



UNIVERSIDAD  
**EAFIT**<sup>®</sup>  
Abierta al mundo



Ecós de Economía | No. 28 | Medellín, abril de 2009 | pp. 53-73

## **Análisis Envólvente de Datos -DEA-: Una aplicación al sector de telecomunicaciones de países de medianos ingresos**

*Liz Jeanneth Londoño Sierra  
Yudy Elena Giraldo Pérez*

*Liz Jeanneth Londoño Sierra*  
*Yudy Elena Giraldo Pérez*

## **Resumen**

El presente artículo es parte de la monografía para optar al título de magíster en Economía “Cargos de acceso en telecomunicaciones en Colombia: ¿una regulación eficiente?” (2007). En este artículo se presenta la técnica no paramétrica DEA donde se desarrolla el modelo de rendimientos constantes a escala DEA – CCR y el de rendimientos variables a escala DEA – BCC. Además, se presenta el caso de aplicación al sector de telecomunicaciones para los países de medianos ingresos.

**Palabras clave:** Eficiencia, DEA, telecomunicaciones

**Clasificación JEL:** D61, C14, L96

## **Abstract**

This paper is part of the monograph to qualify for master's degree in economics “Access Charges in Telecommunications in Colombia: an efficient regulation?” (2007). This paper presents a nonparametric efficiency method, Data Envelopment Analysis -DEA-, specifically, the fundamental DEA models: CCR and BCC. Finally, it presents the case of application to the telecommunications sector for middle-income countries.

# **Análisis Envolvente de Datos -DEA- : Una aplicación al sector de telecomunicaciones de países de medianos ingresos**

*Liz Jeanneth Londoño Sierra<sup>1</sup>  
Yudy Elena Giraldo Pérez<sup>2</sup>*

## **Introducción**

El uso de las técnicas de medición de la eficiencia con la que actúan las diferentes empresas de servicios públicos es, cada vez más, una herramienta indispensable para los reguladores actuales en su objetivo de lograr la eficiencia económica. Las técnicas relacionadas con la evaluación de la eficiencia productiva en el sector de los servicios públicos han experimentado en los últimos años un auge creciente, en un periodo en el que se han producido una serie de reformas orientadas a introducir una mayor racionalidad económica para su funcionamiento. El análisis y la medición de la eficiencia en el sector de servicios públicos adquieren un papel fundamental para evaluar dichas reformas y los diferentes modelos y esquemas regulatorios que intervienen, controlan e incentivan las actividades de los servicios públicos prestados por empresas con estructuras monopólicas u oligopólicas con poder de mercado.

---

Fecha de recepción: 6 de marzo de 2009. Fecha de aceptación: 3 de abril de 2009.

<sup>1</sup> Master en Economía de la Universidad de Antioquia. Profesora del Departamento de Economía. Miembro del Grupo de Estudios de Microeconomía Aplicada de la Universidad Eafit. [llondo11@eafit.edu.co](mailto:llondo11@eafit.edu.co)

<sup>2</sup> Master en Economía de la Universidad de Antioquia. Docente de Carrera del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM). Miembro del Grupo de Estudios de Microeconomía Aplicada de la Universidad Eafit. [ygirald5@eafit.edu.co](mailto:ygirald5@eafit.edu.co)

Las técnicas más utilizadas para el análisis de eficiencia productiva y asignativa en el sector de servicios públicos son: Análisis Envolvente de Datos (DEA) y Análisis de Frontera Estocástica. El objetivo de este artículo es presentar la técnica no paramétrica DEA donde se desarrolla el modelo de rendimientos constantes a escala DEA – CCR y el de rendimientos variables a escala DEA – BCC y, finalmente, una aplicación al sector de telecomunicaciones para los países de medianos ingresos.

## Metodología

La metodología de Análisis Envolvente de Datos, en adelante *DEA*, es una técnica no paramétrica que permite determinar la eficiencia relativa de un conjunto de unidades tomadoras de decisiones<sup>3</sup> (conocidas como *DMUs*<sup>4</sup> - *Decisión Marking Unit*), y la construcción de una frontera eficiente, de forma tal que las *DMUs* que determinan la frontera son denominadas eficientes y aquellas que no permanecen sobre la misma son consideradas ineficientes. Una *DMU* será eficiente si, y solo si, no es posible incrementar las cantidades de producto manteniendo fijas las cantidades de insumos utilizadas, ni es posible disminuir las cantidades de insumos empleadas sin alterar las cantidades de producto obtenidas (Cooper, Seiford y Zhu, 2004, 3).

