

# Coordinación hidrotérmica de corto plazo con restricciones de red usando un método de punto interior

Short run hydrothermal coordination with network constraints  
using an interior point method

Jesús María López Lezama<sup>1</sup>, Luis Alfonso Gallego Pareja<sup>2</sup> y  
Diego Mejía Giraldo<sup>3</sup>

*Recepción: 24-mar-2008/Modificación: 20-jun-2008/Aceptación: 23-jun-2008*  
*Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

---

## Resumen

En este artículo se presenta un modelo de optimización lineal para resolver el problema de la coordinación hidrotérmica. El principal aporte de este trabajo es la inclusión de las restricciones de red al problema de coordinación hidrotérmica y su solución usando un método de punto interior. El modelo propuesto permite manejar un sistema completamente hídrico, completamente térmico o un sistema mixto. Se presentan resultados para el sistema de prueba IEEE de 14 barras.

**Palabras claves:** coordinación hidrotérmica, programación de la generación, programación lineal, métodos de punto interior.

---

<sup>1</sup> Magíster en Ingeniería Eléctrica, [jesusmarialopezl@yahoo.com](mailto:jesusmarialopezl@yahoo.com), profesor del departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Antioquia, Medellín–Colombia.

<sup>2</sup> Magíster en Ingeniería Eléctrica, [gallegopareja@gmail.com](mailto:gallegopareja@gmail.com), estudiante de doctorado, Universidade Estadual Paulista–Ilha Solteira–Brasil.

<sup>3</sup> Magíster en Ingeniería Eléctrica, [diegomej@hotmail.com](mailto:diegomej@hotmail.com), profesor del departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Antioquia, Medellín–Colombia.

### **Abstract**

This paper presents a lineal optimization model to solve the hydrothermal coordination problem. The main contribution of this work is the inclusion of the network constraints to the hydrothermal coordination problem and its solution using an interior point method. The proposed model allows working with a system that can be completely hydraulic, thermal or mixed. Results are presented on the IEEE 14 bus test system.

**Key words:** hydrothermal coordination, generation scheduling, linear programming, interior point methods.

---

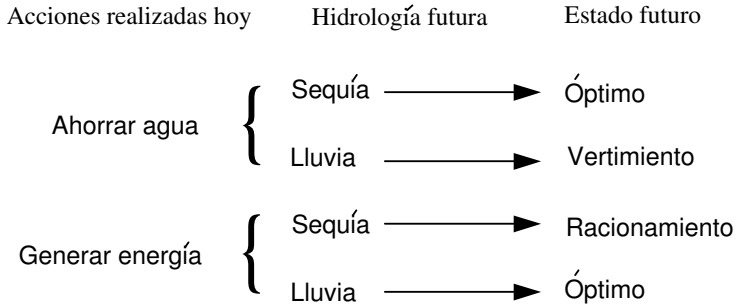
## **1 Introducción**

La coordinación hidrotérmica de un sistema de potencia busca encontrar la estrategia óptima de operación de las diferentes centrales de generación del sistema, proponiendo la cantidad de potencia activa (MW) que debería producir cada central hidráulica y térmica en un momento dado en aras de conseguir abastecer la demanda del sistema. Se puede pensar que una coordinación hidrotérmica es un proceso de despacho económico clásico [1], que adicionalmente involucra el modelo de variables relacionadas con el entorno energético del sistema de potencia.

El problema de la coordinación hidrotérmica difiere del despacho económico clásico en que este último trata sólo con las plantas térmicas de un sistema de potencia y no considera acoples temporales. Sin embargo, en la producción de energía eléctrica, se observa la dependencia en el tiempo para tomar decisiones operativas, más aún cuando se cuenta con embalses capaces de almacenar cantidades importantes de recurso hídrico [2].

Para una central hidráulica es difícil encontrar una política de operación de sus embalses dada la incertidumbre de sus afluencias. Las consecuencias a mediano y largo plazo de las acciones tomadas en el presente (generar energía o ahorrar agua) están fuertemente influenciadas por la hidrológica futura como se ilustra en la figura 1. En últimas, la disponibilidad y el almacenamiento del recurso hídrico son variables que afectan la dinámica y la economía de la producción de electricidad de todo el sistema de potencia [3].

La coordinación hidrotérmica es un problema de optimización matemática donde aparecen variables de tipo económico y técnico que, además de mostrar



**Figura 1:** influencia de la hidrología en el estado futuro del sistema

un acople en dichos aspectos, presenta el acople temporal. Este problema debe plantearse para que, en todas las etapas del horizonte de planeamiento, se satisfagan restricciones operativas (capacidad de almacenamiento, capacidad de generación, capacidad de transporte, modelos de embalses, etcétera) y se minimice el costo de la energía [4]. Debido al acople temporal mencionado, en diferentes trabajos se ha planteado la Programación Dinámica [5] en todas sus versiones (dual, determinística, estocástica) para la solución de dichos modelos de optimización [6]. Algunas versiones presentan mayores beneficios que otras en ciertos casos [7]. Sin embargo, otras estrategias, como la Programación Lineal y No Lineal con puntos interiores, pueden ofrecer soluciones en menor tiempo de ejecución y menos iteraciones como se reporta en [8].

