

Secciones cónicas κ -deformadas

Juan Carlos Arango Parra¹, Hector Roman Quiceno Echavarría² y Osiris Plata Lobo³

Recepción: 13-05-2016 | Aceptación: 12-09-2016 | En línea: 15-11-2016

MSC:00A05

doi:10.17230/ingciencia.12.24.1

Resumen

En el presente artículo se analiza el efecto que tiene sobre la igualdad $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ siendo P un punto del plano, F_1 y F_2 los focos de esta figura plana llamada elipse y a una constante positiva, el uso de la suma κ -deformada en el sentido de Kaniadakis, la cual se define como $x \oplus^{\kappa} y = x\sqrt{1 + \kappa^2 y^2} + y\sqrt{1 + \kappa^2 x^2}$ para $0 < \kappa < 1$. La igualdad resultante $d(P, F_1) \oplus^{\kappa} d(P, F_2) = 2a$ recibe el nombre de elipse κ -deformada y tiene ecuaciones análogas a las de la elipse definida en el sentido usual. En el trabajo se hace el estudio sobre los vértices, los extremos relativos, las asíntotas, el lado recto, la representación gráfica para las cuatro secciones cónicas: elipse, hipérbola, circunferencia y parábola en el sentido κ -deformado. Se estudia también el área que encierran la elipse y la hipérbola para cualquier valor de κ .

Palabras clave: Suma y diferencia κ -deformada; elipse κ -deformada; circunferencia κ -deformada; parábola κ -deformada e hipérbola κ -deformada.

¹ Universidad Eafit, jarang53@eafit.edu.co,
ORCID:<http://orcid.org/0000.0002-8862-7478>, Medellín, Colombia.

² Instituto tecnologico metropolitano, romanquiceno@gmail.com,
ORCID:<http://orcid.org/0000.0003-4399-823X> Medellín, Colombia.

³ Universidad de Antioquia, osiris.platalobo@gmail.com,
ORCID:<http://orcid.org/0000.0003-4882-8088> Medellín, Colombia.

κ -Deformed Conic Sections.

Abstract

In this paper we study the effects of the κ -deformed sum, defined as $x \overset{\kappa}{\oplus} y = x\sqrt{1 + \kappa^2 y^2} + y\sqrt{1 + \kappa^2 x^2}$, on the Euclidean distance function $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, where P is an arbitrary point in R^2 ; F_1 and F_2 are the focus of the curve named Ellipse. The points satisfying the resulting equality $d(P, F_1) \overset{\kappa}{\oplus} d(P, F_2) = 2a$, describe a curve named κ -deformed ellipse for which the resulting analytical expression is analogue to the standard one. We make a deep study of the vertex, local extrema, asymptotes, the latus rectum and the graph of the resulting κ -deformed conic sections: Ellipse, hyperbola, circumference and parábola in the κ -deformed setting. We also make a study of the area of the regions limited by the κ -deformed ellipse and hyperbola for an arbitrary value of κ .

Key words: κ -deformed sum and difference; κ -deformed ellipse; κ -deformed circle; κ -deformed parabola; κ -deformed hyperbola.

1 Introducción

Las secciones cónicas han sido objeto de estudio a lo largo de la historia, han servido para modelar diversos fenómenos físicos, astronómicos [1], acústicos, arquitectónicos [2], cartográficos [3] etc. Pueden ser estudiadas a partir de los cortes que se hacen a un cono, a partir del concepto de lugar geométrico [4], por medio de las coordenadas polares, de forma matricial, etc.; en cualquiera de los casos se analizan sus elementos: vértices, focos, excentricidad, ecuaciones canónicas y general, lado recto, directriz y asíntotas.

Tabla 1: Elementos de algunas secciones cónicas usuales.

Cónica	Elipse	Hipérbola	Parábola
Ecuación	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 4px$
Distancia Focal	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	p ($p, 0$)
Vértices	$(\pm a, 0)$ $(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(0, 0)$
Excentricidad	$e < 1$	$e > 1$	$e = 1$
Asíntotas o directriz	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$x = -p$
Lado recto	$\rho = 2\frac{b^2}{a}$	$\rho = 2\frac{b^2}{a}$	$\rho = 4 p $

En la Tabla 1 se especifican algunos de los elementos de las secciones cónicas con centro en el origen y que abren sobre el eje x [5], la circunferencia es una elipse con eje mayor y menor iguales ($a = b$, $c = 0$).