Adicionalmente, *DEA* permite comparar cada *DMU* ineficiente con aquellas que son eficientes, con el fin de establecer la cuantía, en términos absolutos o relativos, de la reducción de entradas y/o incremento de las salidas, que la unidad ineficiente debería tratar de promover para convertirse en eficiente.

Algunas de las principales ventajas de *DEA* son las siguientes:

---

<sup>3</sup> Las unidades deben ser comparables, en el sentido de que todas ellas consumen los mismos insumos, en diferentes cantidades, para producir el mismo conjunto de producto, en distintas cantidades.

<sup>4</sup> Una *DMU* es cualquier unidad que puede evaluarse en términos de sus habilidades para convertirse en insumo o producto (Cooper, Seiford y Zhu, 2004; 3).

- No requiere establecer a priori una forma funcional entre las entradas y salidas para hallar la función de frontera, ni requiere una distribución de la ineficiencia.
- Permite considerar modelos con múltiples entradas (insumos) y salidas (productos), expresadas en distintas unidades de medida.
- La información con la que se construye la frontera eficiente resulta de optimizaciones individuales de cada *DMU*, lo que permite aceptar comportamientos de selección de tecnologías distintas para cada *DMU* evaluada.
- No requiere información referente a las ponderaciones de entradas y salidas para generar el índice de eficiencia. Sin embargo, se considera que esta flexibilidad en la elección de los pesos, puede ser tanto una fortaleza como una debilidad de la metodología<sup>5</sup>.

Los modelos *DEA* pueden ser clasificados, básicamente, en función del tipo de medida de eficiencia que proporcionan<sup>6</sup>, la orientación del modelo<sup>7</sup> y la tipología de los rendimientos a escala que caracteriza la tecnología de producción<sup>8</sup>.

---

<sup>5</sup> La fortaleza se justifica en que si una unidad resulta ser ineficiente incluso cuando se han incorporado los pesos más favorables en su medida de eficiencia, entonces, el argumento de que los pesos no son apropiados no es justificable. Por otra parte, es una debilidad porque una elección no juiciosa de pesos puede permitir calificar como eficiente una unidad, aunque esto tenga más que ver con la elección de pesos que con cualquier eficiencia inherente (Coll y Blasco, 2006; 24).

<sup>6</sup> Eficiencia radial y no radial. Los modelos que se presentan a continuación proporcionan medidas de eficiencia radial.

<sup>7</sup> Siguiendo a Beltrán (2004, 15), la eficiencia se puede caracterizar con relación a dos orientaciones básicas: orientadas a entradas y orientadas a salidas. La orientación a la entrada busca, dado un nivel de producto, la máxima reducción proporcional en los insumos mientras permanece en la frontera eficiente, y la orientación a salidas busca, dado el nivel de insumos, el máximo incremento proporcional del producto mientras permanece en la frontera eficiente.

<sup>8</sup> Los rendimientos a escala, que indican los incrementos de la producción que son resultado del incremento de todos los factores de producción en el mismo porcentaje, pueden ser constantes, crecientes o decrecientes.

## Modelo DEA-CCR

Este modelo fue desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes (1978) con base en los conceptos de eficiencia inicialmente planteados por Farrell (1957). El modelo CCR proporciona medidas de eficiencia tipo radial, orientadas a salidas y/o entradas y rendimientos constantes a escala, supone convexidad y libre disposición de entradas.

Siguiendo a Cooper, Seiford y Zhu (2004), las consideraciones básicas del modelo son:

1. Existen  $n$  *DMUs* para ser evaluadas, cada una de las cuales utiliza los mismos insumos (en  $m$  cantidades diferentes), para obtener los mismos productos (en  $s$  cantidades diferentes).
2.  $x_{ij}$  ( $x_{ij} \geq 0$ ) es la cantidad de insumos  $i$  consumidas por la  $j$ -ésima *DMU*.
3.  $x_{i0}$  es la cantidad de insumo  $i$  consumida por la *DMU* que es evaluada,  $DMU_0$ .
4.  $y_{rj}$  ( $y_{rj} \geq 0$ ) es la cantidad de producto  $r$  producida por la  $j$ -ésima *DMU*.
5.  $y_{r0}$  es la cantidad de producto  $r$  obtenida por la *DMU* que es evaluada  $DMU_0$ .
6.  $\mu_r$  ( $r = 1, 2, \dots, s$ ) y  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) son los pesos (o multiplicadores) de los productos e insumos respectivamente.
7.  $\lambda_j$  es la participación de cada una de las *DMU* que pertenecen al conjunto de las *DMUs* a evaluar.
8.  $\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}$ : es la suma ponderada de los insumos y se conoce como insumo virtual.
9.  $\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$ : es la suma ponderada de los productos y se conoce como producto virtual.