Tradicionalmente, se ha modelado el problema de la coordinación hidrotérmica de manera uninodal (se concentra toda la demanda del sistema en un nodo despreciando el sistema de transmisión y por consiguiente las pérdidas). Sin embargo, en el presente trabajo se introduce el sistema de transmisión con la intención de encontrar políticas y planes de generación en el corto plazo que satisfagan las capacidades de transporte del sistema de potencia.

El propósito de este trabajo es presentar un modelo de corto plazo, por lo tanto, se ha calculado el despacho de potencia activa para un periodo de 24 horas. El modelo presentado es lineal, lo cual simplifica en gran medida el costo computacional y permite encontrar fácilmente un punto de operación óptimo para cada hora. Para resolver el problema de programación lineal se ha implementado un método de punto interior predictor–corrector.

## 2 Modelo propuesto para la coordinación hidrotérmica con restricciones de red

A continuación se presenta el modelo de optimización propuesto para realizar la coordinación hidrotérmica considerando las restricciones de la red de transmisión.

### 2.1 Función objetivo

La función objetivo se muestra en (1) y representa el costo total de la energía generada. Este costo se puede expresar como la suma de las funciones de costo de cada uno de los generadores durante las 24 horas del horizonte de planeamiento. En este caso  $x^T$  es el vector que contiene todas las variables de decisión.

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x) &= \sum_{t=1}^{24} \sum_{i=1}^{ng} f_{(i,t)}(Pg_{(i,t)}) \\ x^T &= [\theta \quad Pg \quad W \quad U \quad V], \end{aligned} \quad (1)$$

donde:

- $\theta$  : vector de ángulos en las barras del sistema
- $Pg$  : vector de potencias generadas
- $W$  : vector de volúmenes en los embalses
- $U$  : vector de caudales de la red hídrica
- $V$  : vector de vertimientos de los embalses
- $ng$  : número de generadores.

### 2.2 Restricciones propias de coordinación de grupos hidrotérmicos

Las restricciones propias de la coordinación hidrotérmica consisten en la ecuación de continuidad que modela la topología de las cuencas hidráulicas, la ecuación de eficiencia de los generadores hidráulicos, y los límites mínimos

y máximos de: caudales, potencias generadas y volúmenes en los embalses. Estas restricciones se describen a continuación:

$$\begin{aligned}
 w_{i,t} &= w_{i,t-1} + \Delta t \left[ y_{i,t} + \sum_{k \in \Omega} u_{k,t} + \sum_{k \in \Omega} v_{k,t} - v_{i,t} - u_{i,t} \right] \\
 P g_{i,t} &= \rho_i u_{i,t} \\
 w_{i,t} \text{ mín} &\leq w_{i,t} \leq w_{i,t} \text{ máx} \\
 P g_{i,t} \text{ mín} &\leq P g_{i,t} \leq P g_{i,t} \text{ máx} \\
 u_{i,t} \text{ mín} &\leq u_{i,t} \leq u_{i,t} \text{ máx} ,
 \end{aligned}$$

donde:

- $\rho_i$  : eficiencia del generador  $i$
- $w_{i,t}$  : volumen del embalse  $i$  a la hora  $t$
- $y_{i,t}$  : caudal que llega al embalse  $i$  a la hora  $t$
- $u_{k,t}$  : caudal que sale del embalse  $k$  a la hora  $t$
- $v_{i,t}$  : vertimiento del embalse  $i$  a la hora  $t$
- $\Omega$  : conjunto de embalses aguas arriba del embalse  $i$ .

### 2.3 Restricciones adicionales impuestas por la red de transmisión

Las restricciones adicionales que se han incluido al modelo para representar la red de transmisión son: las ecuaciones de balance de potencia en los nodos (primera ley de Kirchhoff), los límites de potencia activa en las líneas de transmisión y los límites de velocidad de toma de carga de los generadores (rampas). Estas restricciones se describen a continuación:

$$\begin{aligned}
 F_{km,t} &= \frac{\theta_{k,t} - \theta_{m,t}}{x_{km}} \\
 P g_{k,t} - D_{k,t} &= \sum_{m=1}^L F_{km,t} \\
 F_{km} \text{ mín} &\leq F_{km,t} \leq F_{km} \text{ máx} \\
 P g_{i,t} - P g_{i,t-1} &\leq r_{i,1} \\
 P g_{i,t-1} - P g_{i,t} &\leq r_{i,2} ,
 \end{aligned}$$

donde:

- $F_{km,t}$  : flujo de potencia entre las barras  $km$  en la hora  $t$   
 $x_{km}$  : reactancia de la línea que une las barras  $km$   
 $D_{k,t}$  : demanda en la barra  $k$  en la hora  $t$   
 $Pg_{k,t}$  : potencia generada en la barra  $k$  en la hora  $t$   
 $r_{i,1}$  : rampa de subida del generador  $i$   
 $r_{i,2}$  : rampa de bajada del generador  $i$ .