Usando el concepto de lugar geométrico, la elipse es el conjunto de puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante $d_1(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, para la hipérbola la diferencia de las distancias es constante, esto es $|d_1(P, F_1) - d_2(P, F_2)| = 2a$, cuando el producto de las distancias es fijo ($d_1(P, F_1) \cdot d_2(P, F_2) = b^2$) la familia de curvas recibe el nombre de Óvalos de Cassini, donde la Lemniscata y la circunferencia son dos casos particulares de la misma [6], en estas definiciones se trabaja con la suma, resta y multiplicación en el sentido usual. Giorgio Kaniadakis introduce un parámetro κ en sus artículos [7],[8] el cual se puede interpretar en el marco de la relatividad especial en términos del momento de inercia en dos sistemas inerciales, así como en el estudio de los grados de libertad microscópicos del sistema [9]. Con base en este parámetro se define la suma κ -deformada (1) y partiendo de esta expresión se hará el estudio de los efectos que sufren las secciones cónicas al considerar la suma y diferencia en el sentido de la κ -deformación y los cambios que ésto conlleva a sus elementos: vértices, ecuaciones, lado recto y extremos relativos. Adicionalmente se hace un estudio del área limitada por la elipse κ -deformada.

2 κ -deformación

En los artículos de Kaniadakis se encuentra un trabajo matemático sobre el parámetro κ ; sin embargo, en [9],[10],[11],[12] se profundiza en el aspecto demostrativo y gráfico. Considere un número real $-1 < \kappa < 1$. Para cada real x se define la función $x_{\{\kappa\}}$ como $x_{\{\kappa\}} := \frac{1}{\kappa} \operatorname{arcsinh}(\kappa x)$ para $\kappa \neq 0$ y $x_{\{0\}} = x$. La función inversa de $x_{\{\kappa\}}$ está dada por $x^{\{\kappa\}} = \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa x)$ y $x^{\{0\}} = x$. La ley de composición interna $\left(x \overset{\kappa}{\oplus} y\right)_{\{\kappa\}} = x_{\{\kappa\}} + y_{\{\kappa\}}$ recibe el nombre de suma κ -deformada, cuando $\kappa \rightarrow 0$ se obtiene la suma en el sentido usual. Por las propiedades de las funciones hiperbólicas y del álgebra la suma κ -deformada se escribe como

$$x \overset{\kappa}{\oplus} y = x\sqrt{1 + \kappa^2 y^2} + y\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} \quad (1)$$

y $x \overset{0}{\oplus} y = x + y$. La igualdad (1) es simétrica respecto del parámetro κ por ello se considera también valores entre $0 < \kappa < 1$. El conjunto de los números reales con la suma κ -deformada es un grupo abeliano con módulo 0 y para cada x su inverso aditivo $-x$. Cada valor de κ en (1) genera una superficie como en la Figura 1. La diferencia κ -deformada se define como $x \overset{\kappa}{\ominus} y = x \overset{\kappa}{\oplus} (-y)$ si $\kappa \neq 0$ y $x \overset{0}{\ominus} y = x - y$; de acuerdo con (1) esta diferencia κ -deformada se escribe como $x \overset{\kappa}{\ominus} y = x\sqrt{1 + \kappa^2 y^2} - y\sqrt{1 + \kappa^2 x^2}$.

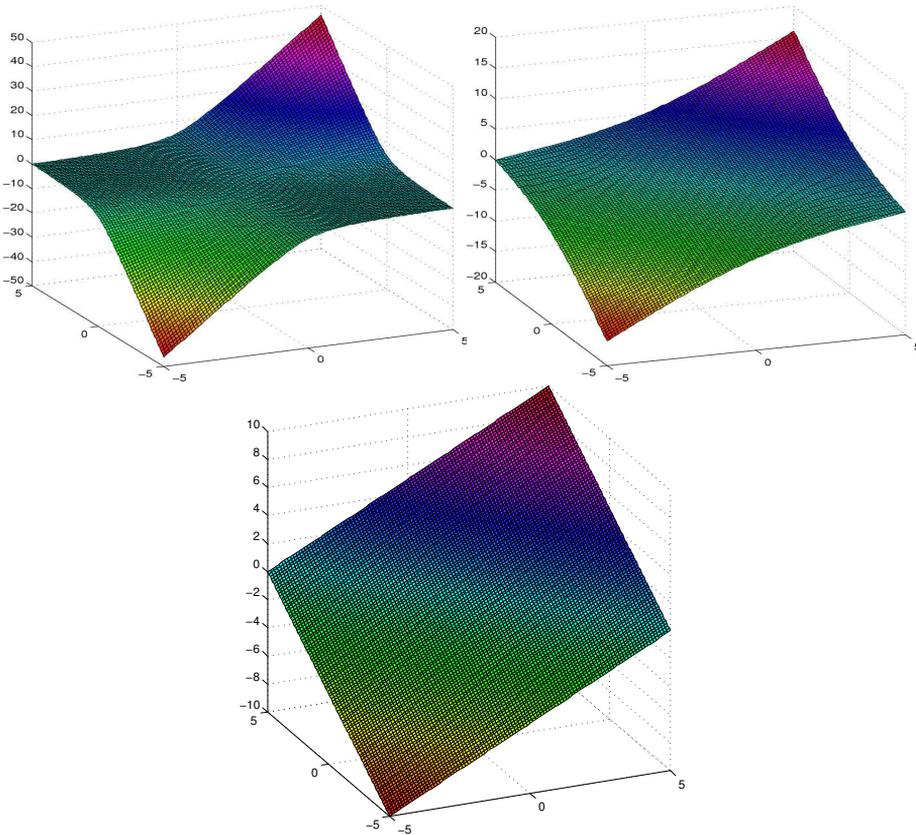


Figura 1: Suma κ -deformada para $\kappa = 0,9$, $\kappa = 0,25$ y $\kappa = 0$.