La presentación del modelo CCR, como un problema de optimización lineal en su forma primal<sup>9</sup>, orientado a entradas, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max_{u_r, v_i} z &= \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \\ \text{s.a} \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0 \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} &= 1 \\ \mu_r, v_i &\geq \varepsilon > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde

- $z = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$  significa que el producto virtual es igual a la puntuación de eficiencia. Para la unidad evaluada, “los valores de los insumos y productos virtuales expresan información sobre la importancia que una unidad atribuye a determinados insumos y productos con el fin de obtener su máxima puntuación de eficiencia” (Boussofiane, Dysson y Thanassoulis, 1991,6).
- $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$  significa que el conjunto de productos (deseables) es menor o igual al conjunto de recursos necesarios para obtener estos productos.
- $\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$  se conoce como la restricción de normalidad dado que el insumo virtual se encuentra normalizado a la unidad.

<sup>9</sup> Este modelo puede escribirse en términos generales, de tres formas distintas: fraccional (cociente), multiplicativo y envolvente. Para ver el desarrollo formal de estos modelos se pueden remitir a los trabajos de Bowlin (1998), Cooper, Seiford y Tone (2000), y Cooper, Seiford y Zhu (2004).

- $\mu_r, v_i > 0$  es una condición de positividad estricta, la cual permite evitar que una unidad sea incorrectamente caracterizada como eficiente al obtener en la solución óptima un valor igual a cero<sup>10</sup>.
- $\varepsilon > 0$  es un elemento infinitésimo no-arquimediano<sup>11</sup>.

En consecuencia, es posible determinar la importancia (contribución) de cada insumo ( $v_i^* x_{i0} = 1$ ) respecto al total  $\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$ , así como la contribución de cada producto ( $u_r^* y_{r0}$ ) a la puntuación de eficiencia ( $z^* = \sum_{r=1}^s u_r^* y_{r0}$ ). Estos resultados proporcionan la medida en que las variables insumo y producto han sido usadas en la determinación de la eficiencia, “jugando un papel como medida de la sensibilidad de las puntuaciones de eficiencia” (Cooper, Seiford y Tone, 2000, 28).

Teniendo en cuenta que cada problema primal tiene una presentación dual, en la tabla 1 se presenta la correspondencia entre el modelo primal y el modelo dual.

**Tabla 1**  
Problema primal vs. dual

Restricción primal Modelo (1)	Variable dual Modelo (2)	Restricción dual Modelo (2)	Variable primal Modelo (1)
$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$	$\theta$	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta x_{i0}$	$v_i > 0$
$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$	$\lambda_j \geq 0$	$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{r0}$	$\mu_r > 0$

Fuente: Cooper, Seiford y Tone (2000)

<sup>10</sup> En el problema dual esta restricción equivaldría a las holguras de insumo o producto positivas.

<sup>11</sup> Un infinitésimo no arquimediano es un valor positivo menor que cualquier número real positivo.

Así, para el problema dual asociado, el cual puede definirse en dos etapas, la primera etapa es la siguiente:

$$\begin{aligned} \theta^* &= \min_{\theta, \lambda_j} \theta \\ \text{s.a} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j &\leq \theta x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j &\geq y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

Este modelo orientado a entradas busca contraer uniformemente con  $\theta(10,11)$ , por ejemplo, los insumos de la DMU evaluada ( $DMU_0$ ), construyendo una DMU virtual (con las variables  $\lambda_j$ ) que utiliza la menor cantidad de insumos que la  $DMU_0(11)$  para producir (al menos) los productos de la  $DMU_0(12)$ .

Por otra parte, si la solución óptima dada por el modelo (2) resulta ser  $\theta^* = 1$ , entonces la DMU que está siendo evaluada es eficiente de acuerdo con la definición de Farell. En caso contrario, si  $\theta^* < 1$  la DMU es ineficiente, es decir, es posible obtener a partir de los valores  $\lambda_j$  una combinación de DMUs que “funcione mejor” que la DMU que ha sido evaluada. En esta primera etapa, la solución óptima  $(\theta^*, \lambda)$  del problema dual, puede generar eficiencia débil en el caso que las variables de holgura de las entradas ( $s_i^-$ ) y las variables de holgura de las salidas ( $s_i^+$ ) sean diferentes de cero.