Finalmente, el modelo matemático propuesto se puede plantear como un problema de programación lineal estándar representado por (2).

$$\begin{aligned} & \text{Mín } c^T x \\ & \text{s.a :} \\ & \quad Aeq * x = beq \\ & \quad A * x \leq b. \end{aligned} \tag{2}$$

Al introducir las restricciones de red, la dimensión del problema equivalente aumenta de manera importante. Para solucionar el problema de programación lineal estándar, propuesto en (2), se pueden emplear varios métodos; en este artículo se utiliza un método de puntos interiores predictor–corrector.

### 3 Método de puntos interiores

Tradicionalmente, el método utilizado para dar solución a problemas de Programación Lineal (PL) ha sido el método Simplex. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, el tiempo computacional del método Simplex crece exponencialmente con el tamaño del problema, lo cual representa un inconveniente para problemas de gran tamaño. En 1984 Karmarkar [9] propuso un algoritmo de puntos interiores con tiempo de cómputo polinomial para resolver problemas de PL. Inicialmente, el método propuesto por Karmarkar fue recibido con escepticismo, sin embargo, se ha demostrado que para problemas de PL de gran porte, el método de puntos interiores resulta ser más rápido que el método Simplex tradicional. Después de 1984 diversas variantes del método de puntos interiores presentado por Karmarkar han sido propuestas e implementadas. En 1989 M. Kojima, S. Mizuno y A. Yoshice [10] desarrollaron la base teórica para el método Primal–Dual. En ese mismo año, N. Meggido [11]

presentó el método Primal–Dual con Barrera Logarítmica (PDBL). Una de las extensiones más notables del método de puntos interiores es el Predictor–Corrector [12], el cual se presenta en este artículo. En los últimos años, los métodos de puntos interiores han sido ampliamente utilizados en la solución de problemas de optimización, y algunos de sus conceptos ya se han aplicado en la programación no lineal y programación entera.

El método de puntos interiores es un proceso iterativo que a partir de un punto inicial  $x_0$  dentro de la región factible sigue una trayectoria que alcanza la solución óptima ( $x^*$ ) después de algunas iteraciones, todos los puntos  $x_i$  de la trayectoria continúan dentro de la región factible (puntos interiores), y se encuentra una buena estimativa de la solución óptima después de las primeras iteraciones.

Para solucionar el problema propuesto en (2), se emplean variables de holgura para convertir las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad. El problema equivalente se muestra en (3).

$$\begin{aligned}
 & \text{Mín} \quad c^T x \\
 & \text{s.a :} \\
 & \quad Aeq * x = beq \\
 & \quad A * x + s = b \\
 & \quad s \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Para eliminar las restricciones de no negatividad, se emplea la función de barrera logarítmica [11]. Esta función es una función de penalización, la cual penaliza las restricciones de desigualdad ( $s \geq 0$ ).

$$\begin{aligned}
 & \text{Mín} \quad c^T x - \mu^k \sum_{i=1}^n 1ns_i \\
 & \text{s.a :} \\
 & \quad Aeq * x = beq \\
 & \quad A * x + s = b,
 \end{aligned} \tag{4}$$

donde  $\mu^k > 0$  es un parámetro de barrera que decrece monótonamente en el proceso iterativo.

La sucesión de parámetros decrecientes  $\mu^k$  genera una secuencia de sub-problemas de programación lineal dado por (2) basado en el teorema de Fiacco y McCormick [9]. A medida que  $\mu^k$  tiende a cero, la secuencia de soluciones tiende hacia  $x^*$ .

Para convertir el problema planteado en (4) en un problema irrestricto, se construye la función lagrangiana como se muestra en (5).

$$l(x, s, y, z, \mu^k) = c^T x - \mu^k \sum_{i=1}^n \ln s_i - y^T (A_{eq} x - b_{eq}) - z^T (Ax + s - b). \quad (5)$$

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) son obtenidas igualando el gradiente de la función lagrangiana a cero ( $\nabla l = 0$ ), el cual requiere que la primera derivada de  $l$  con respecto a todas las variables sea cero.

$$\begin{aligned} \frac{\delta l}{\delta x} = 0 &\rightarrow c - A_{eq}^T y - A^T z = 0 \\ \frac{\delta l}{\delta y} = 0 &\rightarrow A_{eq}^T x - b_{eq} = 0 \\ \frac{\delta l}{\delta z} = 0 &\rightarrow Ax + s - b = 0 \\ \frac{\delta l}{\delta s} = 0 &\rightarrow SZe = \mu^k e, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $S$  y  $Z$  son matrices diagonales formadas por los elementos del vector  $s$ ,  $z$ , respectivamente.

$$S = \text{diag} [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n], Z = \text{diag} [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n], e = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T.$$

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden, representadas por el sistema (6), son no lineales y deben ser solucionadas simultáneamente. Generalmente estas ecuaciones son solucionadas empleando el método de Newton. El método de Newton requiere la linealización de las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden alrededor de un punto, para un parámetro de barrera dado.