3 Elipse κ -deformada

Sean $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ dos puntos fijos y $P(x, y)$ un punto arbitrario en el plano, d_1 representará la distancia de P a F_1 y d_2 la distancia de P a F_2 . Haciendo el producto y diferencia de los cuadrados de las distancias d_1 y d_2 resulta

$$d_1^2 d_2^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4, \quad (2a)$$

$$d_1^2 - d_2^2 = 4cx, \quad (2b)$$

si la expresión (2a) está igualada al cuadrado de un valor fijo resulta la familia de Óvalos de Cassini. Considere la igualdad

$$d_1 \overset{\kappa}{\oplus} d_2 = 2a, \quad (3)$$

donde a es una constante positiva con $a > c$ y $\overset{\kappa}{\oplus}$ es la suma κ -deformada con $0 < \kappa < 1$. El conjunto de puntos P que satisfacen la igualdad (3) forma una figura plana que se llamará *elipse κ -deformada* con eje mayor en el eje x . De acuerdo con la definición de suma κ -deformada (1), la igualdad (3) se escribe como $d_1 \sqrt{1 + \kappa^2 d_2^2} + d_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2} = 2a$, aplicando operaciones algebraicas como se ilustra a continuación

$$\begin{aligned} d_1 \sqrt{1 + \kappa^2 d_2^2} &= 2a - d_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2} \\ d_1^2 (1 + \kappa^2 d_2^2) &= \left(2a - d_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2} \right)^2 \\ d_1^2 (1 + \kappa^2 d_2^2) &= 4a^2 - 4ad_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2} + d_2^2 (1 + \kappa^2 d_1^2) \\ d_1^2 + \kappa^2 d_1^2 d_2^2 &= 4a^2 - 4ad_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2} + d_2^2 + \kappa^2 d_1^2 d_2^2, \end{aligned}$$

resulta la diferencia de los cuadrados $d_1^2 - d_2^2 = 4a^2 - 4ad_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2}$, mediante manipulaciones algebraicas y usando la igualdad hallada en (2b) se tiene que $cx = a^2 - ad_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2}$. Con el propósito de encontrar una igualdad que dependa de las variables x y y , se reescribe la ecuación como $ad_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2} = a^2 - cx$, se eleva al cuadrado y opera según el álgebra, (considere la igualdad (2a)) para tener

$$(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 + a^2 \kappa^2 [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2] = a^2 (a^2 - c^2). \quad (4)$$

Sea $b^2 = a^2 - c^2$ por lo que $b > 0$, entonces la expresión (4) se escribe como

$$b^2x^2 + a^2y^2 + a^2\kappa^2 [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2] = a^2b^2, \quad (5)$$

dividiendo por $a^2b^2 \neq 0$ se halla la *ecuación canónica de la elipse κ -deformada*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{\kappa^2}{b^2} [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2] = 1. \quad (6)$$

Esta elipse κ -deformada presenta simetría respecto de los ejes coordenados y del origen. Si el eje mayor está sobre el eje y , la ecuación canónica tiene la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{\kappa^2}{b^2} [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2y^2] = 1. \quad (7)$$

Las ecuaciones canónicas de la elipse κ -deformada centrada en el origen (6) y (7) se pueden escribir como $A_\kappa x^4 + A_\kappa y^4 + B_\kappa x^2 + C_\kappa y^2 + 2A_\kappa x^2 y^2 + D_\kappa = 0$ donde $A_\kappa = a^2 k^2 > 0$, $B_\kappa = b^2 - 2a^2 c^2 \kappa^2$ para el eje mayor en x , para eje mayor en y $B_\kappa = a^2 - 2a^2 c^2 \kappa^2$, en los dos caso B_κ pueden ser negativo para valores adecuados de κ , $C_\kappa = a^2(1 + 2c^2 \kappa^2)$ es positivo siempre y $D_\kappa = a^2(\kappa^2 c^4 - b^2)$ puede tomar cualquier signo. Las traslaciones se hallan por medio de las transformaciones $x = x' - h$ y $y = y' - k$ siendo (h, k) el centro de esta cónica. En el caso en $\kappa \rightarrow 0$ la ecuación (6) equivale a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que es la ecuación canónica de la elipse con la suma usual. Se despeja ahora la variable y en términos de x en la igualdad (5) vista como una ecuación de cuarto grado en la variable y de la forma