**Definición DEA débilmente eficiente:** El desempeño de la  $DMU_0$  es débilmente eficiente si y solo si se cumple (1)  $\theta^* = 1$  y (2)  $s_i^- \neq 0$  y/o  $s_i^+ \neq 0$  para alguna  $i$  y  $r$  en alguna solución óptima alterna.

Para evitar la existencia de eficiencia débil, se plantea una segunda etapa para la evaluación de la eficiencia, la cual consiste en encontrar una solución que maximice la suma de excesos en las entradas y faltantes en las salidas, mientras  $\theta = \theta^*$  se mantiene fijo. El programa lineal que se plantea es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \max_{\theta, \lambda, s_i^-, s_r^+} \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \\
 & s.a \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = \theta^* x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \quad \forall i, j, r
 \end{aligned} \tag{3}$$

En esta segunda fase, una *DMU* es llamada CCR eficiente (eficiencia técnica y eficiencia de mezcla), si una solución óptima  $(\theta^*, \lambda^*, s_i^-, s_r^+)$  de las dos fases anteriores satisface que  $\theta^* = 1$  y todas las holguras son cero ( $s_i^- = s_r^+ = 0$ ), de lo contrario la *DMU* es ineficiente. Bajo estas condiciones, la solución óptima presenta eficiencia en el sentido de Pareto-Koopmans, la cual establece que una *DMU* es eficiente si y solo si no es posible desmejorar ninguna de sus entradas y salidas sin desmejorar otra(s) entrada(s) o salida(s).

**Definición DEA eficiente:** El desempeño de la *DMU*<sub>0</sub> es totalmente eficiente (100%) si y solo si se cumple (1)  $\theta = 1$  y (2) todas las holguras  $s_i^- = s_r^+ = 0$ .

El problema dual, al que se refiere como forma envolvente, expresado como un modelo único a resolver en un modelo de dos etapas es:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\theta, \lambda, s_i^-, s_r^+} \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\
 & s.a \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = \theta^* x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \quad \forall i, j, r
 \end{aligned} \tag{4}$$

## Modelo DEA-BCC

Este modelo fue desarrollado por Banker, Charnes y Cooper (1984). El BCC relaja el supuesto de retornos constantes a escala considerado en el modelo CCR y permite, por tanto, la posibilidad de que las *DMU* presenten retornos variables a escala.

La formulación dual del modelo BCC orientado a entradas es similar al modelo CCR, pero incluye la restricción adicional  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ , la cual junto con la restricción  $\lambda_j \geq 0$  para todo  $j$ , impone una condición de convexidad al conjunto de producción posible. Por tanto, el modelo dual expresado como un modelo único a resolver en un proceso de dos etapas, puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\theta, \lambda, s_i^-, s_r^+} \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = \theta^* x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \quad \forall i, j, r
 \end{aligned} \tag{5}$$

Esta restricción adicional, además, permite descomponer la eficiencia en dos. Primero, la eficiencia técnica pura para cada *DMU* calculada bajo el modelo BCC y segundo, la eficiencia de escala, que es el resultado del cociente de los coeficientes de eficiencia calculados con el modelo CCR y el modelo BCC. Si existen diferencias entre las dos mediciones de eficiencia para cada *DMU*, significa que dicha *DMU* posee ineficiencia de escala. Esta descomposición es única y describe las fuentes de ineficiencias, es decir, si ésta es causada por una operación ineficiente (BCC) o por condiciones desventajosas mostradas por la eficiencia de escala o por ambas.

En conclusión, una *DMU* se considera como CCR eficiente si tiene eficiencia de escala y eficiencia técnica, y una *DMU* se considera BCC eficiente si tiene eficiencia técnica.

### **Aplicación de DEA al sector de telecomunicaciones en países de medianos ingresos**

Para llevar a cabo el estudio de la eficiencia relativa en el uso de los recursos del sector de las telecomunicaciones<sup>12</sup>, se consideran los países de medianos ingresos, y de éstos se toman 50 economías (*DMU*) de las 90 clasificadas por la ITU en el *World Telecommunication Indicators Database* (novena edición de 2005), ya que son economías que no presentan vacíos de información para el año 2003. Adicionalmente, se utilizará el complemento de Excel *DEA solver*<sup>13</sup> para el análisis de los datos.