Para resolver el sistema (6), mediante el método de Newton,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $s$  son sustituidos respectivamente por  $x + \Delta x$ ,  $y + \Delta y$ ,  $z + \Delta z$  y  $s + \Delta s$ , obteniéndose el sistema

$$\begin{bmatrix} A_{eq} & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & I \\ 0 & A_{eq}^T & A^T & 0 \\ 0 & 0 & S & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{eq} \\ b - Ax \\ c - A_{eq}^T y - A^T z \\ \mu e - SZe - \Delta S \Delta Z e \end{bmatrix}. \quad (7)$$

El problema presentado en el sistema (7) es de programación no lineal y puede ser solucionado en dos pasos. En el primer paso se resuelven los términos lineales de las ecuaciones, este paso es denominado comúnmente paso predictor. En el segundo paso, para un parámetro de barrera  $\mu$  especificado, se resuelve el conjunto de ecuaciones completo, este paso es denominado *Paso corrector*.

### 3.1 Paso predictor

El paso predictor también es denominado dirección affine-scaling [10] y puede ser calculado solucionando el sistema planteado en (8)

$$\begin{bmatrix} A_{eq} & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & I \\ 0 & A_{eq}^T & A^T & 0 \\ 0 & 0 & S & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{eq} \\ b - Ax \\ c - A_{eq}^T y - A^T z \\ -SZe \end{bmatrix}. \quad (8)$$

La dirección affine-scaling es usada para aproximar los términos no-lineales de la parte derecha de (7) y para estimar un valor del parámetro de barrera  $\mu^k$ , que será usado en el paso corrector.

El tamaño del paso primal en la dirección affine-scaling,  $\alpha_p^{af}$  es el tamaño máximo de los pasos permitidos para las variables del problema primal, en la iteración  $k$ .

Los tamaños de los pasos primal y dual se pueden calcular como

$$\alpha_p^{af} = \min_i \left\{ 1, \min_{\Delta s_i^{af}} \left\{ \frac{-s_i^k}{\Delta s_i^{af}} : \Delta s_i^{af} < 0, i = 1, \dots, n \right\} \right\}.$$

Una estimación del gap de complementaridad del paso predictor ( $\hat{\rho}^{af}$ ) es

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{af} &= (s^{af})^T z^{af} \\ &= (z^k + \gamma\alpha_p^{af} \Delta z_{af}^k)^T (z^k + \gamma\alpha_d^{af} \Delta z_{af}^k).\end{aligned}$$

Una estimación del parámetro de barrera  $\mu^{af}$  es

$$\mu^{af} = \min \left\{ \left( \frac{\hat{\rho}^{af}}{\hat{\rho}^k} \right)^2, 0,2 \right\} \frac{\hat{\rho}^{af}}{n},$$

donde  $n$  es el número de variables del problema de programación lineal.

### 3.2 Paso corrector

Con los resultados del paso predictor se puede solucionar el conjunto (7) empleando la expresión

$$\begin{bmatrix} A_{eq} & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & I \\ 0 & A_{eq}^T & A^T & 0 \\ 0 & 0 & S & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \\ \Delta z^k \\ \Delta s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{eq} \\ b - Ax^k \\ c - A_{eq}^T y^k - A^T z^k \\ \mu^k e - S^k Z^k e - \Delta S^{af} \Delta Z^{af} e \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Punto inicial

El vector primal inicial ( $x^0$ ) se puede calcular de la siguiente forma:

- Se calcula el vector auxiliar  $\hat{x}$   $\hat{x}_j = \frac{1}{\|A_j\|_2 + 1}$   
donde  $A_j$  es la columna  $j$  de la matriz  $A$ .
- Se calcula el escalar  $\eta$   $\eta = \frac{\|b\|_2 + 1}{\|A\hat{x}\|_2 + 1}$
- El vector primal es iniciado en  $x^0 = \eta\hat{x}$

- El vector de variables de holgura ( $s^0$ ) está dado por

$$s^0 = \begin{cases} s_j^0 = 1, & \text{si } c_j < 1 \\ s_j^0 = c_j, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Los multiplicadores de Lagrange,  $y$  y  $z$ , normalmente son inicializados en cero.