$$a^2 k^2 y^4 + a^2 [1 + 2\kappa^2(x^2 + c^2)] y^2 + [a^2 \kappa^2 x^4 + (b^2 - 2a^2 c^2 \kappa^2)x^2 + a^2(c^4 \kappa^2 - b^2)] = 0, \quad (8)$$

la cual es una ecuación de segundo grado en la variable y^2 con discriminante $\Delta_e = a^2(1 + 4a^2 \kappa^2)(a^2 + 4c^2 \kappa^2 x^2)$, y tiene por solución

$$y^2 = \frac{-a^2(1 + 2\kappa^2(x^2 + c^2)) + \sqrt{a^2(1 + 4a^2 \kappa^2)(a^2 + 4c^2 \kappa^2 x^2)}}{2a^2 \kappa^2}, \quad (9)$$

se omite el signo menos puesto que y^2 debe ser no-negativo. Formas alternativas de escribir la igualdad (9) son

$$y^2 = \frac{2 [a^2 \kappa^2 x^4 + (b^2 - 2a^2 c^2 \kappa^2) x^2 + a^2 (c^4 \kappa^2 - b^2)]}{-a^2(1 + 2\kappa^2(x^2 + c^2)) - \sqrt{a^2(1 + 4a^2 \kappa^2)(a^2 + 4c^2 \kappa^2 x^2)}}, \quad (10)$$

$$2a^2 \kappa^2 (x^2 + y^2 + c^2) = \sqrt{\Delta_e} - a^2. \quad (11)$$

El *lado recto* ρ de la elipse κ -deformada se halla cuando se sustituye $x = \pm c$ en la ecuación (10), en tal caso se llega a la igualdad

$$\rho^2 = \frac{2b^4}{a^2(1 + 4c^2 \kappa^2) + \sqrt{a^2(1 + 4a^2 \kappa^2)(a^2 + 4c^4 \kappa^2)}}; \quad (12)$$

si $\kappa \rightarrow 0$ el lado recto de la elipse κ -deformada tiende a $\rho = \pm \frac{b^2}{a} = 2\frac{b^2}{a}$ que es el lado recto de la elipse usual (ver Tabla 1). Los vértices de esta cónica κ -deformada son los interceptos con los ejes, valores que determinan el dominio y el rango de esta relación. Si $x = 0$ en la ecuación (9) los interceptos con el eje y son

$$y^2 = \frac{-(1 + 2\kappa^2 c^2) + \sqrt{1 + 4a^2 \kappa^2}}{2\kappa^2}. \quad (13)$$

Para los cortes con el eje x se soluciona la ecuación de segundo grado $a^2 \kappa^2 x^4 + (b^2 - 2a^2 c^2 \kappa^2) x^2 + a^2 (c^4 \kappa^2 - b^2) = 0$ que se obtiene de hacer $y = 0$ en (8); dicha ecuación tiene por solución

$$x^2 = \frac{2a^2 c^2 \kappa^2 - b^2 \pm b^2 \sqrt{1 + 4a^2 \kappa^2}}{2a^2 \kappa^2}. \quad (14)$$

La elipse κ -deformada tiene cuatro puntos de corte con el eje x si $2a^2 c^2 \kappa^2 - b^2 > b^2 \sqrt{1 + 4a^2 \kappa^2}$, la solución respecto de κ de la inecuación es

$$\kappa > \frac{b}{c^2}. \quad (15)$$

Luego, la elipse κ -deformada tiene cuatro puntos de corte con el eje x si $\kappa > \frac{b}{c^2}$ y ninguno en y ; tres puntos de corte si $\kappa = \frac{b}{c^2}$ (incluyendo el origen) y uno respecto del eje y ; finalmente, dos puntos de corte cuando $\kappa < \frac{b}{c^2}$ y

otros dos en el eje y . Con los vértices respecto del eje x hallados en (14) y la distancia focal c se definen

$$\varepsilon_{e1}(\kappa) = \frac{c}{\sqrt{\frac{2a^2c^2\kappa^2 - b^2 + b^2\sqrt{1+4a^2\kappa^2}}{2a^2\kappa^2}}} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{e2}(\kappa) = \frac{c}{\sqrt{\frac{2a^2c^2\kappa^2 - b^2 - b^2\sqrt{1+4a^2\kappa^2}}{2a^2\kappa^2}}}$$

que se llamarán *excentricidad 1* y *2* respectivamente. Una forma alternativa de escribir estas igualdades es

$$\varepsilon_{e1}(\kappa) = \left(1 + \frac{2b^2}{c^2 (\sqrt{1 + 4a^2\kappa^2} + 1)} \right)^{-1/2} \quad \text{y} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{e2}(\kappa) = \left(1 - \frac{2b^2}{c^2 (\sqrt{1 + 4a^2\kappa^2} - 1)} \right)^{-1/2}, \quad (17)$$

con estos resultados se tiene que ε_{e1} tiende a $\varepsilon = \frac{c}{a}$ a medida que $\kappa \rightarrow 0$; mientras que ε_{e2} tiene una asíntota vertical para $\kappa = \frac{b}{c^2}$. En el gráfico 2 se representan ambas excentricidades.