La evaluación de eficiencia de los países de la muestra, estará sujeta a la restricción regulatoria que limita su poder de mercado, es decir, los ingresos anuales por línea no pueden superar el tope autorizado por el regulador. Este nivel de precios fijado por el regulador debe permitir funcionar a las empresas y simultáneamente, evitar que éstas tengan beneficios extraordinarios que disminuyan el excedente de los consumidores (Lasheras, 1999; 44).

La eficiencia así calculada, mide la eficiencia en el uso de capital, la capacidad instalada y la fuerza laboral en la industria, para generar un nivel de ingresos óptimos regulados en el sector de las telecomunicaciones.

Antes de implementar *DEA*, se llevó a cabo la identificación de los datos outlier utilizando la metodología propuesta por Banker y Gifford (1988)<sup>14</sup>. Luego, para la evaluación de la eficiencia relativa

---

<sup>12</sup> El análisis se realiza de manera agregada para el sector, dado que no se cuenta con información completa por servicios de telefonía básica conmutada, servicios de valor agregado y servicios de interconexión, para la muestra de países seleccionados. (CRT, 2004;17).

<sup>13</sup> Ver (Cooper, Seiford y Tone, 2001).

<sup>14</sup> Ver Banker y Chang (2005).

de los países seleccionados para el 2003, se corrieron los modelos orientados a entradas CCR-I y BCC-I, y se determinó la eficiencia de escala de cada uno de los países.

### **Variables consideradas para el modelo**

Las variables seleccionadas para el presente estudio, son las siguientes:

**Variable de entrada o de control** ( $y_{rj}$  donde  $r$  = ingresos y  $j=1,2,\dots,43$  que es la muestra de países de medianos ingresos).

- **Ingresos totales de todos los servicios de telecomunicaciones (\$US):** Son los ingresos totales recibidos por el servicio de telefonía móvil, líneas arrendadas, servicio de datos, tasas de conexión, tasas de abono al servicio, servicio de telefonía fija por llamadas locales y de larga distancia (nacionales e internacionales).

**Variables de salida** ( $x_{ij}$  donde  $i$  = líneas telefónicas, personal, inversión y  $j=1,2,\dots,43$  que es la muestra de países de medianos ingresos).

- **Líneas telefónicas principales en funcionamiento:** Una línea principal es una línea telefónica que enlaza el equipo terminal del abonado con la red pública conmutada, con un acceso individualizado a los equipos de la central telefónica. Estas líneas, pueden no ser lo mismo que línea de acceso o abonado.
- **Personal total a tiempo completo en servicios de telecomunicaciones:** Es el personal a tiempo completo empleado por operadores de redes de telecomunicaciones para el país, para la prestación de servicios públicos en telecomunicaciones.
- **Inversión anual total en telecomunicaciones (\$US):** Es la inversión anual para adquirir bienes y equipos. Incluye terrenos y edificios.

Se realizó un análisis de correlación a las variables, observándose una correlación positiva entre la variable de entrada y las variables de salida (Véase tabla 2), lo que indica que un aumento en los insumos de entrada se reflejaría en un aumento en los productos de salida. Además, se observa que existe una alta correlación de la variable de entrada con el nivel de número de líneas, el personal y en menor medida con la variable inversión.

**Tabla 2**  
Correlación entre las variables

	Ingresos	Inversión	Líneas	Personal
Ingresos	1	0,80004799	0,88721482	0,90602058
Inversión	0,800047992	1	0,66647761	0,72180414
Líneas	0,887214825	0,66647761	1	0,90349947
Personal	0,906020582	0,72180414	0,90349947	1

### Identificación de los outliers

Una de las metodologías propuestas en DEA para identificar *outliers* fue desarrollada por Banker y Gifford en 1988, quienes sugieren eliminar un cierto porcentaje del conjunto de observaciones eficientes de la muestra y reestimar la frontera de producción con las observaciones restantes. Para identificar aquellas observaciones que están probablemente más contaminadas con un ruido se basan en los puntajes de supereficiencia<sup>15</sup>.

Si una observación eficiente es un *outlier* que ha sido contaminado con ruido, entonces, es mas probable que tenga un nivel de producto (insumo) mucho mas grande (pequeño) que el de las otras observaciones con niveles de insumo (producto) similar. Por lo tanto, los *outliers* tienen puntajes de supereficiencia mucho más grandes que uno.

<sup>15</sup> Andesen y Petersen (1993, 1264), introducen el concepto de supereficiencia para establecer una clasificación entre las unidades eficientes. El indicador de Supereficiencia es el resultado de evaluar la  $DMU_0$  utilizando el modelo dual sin la restricción de que los puntajes de eficiencia sean menores o iguales a uno para la  $DMU_0$ , esto permite valores de eficiencia superiores a uno.

