$A=0.
El principio del tercero excluido o principio de no indeterminación es válido cuando el enunciado es completo.

7. Sistema Deductivo para la Lógica Básica Paracompleta LBPo

El sistema *lógica básica paracompleta* LBPo, se obtiene del sistema *lógica básica paraconsistente y paracompleta* LBPco, introduciendo como nuevo axioma, A^I, o de forma equivalente cambiando los axiomas para la negación débil en LBPco por:

7.1 Axiomas para la negación básica paracompleta:

Axioma 12. A¬ (Afirmación de la Negación). Si un enunciado es cuestionado entonces el enunciado es rechazado.

$$\neg A \rightarrow \sim A$$

Incompatibilidad[37].

$$A^{I}$$

Axioma 13. ACFA¬ (Afirmación de la Completez Falsedad del Alcance de la Negación). Si un enunciado es determinable y rechazado entonces es cuestionado.

$$A^{C} \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$$

Axioma 14. FC (Falsedad de la Completez). Si un enunciado es indeterminable entonces ni él ni su negación son aceptados.

$$\sim A^{C} \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$$

7.2 Algunos teoremas para la Lógica Básica Paracompleta

A partir de las pruebas de los resultados para la lógica básica paraconsistente y paracompleta, se tienen los siguientes resultados para la lógica básica paracompleta.

7.2.1 ACF¬ (Afirmación de la Completez y Falsedad de la Negación). Si un enunciado es determinable y no se cuestiona entonces es aceptado: $A^{C} \rightarrow (\sim\neg A \rightarrow A)$.

7.2.2 AA¬ (Afirmación del Alcance de la Negación). Si un enunciado es aceptado entonces no se cuestiona: $A \rightarrow \sim\neg A$.

7.2.3 F¬FA¬C (Falsedad de la Negación y Falsedad del Alcance de la Negación en la Completez). Si un enunciado no es cuestionado y no es aceptado entonces es indeterminable: $\sim\neg A \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim A^{C})$.

7.2.4 AA¬A¬ (Afirmación del Alcance de la Negación y Afirmación de la Negación). Si un enunciado es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

7.2.5 A¬C (Afirmación de la Negación en la Completez). Si un enunciado es cuestionado entonces es determinable: $\neg A \rightarrow A^{C.}$

7.2.6 AA¬C (Afirmación del Alcance de la Negación en la Completez). Si un enunciado es aceptado entonces es determinable: $A \rightarrow A^{C}$.

[37] Éste es el significado del axioma 12.

7.2.7 FCAA¬ (Falsedad de la Completez y Afirmación del Alcance de la Negación). Si un enunciado no es determinable y es aceptado entonces todo es aceptado: $\sim A^C \rightarrow (A \rightarrow B)$.

7.2.8 Principio de bivalencia. Si un enunciado se acepta o se cuestiona entonces es determinable: $(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$.

7.2.9 Principio de bivalencia. Si un enunciado es determinable entonces se acepta o se cuestiona: $A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$.

De los dos resultados anteriores se puede concluir la siguiente caracterización de A^C, los enunciados completos (determinables) son los que se aceptan o se cuestionan: $A^C \leftrightarrow (A \vee \neg A)$, los enunciados incompletos (indeterminables) son los que se ni se aceptan ni se cuestionan: $\sim A^C \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim \neg A)$.

7.2.10 Principio de trivialización. Si un enunciado es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

7.2.11 Reducción al absurdo débil. Si de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de otro enunciado entonces el enunciado inicial es cuestionado: $A^C \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]\}$.

También si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de otro enunciado entonces el enunciado inicial es rechazado: $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \sim A]$. De manera similar, si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de otro enunciado entonces el enunciado inicial es aceptado: $A^C \rightarrow \{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$.

7.2.12 Cuestionamiento de la conjunción. Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos: $[A^C \wedge B^C] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$.

También se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$.

7.2.13 Disyunción de cuestionamientos. Si se cuestiona alguno de dos enunciados entonces se cuestiona la conjunción de ellos cuando ésta es determinable: $(A \wedge B)^C \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$.

También se tiene que si se cuestiona alguno de dos enunciados entonces se rechaza la conjunción de ellos: $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$.

7.2.14 Cuestionamiento de la disyunción. Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento ambos: $[A^C \wedge B^C] \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$.