### 3.4 Criterios de convergencia

El método de puntos interiores termina cuando las condiciones KKT son satisfechas, es decir, cuando se cumplen las cuatro condiciones planteadas en el sistema (6):

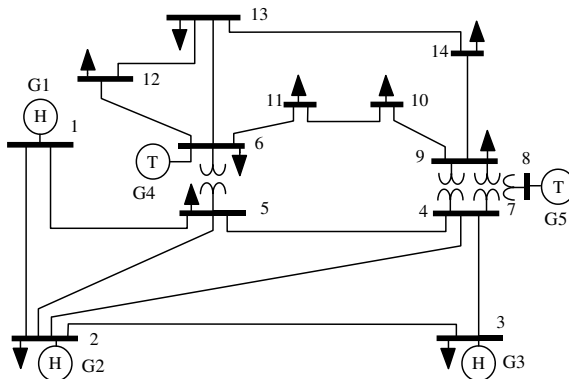
- Primera condición KKT:  $\frac{\|A_{eq}^T y + A^T z - c\|}{1 + \|y\| + \|z\|} \leq \varepsilon$
- Segunda condición KKT:  $\frac{\|A_{eq} x - b_{eq}\|}{1 + \|x\|} \leq \varepsilon$
- Tercera condición KKT:  $\frac{\|c^T x - b^T y\|}{1 + \|b^T y\|} \leq \varepsilon$
- Cuarta condición KKT:  $SZe - \mu^k e \leq \varepsilon,$

donde  $\varepsilon$  es una tolerancia predefinida.

## 4 Pruebas y resultados

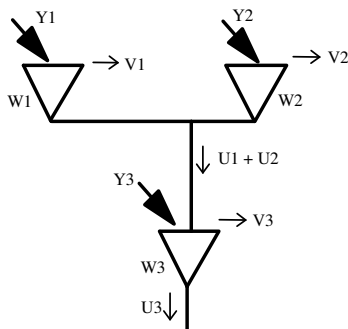
Para validar el modelo propuesto se utilizó el sistema de prueba IEEE de 14 barras modificado, el cual se muestra en la figura 2.

En este caso los generadores de las barras 1, 2 y 3 son hidráulicos, y los restantes se han supuesto como generadores térmicos (barras 6 y 8). Los datos del sistema y embalses se presentan en las tablas 1 y 2 del anexo, respectivamente. Adicionalmente, se han modificado los límites en las líneas,



**Figura 2:** sistema de prueba IEEE de 14 barras

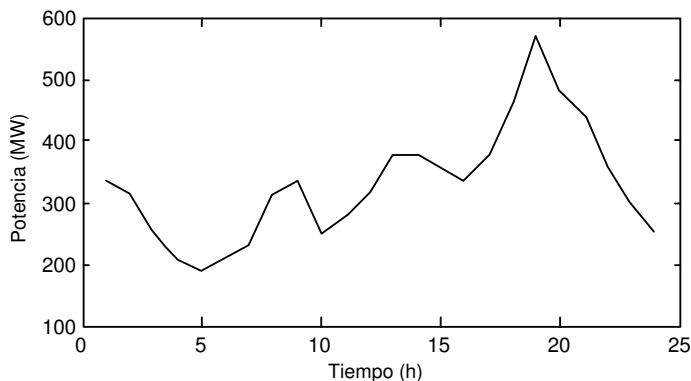
los cuales se muestran en la tabla 3 del anexo. Para los generadores hidráulicos se ha supuesto una red hídrica como se ilustra en la figura 3.



**Figura 3:** red hídrica para los generadores de las barras 1,2 y 3

La demanda agregada de todo el sistema se muestra en la curva de carga de la figura 4, la cual presenta demandas mínima y máxima de 190 MW y 570 MW respectivamente.

Para representar el hecho de que en los sistemas reales la mayor parte de la demanda se encuentra lejos de los centros de consumo, el 20% de la demanda fue asignada en partes iguales a las barras 2, 3, 5, 6 y 9, mientras que

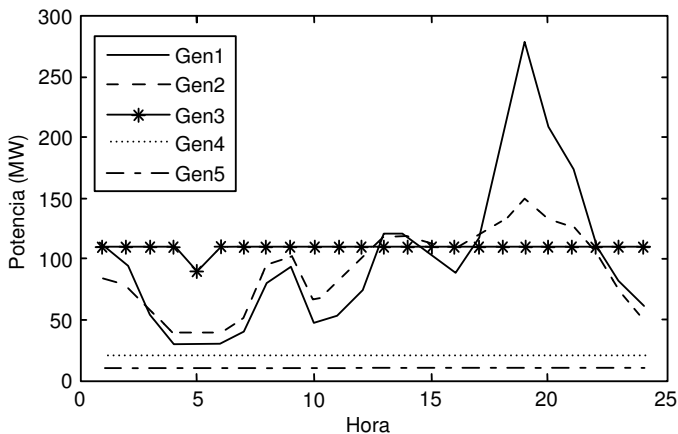


**Figura 4:** curva de carga del sistema

el 80 % restante fue asignada en partes iguales a las barras 10, 11, 12, 13 y 14. Para asegurar la factibilidad del problema se utilizaron generadores ficticios de racionamiento en cada una de las barras de carga con un costo de racionamiento de 100 \$/MWh. Con el fin de mostrar el efecto de las restricciones de red se analizaron cuatro casos descritos a continuación.