En este estudio se consideran observaciones *outlier* aquellas que presentan un puntaje de supereficiencia mayor a dos. Para la identificación, se estimó inicialmente un modelo<sup>16</sup> BCC-I con la muestra completa, y se encontró que el conjunto de países con puntajes de supereficiencias mayores a dos fueron: Sri Lanka (8.8) y Siria (8.3). Luego se reestimó la frontera de producción con las observaciones restantes y se encontró que aparecen como nuevos *outliers*, Brasil (tiende a infinito), Ucrania (tiende a infinito), Bielorrusia (2.05) e Irán (2.79). Finalmente, se vuelve a reestimar el modelo, y no se identifican más observaciones con puntajes de supereficiencia mayores a dos. Adicionalmente, se elimina de la muestra a Maldivas por presentar un nivel de ineficiencia igual a cero.

Dado lo anterior, el análisis de eficiencia relativa para el sector de telecomunicaciones se realizó finalmente con una muestra de 43 países.

### Resultados Generales

La tabla 3 muestra los índices de eficiencia obtenidos en los dos modelos considerados. Una DMU será eficiente si su índice de eficiencia es igual a 1, en caso contrario la DMU será ineficiente.

Bajo un modelo CCR-I los países con mejor desempeño son Swazilandia, Armenia y Turkmenistán, y los países más ineficientes son Hungría, Venezuela, Namibia, Sur África y Botswana, con una eficiencia promedio de 0.1686. Por su parte, Colombia presenta un buen desempeño, con un índice de eficiencia de 0.6876, el cual está por encima del promedio (0.4442).

Cuando se permite que la frontera eficiente se construya bajo el supuesto de rendimientos variables de escala, BCC-I, como era de esperarse, se encuentra que la mayoría de los países mejoran sus niveles de eficiencia y que nuevos países pasan a ser eficientes, mostrando en ambos casos que un porcentaje de sus ineficiencias se debían a la

<sup>16</sup> Para la estimación del modelo se utilizó el software *Efficiency Measurement System -EMS-*. La versión 1.3 se encuentra disponible en: <http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/ems/#down>

escala de producción. Los nuevos países eficientes son Argelia, Costa Rica, Colombia, Kazajstán, Rumania, Turquía, Argentina y México. Entre los países con más bajo desempeño se encuentran Estonia y Botswana, con una eficiencia promedio de 0.1967.

**Tabla 3**  
Índices de eficiencia

<b>DMU</b>	<b>Índice de eficiencia CCR I</b>	<b>Índice de eficiencia BCC I</b>	<b>Eficiencia de escala</b>	<b>Retornos de escala</b>
Swazilandia	1,0000	1,0000	1,0000	Constante
Armenia	1,0000	1,0000	1,0000	Constante
Turkmenistán	1,0000	1,0000	1,0000	Constante
Argelia	0,8647	1,0000	0,8647	Decreciente
Costa Rica	0,8545	1,0000	0,8545	Decreciente
Colombia	0,6876	1,0000	0,6876	Decreciente
Kazajstán	0,5508	1,0000	0,5508	Decreciente
Rumania	0,3219	1,0000	0,3219	Decreciente
Turquía	0,2694	1,0000	0,2694	Decreciente
Argentina	0,4656	1,0000	0,4656	Decreciente
México	0,2587	1,0000	0,2587	Decreciente
Túnez	0,7797	0,9979	0,7813	Decreciente
Fiji	0,8845	0,9185	0,9629	Constante
República Checa	0,5562	0,9061	0,6138	Decreciente
Bosnia y Herzegovina	0,7281	0,7966	0,9141	Decreciente
Paraguay	0,5851	0,7758	0,7542	Decreciente
Cape Verde	0,2582	0,6862	0,3763	Constante
Tailandia	0,2437	0,6559	0,3715	Decreciente
Belice	0,3047	0,6383	0,4773	Constante
Surinam	0,3278	0,6095	0,5378	Constante
Chile	0,4099	0,5807	0,7057	Decreciente
República Eslovaca	0,4220	0,5624	0,7503	Decreciente