También se tiene que del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el rechazo de ambos: $\neg(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)$.

7.2.15 Conjunción de cuestionamientos. Si se cuestionan dos enunciados entonces se cuestiona la disyunción de ellos cuando ésta es determinable: $(A\vee B)^{C}\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$.

También se tiene que si se cuestionan dos enunciados entonces se rechaza la disyunción de ellos: $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\vee B)$.

7.2.16 Contrarrecíproca débil. Modus tollens. Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente se cuestiona entonces se cuestiona el antecedente si éste es determinable: $A^{C}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$.

Se tiene también que cuando se acepta un condicional cuyo consecuente se cuestiona entonces se rechaza el antecedente: $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)$.

7.2.17 Contrarrecíproca fuerte. Modus tollens. Si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el cuestionamiento de otro enunciado entonces, si se acepta el último, también se acepta el primero: $B^{C}\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

También se tiene que si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el rechazo de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $B^{C}\rightarrow[(\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$. También se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero. $(\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$.

7.2.18 Principio de bivalencia. Si un enunciado se sigue de uno determinable y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es aceptado: $B^{C}\rightarrow[(B\rightarrow A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}]$.

De manera similar, si el cuestionamiento de un enunciado se sigue de uno determinable y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es cuestionado: $B^{C}\rightarrow[(B\rightarrow\neg A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A\}]$.

7.2.19 Introducción del doble cuestionamiento. Si se acepta un enunciado cuyo cuestionamiento sea determinable entonces se cuestiona el cuestionamiento de éste: $(\neg A)^{C}\rightarrow[A\rightarrow\neg\neg A)]$.

7.2.20 Eliminación del doble cuestionamiento. Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado se sigue el enunciado cuando éste es determinable: $A^{C}\rightarrow[\neg\neg A\rightarrow A)]$.

7.2.21 Implicación disyunción. Cuando se tiene un condicional con antecedente determinable entonces se cuestiona el antecedente o se acepta el consecuente: $A^{C}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$.

7.2.22 Disyunción implicación. Silogismo disyuntivo. Si se cuestiona un componente de una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$.

De manera similar, si se acepta un componente que se cuestiona en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$.

7.2.23 Cuestionamiento del condicional. Si se cuestiona un condicional cuyo consecuente es determinable entonces se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente: $B^{C}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$.

Se tiene también que si se cuestiona un condicional entonces se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente: $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge{\sim}B)$.

7.2.24 Aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente. Si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que éste sea determinable: $(A\rightarrow B)^{C}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$.

También se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se rechaza el condicional: $(A\wedge\neg B)\rightarrow{\sim}(A\rightarrow B)$. También si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que éste sea determinable: $(A\rightarrow B)^{C}\rightarrow[(A\wedge {\sim}B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$.

7.3 Validez y Completitud

Un análisis similar a 3.6 permite concluir que la lógica básica paracompleta está caracterizada por los árboles de forzamiento paracompletos.

7.4 Resumen de resultados importantes

7.4.1 Principio de no contradicción: $\models{\sim}(A\wedge{\sim}A)$, $\models{\sim}(A\wedge\neg A)$, no $\models\neg(A\wedge\neg A)$, $\models(A\wedge\neg A)^{C}\rightarrow\neg(A\wedge\neg A)$.

7.4.2 Principio del tercero excluido: $\models A\vee{\sim}A$, no $\models A\vee\neg A$, $\models A^{C}\leftrightarrow(A\vee\neg A)$, $\models {\sim}A^{C}\leftrightarrow({\sim}A\wedge{\sim}\neg A)$.

7.4.3 Principio de trivialización: $\models A\rightarrow({\sim}A\rightarrow B)$, $\models A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$.

7.4.4 Principio de reducción al absurdo débil: $\models(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow{\sim}B)\rightarrow{\sim}A]$, no $\models(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]$, $\models A^{C}\rightarrow\{(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]\}$, $\models(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow{\sim}A]$.

7.4.5 Principio de reducción al absurdo fuerte: $\models({\sim}A\rightarrow B)\rightarrow[({\sim}A\rightarrow{\sim}B)\rightarrow A]$, no $\models(\neg A\rightarrow B)\rightarrow[(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]$, $\models A^{C}\rightarrow\{(\neg A\rightarrow B)\rightarrow[(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]\}$, $\models({\sim}A\rightarrow B)\rightarrow[({\sim}A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]\}$.