**Caso 1** (Despacho sin restricciones). Inicialmente se realiza la coordinación hidrotérmica ignorando las restricciones de la red de transmisión y la velocidad de toma de carga de los generadores. El despacho obtenido se ilustra en la figura 5. Se puede observar que en la hora 19 los tres generadores hidráulicos se encuentran entregando su potencia máxima de 280, 150 y 110 MW respectivamente, en contraste, los generadores térmicos se encuentran todo el tiempo en sus mínimos técnicos de 10 y 20 MW respectivamente. El costo total de la generación es de US \$110.525.

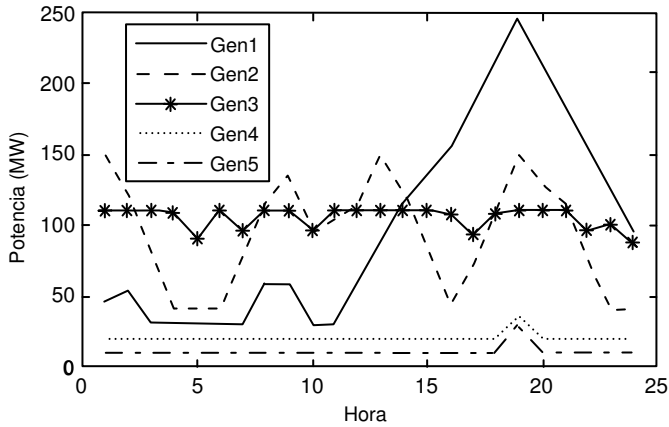
**Caso 2** (Despacho considerando restricciones de velocidad de toma de carga). La velocidad de toma de carga de un generador indica cuanto puede aumentar/disminuir su generación en un período de una hora. Este tipo de restricción también es conocida como rampa. En la columna 8 de la tabla 1 se muestran los valores de las rampas para los generadores del sistema de prueba. En este caso se supone que la rampa de subida es igual a la rampa de bajada. Por ejemplo, la rampa del generador 1 es de 30 MW/h, es decir, entre una hora dada y la siguiente, este generador no puede aumentar ni dis-



**Figura 5:** esquema de despacho sin restricciones

minuir su salida en más de 30 MW. En el despacho anterior (representado en la figura 5) el generador 1 fue despachado en su potencia máxima de 280 MW para la hora 19, sin embargo, en la hora 18 estaba generando apenas 180 MW. Al considerar las restricciones de velocidad de toma de carga, el generador 1 no puede ser despachado en su máximo para la hora pico. Este déficit debe ser compensado por los generadores térmicos, ya que los otros generadores hidráulicos están entregando su potencia máxima (ver figura 6, hora 19). Los generadores térmicos (generadores 4 y 5) presentan ofertas de US \$30 y US \$35 respectivamente. Idealmente el generador 4 con oferta de US \$30 podría suplir la demanda que no pudo ser entregada por el generador 1. Sin embargo, su restricción de velocidad de toma de carga no le permite asumir todo el déficit y por lo tanto, el generador 5 también debe aumentar su generación.

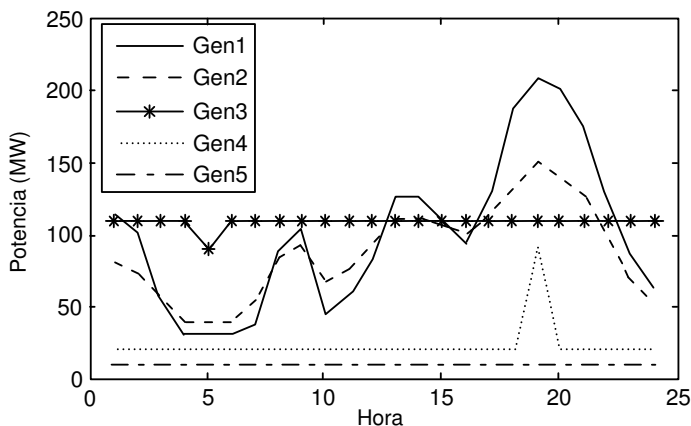
El efecto neto de considerar las restricciones de velocidad de toma de carga se refleja en la necesidad de usar recursos más costosos cuando se presentan cambios rápidos en la demanda. En este caso la demanda pasó de 462 MW en la hora 18 a 570 MW en la hora 19. Este rápido incremento en la demanda no pudo ser acompañado por incrementos en la generación de los recursos más económicos (generadores hidráulicos), y por lo tanto, fue necesario utilizar generación más costosa (generadores térmicos). El costo total de la generación



**Figura 6:** esquema de despacho con restricciones de velocidad de toma de carga

en este caso es de US \$111.640. Si se compara con el costo del despacho irrestricto, se encuentra que el costo de las restricciones de velocidad de toma de carga es de US \$1.115.