<b>DMU</b>	<b>Índice de eficiencia CCR I</b>	<b>Índice de eficiencia BCC I</b>	<b>Eficiencia de escala</b>	<b>Retornos de escala</b>
Gabón	0,5021	0,5266	0,9535	Constante
Trinidad y Tobago	0,4831	0,5194	0,9300	Constante
Filipinas	0,3369	0,4895	0,6883	Decreciente
Malasia	0,3266	0,4705	0,6942	Decreciente
Jamaica	0,4485	0,4620	0,9706	Constante
Bolivia	0,4190	0,4197	0,9984	Constante
Latvia	0,4039	0,4165	0,9698	Decreciente
Cuba	0,2862	0,4164	0,6873	Decreciente
Mauricios	0,4090	0,4116	0,9936	Constante
Albania	0,3143	0,3336	0,9421	Constante
Sur África	0,1661	0,3327	0,4991	Decreciente
Marruecos	0,2317	0,3096	0,7486	Decreciente
Jordán	0,2884	0,3040	0,9488	Constante
Uruguay	0,2852	0,2981	0,9566	Decreciente
Perú	0,2583	0,2964	0,8715	Decreciente
Lituania	0,2877	0,2937	0,9795	Decreciente
Hungría	0,1906	0,2658	0,7172	Decreciente
Venezuela	0,1730	0,2604	0,6644	Decreciente
Namibia	0,1683	0,2223	0,7572	Constante
Estonia	0,2062	0,2067	0,9973	Constante
Botswana	0,1453	0,1867	0,7782	Constante
<b>Promedio</b>	<b>0,4442</b>	<b>0,6179</b>		

De lo anterior, se puede concluir que el modelo BCC-I es el más adecuado para calcular la eficiencia relativa del agregado del sector de telecomunicaciones, pues el 41.3% de los países tienen puntajes de eficiencia BCC-I por encima del promedio (0.6179), es decir, 19 países. De éstos 11 son BCC-I eficientes (57,89%), por lo que el 23.91% del total de los países considerados presentan un buen desempeño. Por

el contrario, bajo el modelo CCR-I, el 34,78% de los países tienen un índice de eficiencia superior al promedio, pero solo el 6.52% del total de países considerados son eficientes CCR-I, es decir, 3 países presentan un buen desempeño.

Con respecto a la eficiencia de escala, en la tabla 3 se observa que entre los países clasificados como ineficientes el que sufre un mayor impacto en su escala de operación es México, que presenta el menor índice de escala, 0.2586. Mientras que, Bolivia seguido por Estonia son los países que menos sufren el impacto adverso de la escala de operación sobre su productividad, con índices de escala de 0,9984 y 0.9973, respectivamente.

Por su parte, los países que son ineficientes CCR-I y eficientes BCC-I, muestran que están bien regulados pero que tienen problemas de escala, mientras que los países eficientes CCR-I son eficientes a escala (igual a 1), esto es, el impacto de su escala de operación sobre la productividad es nulo.

En la tabla 3, también se muestra el tipo de retornos a escala que caracteriza a cada uno de los países de la muestra. Como era de esperarse, los países CCR-I eficientes presentan retornos constantes a escala, lo que indica que si se realiza o no un cambio en la escala de sus operaciones la eficiencia técnica no se ve afectada, los países Swazilandia, Armenia y Turkmenistán tienen rendimientos constantes a escala.

En cuanto a los países que se vuelven BCC-I eficientes, exhiben rendimientos decrecientes, lo cual indica que se debe disminuir la magnitud de la variable de entrada para que produzca una disminución menos que proporcional de la magnitud de las variables de salida, y de esta manera, su productividad promedio aumente. Es decir, al disminuir el nivel de tarifas o nivel de ingresos totales, los países se muevan hacia la frontera eficiente.

Para los países que son ineficientes tanto bajo CCR-I como BCC-I, se observa que operan bajo rendimientos constantes y decrecientes de escala. Esto significa, que los países con rendimientos constantes

a escala presentan ineficiencia técnica, mientras que los países con rendimientos decrecientes a escala presentan ineficiencias de tipo técnico y de escala.

Finalmente, en la tabla 4, se puede observar que el país que más veces sirve de *Benchmarking* para los países que resultaron ineficientes es Costa Rica, pues aparece en el conjunto de referencia de 24 de los 40 países ineficientes, es decir, éste país evalúa el 55.81% de los países ineficientes, seguido por Swazilandia y Turkmenistán que aparecen evaluando el 32,55% y 27,90% de los países ineficientes, respectivamente. Por otro lado, Colombia, Argelia y Armenia, también son importantes para la comparación de los países ineficientes. Colombia, por ejemplo, aparece como conjunto de referencia, con un lambda significativo, de República Checa (0.98), Sur África (0.45), Malasia (0.59) y Chile (0.3). Lo anterior, sugiere que se puede realizar un estudio de *Benchmark* con estos países y aplicar los resultados a los países ineficientes y de esta manera mejorar su eficiencia.