7.4.6 Negación de la conjunción: $\models\sim(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)$, no $\models\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$, $\models[A^{C}\wedge B^{C}]\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$, $\models\neg(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)$.

7.4.7 Disyunción de negaciones: $\models(\sim A\vee\sim B)\to\sim(A\wedge B)$, no $\models(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)$, $\models(A\wedge B)^{C}\to[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]$, $\models(\neg A\vee\neg B)\to\sim(A\wedge B)$.

7.4.8 Negación de la disyunción: $\models\sim(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)$, no $\models\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$, $\models[A^{C}\wedge B^{C}]\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$, $\models\neg(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)$.

7.4.9 Conjunción de negaciones: $\models(\sim A\wedge\sim B)\to\sim(A\vee B)$, no $\models(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)$, $\models(A\vee B)^{C}\to[(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)]$, $\models(\neg A\wedge\neg B)\to\sim(A\vee B)$.

7.4.10 Negación del condicional: $\models\sim(A\to B)\to(A\wedge\sim B)$, no $\models\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)$, $\models B^{C}\to[\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]$, $\models\neg(A\to B)\to(A\wedge\sim B)$.

7.4.11 Afirmación del antecedente y negación del consecuente: $\models(A\wedge\sim B)\to\sim(A\to B)$, no $\models(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$, $\models(A\to B)^{C}\to[(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)]$, $\models(A\wedge\neg B)\to\sim(A\to B)]$.

7.4.12 Eliminación de la doble negación: $\models\sim\sim A\to A$, no $\models\neg\neg A\to A$, $\models A^{C}\to[\neg\neg A\to A]$, no $\models\sim\neg A\to A$, $\models A^{C}\to[\sim\neg A\to A]$.

7.4.13 Introducción de la doble negación: $\models A\to\sim\sim A$, no $\models A\to\neg\neg A$, $\models(\neg A)^{C}\to[A\to\neg\neg A]$, $\models A\to\sim\neg A$.

7.4.14 Contrarrecíproca débil: $\models(A\to B)\to(\sim B\to\sim A)$, no $\models(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$, $\models A^{C}\to[(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)]$, $\models(A\to B)\to(\neg B\to\sim A)$.

7.4.15 Contrarrecíproca fuerte: $\models(\sim B\to\sim A)\to(A\to B)$, no $\models(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$, $\models B^{C}\to[(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)]$, $\models(\sim B\to\neg A)\to(A\to B)$, $\models B^{C}\to[(\neg B\to\sim A)\to(A\to B)]$.

7.4.16 Implicación material: $\models(A\to B)\to(\sim A\vee B)$, no $\models(A\to B)\to(\neg A\vee B)$, $\models A^{C}\to[(A\to B)\to(\neg A\vee B)]$.

7.4.17 De disyunción a implicación: $\models(\sim A\vee B)\to(A\to B)$, $\models(A\vee B)\to(\neg A\to B)$.

7.4.18 Silogismo disyuntivo y Modus tollens: $\vdash(A\vee B)$ y $\vdash\sim A\Rightarrow\vdash B$, $\vdash(A\vee B)$ y $\vdash\neg A\Rightarrow\vdash B$, $\vdash(A\to B)$ y $\vdash\sim B\Rightarrow\vdash\sim A$, $\vdash(A\to B)$ y $\vdash\neg B$ no$\Rightarrow\vdash\neg A$, $\vdash(A\to B)$ y $\vdash\neg B$ y $\vdash A^{C}\Rightarrow\vdash\neg A$, $\vdash(A\to B)$ y $\vdash\neg B\Rightarrow\vdash\sim A$.

7.4.19 Preservación de la completez: no $\models(A^{C}\wedge B^{C})\to(A\wedge B)^{C}$, $\models[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]\to[(A^{C}\wedge B^{C})\to(A\wedge B)^{C}]$, no $\models(A^{C}\wedge B^{C})\to(A\vee B)^{C}$, $\models[(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)]\to[(A^{C}\wedge B^{C})\to(A\vee B)^{C}]$, no $\models(A^{C}\wedge B^{C})\to(A\to B)^{C}$, $\models[(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)]\to[B^{C}\to(A\to B)^{C}]$, no $\models A^{C}\to$

$(\neg A)^C$, $\models$ $(A\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow[A^C\rightarrow(\neg A)^C]$, no $\models$ $A^C\rightarrow(\sim A)^C$, $\models$ $(A\rightarrow\neg\sim A)\rightarrow\{[A^C\rightarrow(\sim A)^C]\wedge(\sim A)^C\}$.