**Caso 3** (Despacho considerando límites en las líneas de transmisión). En este caso se ignoran las restricciones de velocidad de toma de carga y se consideran los límites en la red de transmisión especificados en la tabla 3 del anexo. El resultado del despacho se ilustra en la figura 7. Para la hora pico se puede observar que los generadores 2 y 3 están en sus máximos (al igual que en los dos casos anteriores), sin embargo, el generador 1 está entregando solamente 209 MW, una potencia muy inferior a su potencia máxima. Esto se debe a que para la hora pico, la línea 1-5 alcanza su límite de transmisión (110 MW), limitando la potencia entregada por el generador 1. En consecuencia, el generador 4 debe generar 91 MW para suplir la demanda restante. Se puede observar que el generador 5 se mantuvo todo el tiempo en su mínimo técnico, y dado que no se consideraron las restricciones de velocidad de toma de carga, el generador 4 incrementó su potencia en 71 MW en la hora pico. El costo total de la generación es de US \$111.580, si se compara con el despacho del caso 1, se encuentra que el sobre costo introducido por la congestión de la red es de US \$1.055.



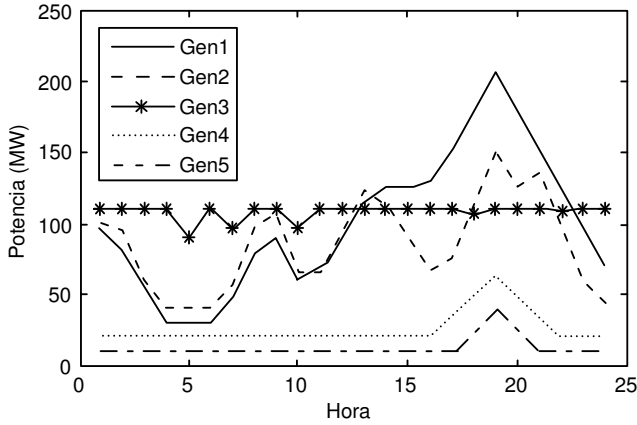
**Figura 7:** esquema de despacho considerando límites en las líneas de transmisión

**Caso 4** (Despacho considerando restricciones de red y velocidad de toma de carga). Al considerar los límites en las líneas de transmisión y las restricciones de velocidad de toma de carga se obtiene el esquema de despacho mostrado en la figura 8. Se puede observar que en la hora pico el aporte de los generadores térmicos es mayor que en los casos anteriores. La mayor participación de los generadores térmicos en el esquema de despacho se debe al efecto combinado de las restricciones en velocidad de toma de carga y los límites en las líneas de transmisión. Por un lado, la congestión de la línea 1–5 hace que el generador 1 no pueda entregar toda la potencia disponible, por otro lado, la restricción de velocidad de toma de carga hace que el generador 4 no pueda suplir este déficit y entonces el generador 5 debe aumentar también la potencia entregada. El costo de la generación en este caso es de US \$113.560. Si se compara con el despacho sin restricciones se encuentra que el sobrecosto impuesto por éstas es de US \$3.035.

## 5 Conclusiones

En este artículo se presentó un modelo lineal continuo para resolver el problema de coordinación hidrotérmica de corto plazo. El modelo propuesto considera los límites de transporte de la red y la velocidad de toma de carga de





**Figura 8:** esquema de despacho considerando límites en las líneas de transmisión y restricciones de velocidad de toma de carga

los generadores. Al incorporar restricciones adicionales al modelo, el tamaño del problema resultante de Programación Lineal aumenta de forma considerable. Para abordar esta dificultad se implementó un método de punto interior predictor–corrector. El modelo propuesto muestra ser robusto y puede ser aplicado a sistemas reales. Adicionalmente, éste puede ser fácilmente modificado para ingresar otro tipo de restricciones de tipo técnico o económico.

El modelo de optimización propuesto es un modelo continuo, es decir, no maneja variables binarias de tipo on–off. La inclusión de este tipo de variables hace que el problema sea más complejo (de tipo combinatorial) y de dimensiones aún mayores. Un trabajo posterior incluirá este tipo de variables, además de un manejo probabilístico de la demanda esperada y los caudales afluentes.