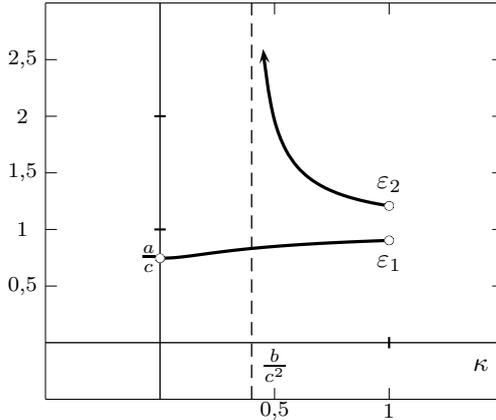


Figura 2: Excentricidad de las elipses κ -deformadas.

Para obtener los valores máximos y mínimos de la elipse κ -deformada se deriva implícitamente la igualdad (5) para tener

$$y' = \frac{(4a^2c^2\kappa^2 - 2b^2 - 4a^2\kappa^2y^2)x - 4a^2\kappa^2x^3}{(2a^2 + 4a^2\kappa^2x^2 + 4a^2\kappa^2c^2)y + 4a^2\kappa^2y^3}. \quad (18)$$

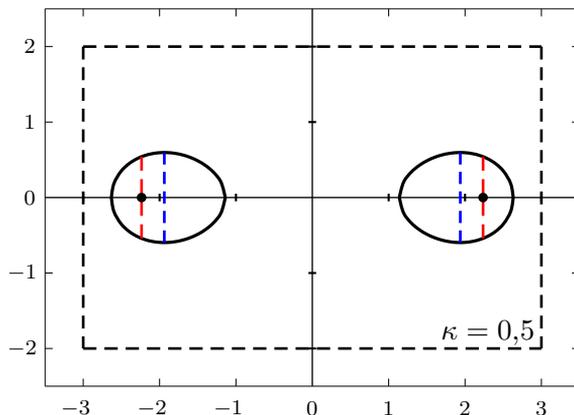
Por medio de la igualdad (11) se reescribe la primera derivada de la elipse κ -deformada como $y' = \left[\frac{c^2(1+4a^2\kappa^2) - \sqrt{\Delta_e}}{\sqrt{\Delta_e}} \right] \frac{x}{y}$, donde, si $\kappa \rightarrow 0$, entonces $y' = \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right) \frac{x}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$ que es la derivada de la elipse de forma usual. Los números críticos son

$$x = 0 \quad y \quad x = \pm \frac{\sqrt{c^4(1 + 4a^2\kappa^2) - a^4}}{2ac\kappa} . \quad (19)$$

En el caso que $\kappa \rightarrow 0$ solo $x = 0$ es un número crítico, ya que $\sqrt{c^4 - a^4}$ no existe en los reales ya que $c < a$, luego debe existir un valor de $\kappa \neq 0$ para el cual la elipse κ -deformada solo tiene a $x = 0$ como número crítico, este valor se encuentra al resolver para κ la inecuación $c^4(1 + 4a^2\kappa^2) - a^4 \geq 0$, cuya solución es

$$\kappa^2 \geq \frac{b^2(a^2 + c^2)}{4a^2c^4} . \quad (20)$$

Se concluye así que la elipse κ -deformada tiene tres números críticos si κ satisface la desigualdad (20) y tiene un solo extremo si ocurre lo contrario.