**Tabla 4**  
Frecuencia en el conjunto de referencia BCC-O

Conjunto de referencia	Frecuencia a las otras DMUs	
Argelia	10	23,25%
Armenia	7	16,27%
Colombia	11	25,58%
Kazajstán	5	11,62%
Rumania	1	2,32%
Swazilandia	14	32,55%
Turquía	0	0,46%
Turkmenistan	12	27,90%
Argentina	2	4,65%
Costa Rica	24	55,81%
México	1	2,32%

## Bibliografía

ANDERSEN, P. y PETERSEN, N. (1993). A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis. En: *Management Science*, No. 39; p. 1261 – 1264. Citado por: BANKER, Rajiv y CHIANG, Hsihui (2005). The Super – Efficiency Procedure for Outlier Identification, not for Ranking Efficient Units. En: *European Journal of Operational Research* [Revista en línea]. URL: [http://astro.temple.edu/~banker/Operations%20Management/21\\_Super%5B1%5D.Eff.pdf](http://astro.temple.edu/~banker/Operations%20Management/21_Super%5B1%5D.Eff.pdf). Consultado Oct. 2006.

BANKER, Rajiv y CHIANG, Hsihui (2005). The Super – Efficiency Procedure for Outlier Identification, not for Ranking Efficient Units. En: *European Journal of Operational Research* [Revista en línea]. URL: [http://astro.temple.edu/~banker/Operations%20Management/21\\_Super%5B1%5D.Eff.pdf](http://astro.temple.edu/~banker/Operations%20Management/21_Super%5B1%5D.Eff.pdf). Consultado Jun. 2006.

BANKER, Rajiv y GIFFORD, J. (1988). A Relative Efficiency Model for the Evaluation of Public Health Nurse Productivity. Mellon University Mimeo. Carnegie. Citado por: BANKER, Rajiv y CHIANG, Hsihui (2005). The Super – Efficiency Procedure for Outlier Identification, not for Ranking Efficient Units. En: *European Journal of Operational Research* [Revista en línea]. URL: [http://astro.temple.edu/~banker/Operations%20Management/21\\_Super%5B1%5D.Eff.pdf](http://astro.temple.edu/~banker/Operations%20Management/21_Super%5B1%5D.Eff.pdf). Consultado Jun. 2006.

BELTRÁN, Viviana (2004). Conjunto de productividad para problemas de Análisis Envolvente de Datos. 123 p. Tesis (Maestra en Ciencias en Matemática Aplicada) [Tesis en línea]. Universidad de Puerto Rico. Recinto Universitario de Mayagüez. URL: <http://grad.uprm.edu/tesis/beltranballesteros.pdf>. Consultado Sep. 2006.

BOWLIN, William (1998). Measuring Performance: An Introduction to Data Envelopment Analysis (DEA). En: *Journal of Cost Analysis*; p. 3 – 27.

BOUSSOFIANE, A.; DYSON, R.G. y THANASSOULIS, E. (1991). Applied Data Envelopment Analysis. European Journal of Operational Research, 52: 1-15.

COLL, Vicente y BLASCO, Olga (2006). Evaluación de la eficiencia mediante el Análisis Envoltante de Datos. Introducción a los modelos básicos. Edición digital a texto completo accesible en: <http://www.eumed.net/libros/2006c/197/index.htm>. Consultado Dic. 2006.

Comisión de Regulación de Agua Potable y Saneamiento Básico – CRA- (2004). Metodología y fórmula tarifaria para regular los servicios públicos de acueducto y alcantarillado. Documento de Trabajo. Bogotá: CRA; p. 143.

COOPER, William; SEIFORD, Lawrence y TONE, Kaoru (2000). Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. Boston: Kluwer Academic Publishers. 316 p.

COOPER, William; SEIFORD, Lawrence y ZHU, Joe (2004). Handbook on Data Envelopment Analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers. 592 p.

International Telecommunication Union (ITU). Regulatory Information (2005). URL: <http://www.itu.int/ITU-D/ICTEYE/Regulators/Regulators.aspx>.

\_\_\_\_\_ (2005). World Telecommunication Indicators Database [CD-ROM]. Ver. 9. Switzerland. 1CD-ROM.

LASHERAS, Miguel A. (1999). La regulación económica de los servicios públicos. Primera edición. Barcelona: Ariel S.A. 391 p.