7.5 Retículo de consecuencias para la Lógica Básica Paracompleta

En el diagrama 3 se resume, desde el punto de vista deductivo, la relación de implicación entre los operadores negación fuerte, negación débil y completez.

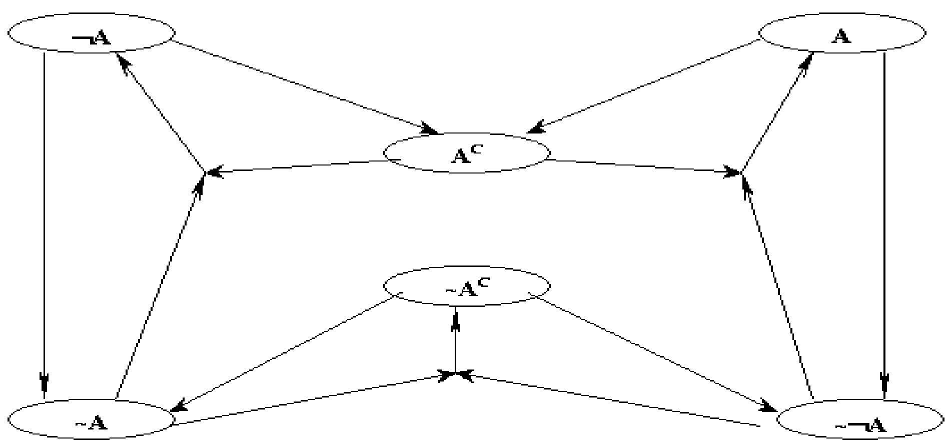


Diagrama 3

8. Bibliografía

[Arruda 80]. Arruda, Aida. A survey of paraconsistent logic. In: A. I. Arruda, R. Chuaqui, and N. C. A. da Costa, editors, *Mathematical Logic in Latin America:* Proce-edings of the IV Latin American Symposium on Mathematical Logic, Chile, 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980.

[Batens 00]. Batens, Diderik. A survey of inconsistency-adaptive logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors, *Frontiers in Paraconsistent Logic:* Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

[Bobenrieth 96]. Bobenrieth M, Andrés. *Inconsistencias ¿Por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistent*e. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo, 1996.

[Bunder 84]. Bunder, M. Some definitions of negation leading to paraconsistent logics. *Studia Logic*a, 43(1/2), 1984.

[Carnielli 00]. Carnielli, Walter. Possible-translations semantics for paraconsistent logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors, *Frontiers in Paraconsistent Logic:* Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

[Carnielli Marcos Amo 00]. Carnielli, W., Marcos, J. y de Amo, S. Formal inconsistency and evolutionary databases. To appear in : *Logic and Logical Philosoph*y, (Proceedings of the Jaskowski's Memorial Symposium), 1999/2000.

[Da Costa 93]. Da Costa, Newton. *Inconsistent Formal Systems*. Thesis, UFPR, Brazil, 1963. Curitiba: Editora UFPR, 1993.

[Priest 87]. Priest, G. *In Contradiction. A Study of the Transconsistent.* Dordrecht : Nijhoff, 1987.

[Priest Routley 89], and J. Norman (editors). Priest, G. y Routley. *Paraconsistent Logic: essays on the inconsisten*t. Munich: Philosophia Verlag, 1989.

[Sierra 01a]. Sierra, Manuel. Árboles de Forzamiento Semántico. *Revista Universidad EAFIT No 123*, Medellín, 2001.

[Sierra 01b]. Sierra, Manuel. Lógica Básica Paraconsistente Clásica. *Memorias del VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas*, Universidad de Nariño, Pasto, 2001.

[Sierra 02a]. Sierra, Manuel. Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica. *Revista Universidad EAFIT No 126*, Medellín, 2002.

[Sierra 02b]. Sierra, Manuel. Inferencia Visual Para la Lógica de la Vaguedad LBPcoC. *Memorias del XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2002.