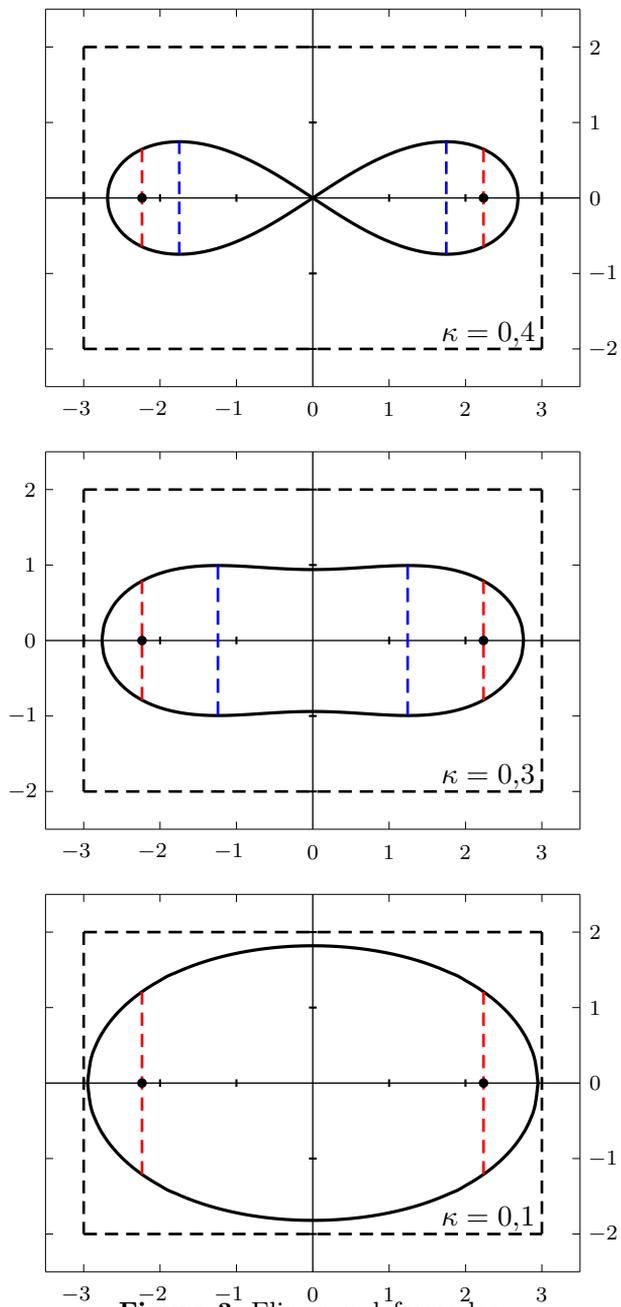


Figura 3: Elipses κ -deformadas.

En la Figura 3 se representan cuatro elipses κ -deformadas, para cada una se eligió $a = 3$, $b = 2$ y por tanto $c = \sqrt{5}$, las elipses a graficar corresponden a los valores $\kappa = 0,5$, $\kappa = 0,4$, $\kappa = 0,3$ y $\kappa = 0,1$; el valor de $\kappa = 0,4$ se elige ya que es el término que satisface la desigualdad (15). Las líneas en rojo representan el lado recto que se determinan por medio de la igualdad (12), las líneas en azul son los valores máximo y mínimos, donde el valor de x se calculó con la igualdad (19), en el caso $\kappa = 0,1$ solo $x = 0$ es un número crítico de acuerdo con la expresión (20). A medida que $\kappa \rightarrow 0$ se recupera la forma de la elipse con la suma usual, los vértices con el eje x tienden a ± 3 y con el eje y se aproximan a ± 2 . Estas representaciones gráficas son análogas a la familia de Óvalos de Cassini, sólo que la gráfica cuando $\kappa = 0,4$ no es una Lemniscata.

3.1 Área de la elipse κ -deformada

El propósito ahora es encontrar el área que encierra la elipse κ -deformada, para ello es necesario parametrizar, sea $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, sustituyendo estos valores en la ecuación (5) se escribe como

$$a^2 \kappa^2 r^4 + (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) r^2 + (a^2 \kappa^2 c^4 - a^2 b^2) = 0, \quad (21)$$

siendo $A = b^2 - 2a^2 c^2 \kappa^2 = B_\kappa$ y $B = a^2 + 2a^2 c^2 \kappa^2 = C_\kappa$, la ecuación tiene por solución

$$r^2 = \frac{-(A + C \sin^2 \theta) \pm \sqrt{(A + C \sin^2 \theta)^2 - 4a^4 \kappa^2 (\kappa^2 c^4 - b^2)}}{2a^2 \kappa^2} \quad (22)$$

donde $C = B - A$. El área que encierra la elipse κ -deformada se analiza en dos casos, el primero cuando $\kappa = \frac{b}{c^2}$ y el segundo para $\kappa \neq \frac{b}{c^2}$, los cuales se estudian de acuerdo con el valor obtenido en (15) que determinan las representaciones gráficas en (3). Para la primera condición la ecuación (22) se escribe como $r^2 = -\frac{c^4}{a^2 b^2} (A + C \sin^2 \theta)$ donde A , B y C toman la forma $A = -\frac{b^2}{c^2} (a^2 + b^2)$, $B = \frac{a^2}{c^2} (a^2 + b^2)$ y $C = \frac{1}{c^2} (a^2 + b^2)^2$ para este valor de κ . Por simetría, el área es $\mathcal{A} = 2 \int_0^{\theta_f} r^2 d\theta$ siendo θ_f el ángulo determinado en el primer cuadrante por la tangente en el polo ($r = 0$) y equivale a $\theta_f = \arcsin \left(\sqrt{-\frac{A}{C}} \right) = \arcsin \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} \right)$. Con los resultados hallados el

área se escribe como

$$\mathcal{A} = -\frac{2c^4}{a^2b^2} \int_0^{\theta_f} (A + C \sin^2 \theta) d\theta = -\frac{2c^4}{a^2b^2} \left[\left(A + \frac{C}{2} \right) \theta_f - \frac{C}{4} \sin(2\theta_f) \right], \quad (23)$$

ya que $\sin(\theta_f) = \sqrt{-\frac{A}{C}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}$ entonces por identidades trigonométricas se tiene $\cos(\theta_f) = \frac{C+A}{C}$. La identidad del ángulo doble permite reescribir la ecuación (23) como $\mathcal{A} = -\frac{c^4}{a^2b^2} [(2A + C)\theta_f - \sqrt{-AB}]$, que al sustituir los valores de A , B y C en función de a , b y c , se concluye que el área encerrada por la elipse κ -deformada para el caso en que $\kappa = \frac{b}{c^2}$ es

$$\mathcal{A} = \frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} \left[ab - (a^2 - b^2) \arcsin \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} \right) \right]. \quad (24)$$