## 6 Anexo

A continuación se presentan los datos de los generadores, embalses y líneas de transmisión para el sistema de prueba ejemplificado en la sección 4.

**Tabla 1:** datos de generadores

Bus	Pg mín MW	Pg máx MW	U mín ( $\frac{m^3}{h}$ )	U máx ( $\frac{m^3}{h}$ )	$\rho$ ( $\frac{MWh}{m^3}$ )	Oferta ( $\frac{US\$}{MWh}$ )	Rampa ( $\frac{MW}{h}$ )
1	30	280	$2,3 \times 10^3$	$25 \times 10^3$	0,012	12	30
2	40	150	$1,4 \times 10^3$	$12 \times 10^3$	0,014	15	40
3	25	110	$1,1 \times 10^3$	$14 \times 10^3$	0,013	10	30
6	20	150	...	...	...	30	15
8	10	100	...	...	...	35	20

**Tabla 2:** datos de embalses

Embalse	Vol. Inicial ( $m^3$ )	Vol. mínimo ( $m^3$ )	Vol. máximo ( $m^3$ )	Caudal afluyente ( $\frac{m^3}{h}$ )
1	$3,2 \times 10^6$	$1,8 \times 10^6$	$8 \times 10^6$	$2,5 \times 10^3$
2	$3,5 \times 10^6$	$1,1 \times 10^6$	$7 \times 10^6$	$2,8 \times 10^3$
3	$3,8 \times 10^6$	$1,2 \times 10^6$	$6 \times 10^6$	$2,2 \times 10^3$

**Tabla 3:** datos de líneas del sistema de prueba

Línea	x (p.u)	Límite (MW)	Línea	x (p.u)	Límite (MW)
1-2	0,05917	200	6-11	0,19890	150
1-5	0,22304	110	6-12	0,25581	150
2-3	0,19797	150	6-13	0,13027	120
2-4	0,17632	200	7-8	0,17615	250
2-5	0,17388	250	7-9	0,11001	170
3-4	0,01710	200	9-10	0,0845	140
4-5	0,04211	150	9-14	0,27038	150
4-7	0,20912	200	10-11	0,19207	200
4-9	0,55618	200	12-13	0,19988	110
5-6	0,25202	200	13-14	0,34802	100

## Referencias

- [1] W. D. Stevenson, William Stevenson and John J. Grainger. *Análisis de Sistemas de Potencia*, ISBN 970-10-0908-8. McGraw-Hill, 1996. Referenciado en 46

- [2] D. Mejía y A. Escobar. *Coordinación Hidrotérmica de Sistemas Eléctricos Usando Predicción de Caudales Afluentes*. Tesis para optar al título de Magíster en Ingeniería Eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira, diciembre de 2005. Referenciado en 46
- [3] S. Soares and A. A. F. M. Carneiro. *Optimal Operation of Reservoirs for Electric Generation*. IEEE Transactions on Power Delivery, ISSN 0885–8977, **6**(3), 1101–1107 (July 1991). Referenciado en 46
- [4] Marcelo Augusto Cicogna and S. Soares. *Modelo de Planejamento da Operação Energética de Sistemas Hidrotérmicos a Usinas Individualizadas Orientado por Objetos*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Fevereiro 1999. Referenciado en 47
- [5] Daniel J. Camac G. *Programación Dinámica Dual Determinística en el Despacho Hidrotérmico*. Pontificia Universidad Católica de Chile, 1994. Referenciado en 47
- [6] M. V. F. Pereira and L. M. V. G. Pinto. *Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning*. Mathematical Programming, ISSN 0025–5610, **52**(1–3), 359–375 (August 1991). Referenciado en 47
- [7] T. Gama de Siqueira. *Comparação entre Programação Dinâmica Estocástica Primal e Dual e no Planejamento da Operação Energética*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Junho de 2003. Referenciado en 47
- [8] C. A. Correa, R. A. Bolaños y A. G. Ruiz. *Métodos no-lineales de puntos interiores aplicados al problema de despacho hidrotérmico*. Scientia et Técnica, ISSN 0122–1701, **XIII**(34), 91–96 (mayo de 2007). Referenciado en 47
- [9] N. K. Karmarkar. *A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming*. Combinatorica, ISSN 0209–9683, **4**(4), 373–395 (1984). Referenciado en 50, 52
- [10] M. Kojima, S. Minuzo and A. Yoshie. *A Polynomial-time Algorithm for a Class of Linear Complementarily Problems*. Mathematical Programming, ISSN 0025–5610, **44**, 1989. Referenciado en 50, 53
- [11] Nimrod Megiddo. *Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods*, ISBN 0387968474. Springer Verlag, New York, 1989. Referenciado en 50, 51
- [12] S. Mehrota. *On the Implementation of a Primal–Dual Interior Point Method*. SIAM Journal on Optimization, **2**(4), 575–601 (1992). Referenciado en 51