Se considera ahora el caso en que $\kappa \neq \frac{b}{c^2}$. En la ecuación (22) se hace $M = 4a^4\kappa^2(\kappa^2c^4 - b^2)$ y la integral que describe el área está definida para θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{a^2\kappa^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-(A + C \sin^2 \theta) + \sqrt{(A + C \sin^2 \theta)^2 - M} \right] d\theta. \quad (25)$$

La integral del primer sumando en (25) tiene por solución $-\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$, para el segundo sumando es necesario hacer uso de series para tener el resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \approx & -\frac{\pi}{4a^2\kappa^2}(a^2 + b^2) + \frac{\sqrt{A^2 - M}}{a^2\kappa^2} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{AC}{3a^2\kappa^2\sqrt{A^2 - M}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \\ & - \frac{C(2A^3 - 2AM + 3CM)}{30a^2\kappa^2(A^2 - M)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \end{aligned} \quad (26)$$

se concluye que el área de la elipse κ -deformada es

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} \left[ab - (a^2 - b^2) \arcsin \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} \right) \right] & \text{Si } \kappa = \frac{b}{c^2} \\ -\frac{\pi}{4a^2\kappa^2}(a^2 + b^2) + \frac{\sqrt{A^2 - M}}{a^2\kappa^2} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{AC}{3a^2\kappa^2\sqrt{A^2 - M}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \\ - \frac{C(2A^3 - 2AM + 3CM)}{30a^2\kappa^2(A^2 - M)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 & \text{Si } \kappa \neq \frac{b}{c^2} \end{cases} \quad (27)$$

4 Circunferencia κ -deformada

Si en la ecuación (5) se hace $a = b = r \neq 0$ el resultado es una *circunferencia κ -deformada* centrada en $(0, 0)$ y de radio $r \neq 0$; como $a = b$ entonces $c = 0$ y por tanto

$$x^2 + y^2 + \kappa^2 (x^2 + y^2)^2 = r^2, \quad (28)$$

con la sustitución

$$z_\kappa = x^2 + y^2, \quad (29)$$

que equivale a un paraboloide circular en el sentido usual, la igualdad (28) se escribe como $z_\kappa + \kappa^2 z_\kappa^2 = r^2$ cuya solución es $z_\kappa = \frac{\sqrt{1+4r^2\kappa^2}-1}{2\kappa^2}$. En (29) resulta la ecuación de una circunferencia κ -deformada de radio $\sqrt{z_\kappa}$ que se escribe como

$$x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{1+4r^2\kappa^2}-1}{2\kappa^2}. \quad (30)$$

En (30) se tiene un conjunto de circunferencias concéntricas decrecientes, donde, a medida que $\kappa \rightarrow 0$, $\sqrt{z_\kappa} \rightarrow r$ que es el valor esperado, ya que la ecuación (30) se escribe como $x^2 + y^2 = r^2$; si $\kappa \rightarrow 1^-$ entonces el radio de esta circunferencia tiende a $\sqrt{\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2}}$ y la ecuación de esta circunferencia es de la forma $x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2}$. En el gráfico 4 se hace $r = 3$ y se dibujan circunferencias κ -deformadas para $\kappa = 0,9$, $\kappa = 0,5$, $\kappa = 0,3$ y $\kappa = 0,1$, las líneas discontinuas plantean los límites para κ en cero y uno.

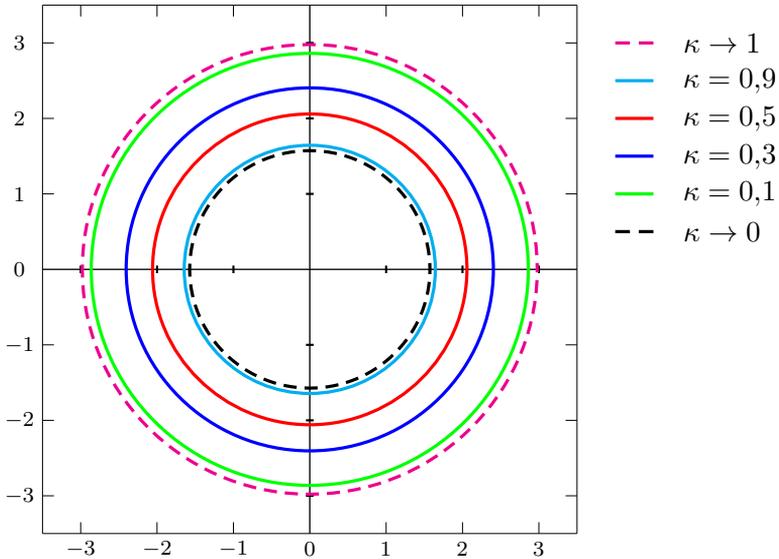


Figura 4: Circunferencias κ -deformadas.

5 Parábola κ -deformada

El concepto usual de parábola implica que la distancia de un punto $P(x, y)$ a un punto fijo $F(p, 0)$ llamado *foco* y a una recta fija \mathcal{L} con ecuación cartesiana $x = -p$ llamada *directriz* son iguales (asumiendo que el vértice está en el origen), es por ello que $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$ de forma equivalente $d(P, F) - d(P, \mathcal{L}) = 0$. De acuerdo con este concepto se considera que la *parábola κ -deformada* es el conjunto de puntos $P(x, y)$ que satisfacen la igualdad

$$d(P, F) \overset{\kappa}{\ominus} d(P, \mathcal{L}) = 0 \tag{31}$$

para $0 < \kappa < 1$. Por la definición de diferencia κ -deformada se tiene que $d^2(P, F) (1 + \kappa^2 d^2(P, \mathcal{L})) = d^2(P, \mathcal{L}) (1 + \kappa^2 d^2(P, F))$, cancelando términos comunes resulta la igualdad $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, es decir, la parábola κ -deformada coincide con la parábola usual ya que no depende de κ .

6 Hipérbola κ -deformada

En la misma vía que se definió la elipse κ -deformada, se define la *hipérbola κ -deformada* como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que

$$d_1 \overset{\kappa}{\ominus} d_2 = 2a \quad (32)$$

donde c es la distancia focal, $a > 0$, $c > a$ y $0 < \kappa < 1$; en este caso se asume que la hipérbola tiene por *eje transverso* a x . Por medio de la definición de la diferencia κ -deformada, la igualdad (32) es equivalente a $d_1 \sqrt{1 + \kappa^2 d_2^2} - d_2 \sqrt{1 + \kappa^2 d_1^2} = 2a$; la cual es posible reducir a la expresión $(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2) + a^2 \kappa^2 [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2]$; definiendo a b^2 como $c^2 - a^2$ y dividiendo luego por $a^2 b^2 \neq 0$ se obtiene la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{\kappa^2}{b^2} [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2] = 1, \quad (33)$$

que corresponde a la *ecuación canónica de la hipérbola κ -deformada centrada en $(0, 0)$* . En caso que el eje transverso esté sobre el eje y , la ecuación es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{\kappa^2}{b^2} [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 y^2] = 1. \quad (34)$$

Si $\kappa \rightarrow 0$ en (33) resulta la igualdad $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ que es la ecuación canónica de la hipérbola con la diferencia usual. La ecuación canónica de la hipérbola κ -deformada es equivalente a la ecuación de cuarto grado

$$a^2 \kappa^2 y^4 + a^2 [1 + 2\kappa^2 (x^2 + c^2)] y^2 + [a^2 \kappa^2 x^4 - (b^2 + 2a^2 c^2 \kappa^2) x^2 + a^2 (c^4 \kappa^2 + b^2)] = 0, \quad (35)$$

cuyo discriminante Δ_h está dado por $\Delta_h = a^2 (1 + 4a^2 \kappa^2) (a^2 + 4c^2 \kappa^2 x^2)$, este valor es equivalente al discriminante para la elipse κ -deformada y la solución de la ecuación (35) es

$$y^2 = \frac{-a^2(1 + 2\kappa^2(x^2 + c^2)) + \sqrt{a^2(1 + 4a^2\kappa^2)(a^2 + 4c^2\kappa^2 x^2)}}{2a^2\kappa^2}, \quad (36)$$

que coincide con la ecuación para la elipse κ -deformada (9), se diferencian las dos soluciones en el valor de la distancia focal c , $c^2 = a^2 - b^2$ para la elipse κ -deformada y $c^2 = a^2 + b^2$ para la hipérbola κ -deformada; es por ello que la ecuación para el lado recto es la misma en ambas cónicas κ -deformadas (ver (12)). Para hallar los interceptos con el eje y , se hace $x = 0$ en la ecuación (36) para tener la ecuación $y^2 = \frac{-(1+2\kappa^2c^2)+\sqrt{1+4\kappa^2a^2}}{2\kappa^2}$, ya que $1 + 2\kappa^2c^2 > \sqrt{1 + 4\kappa^2a^2}$ ($c > a$) entonces la hipérbola no corta al eje y (*eje conjugado*). Para los cortes con el eje x resulta la ecuación $a^2\kappa^2x^4 - (b^2 + 2a^2c^2\kappa^2)x^2 + a^2(c^4\kappa^2 + b^2) = 0$ que tiene por solución

$$x^2 = \frac{b^2 + 2a^2c^2\kappa^2 \pm b^2\sqrt{(1 + 4a^2\kappa^2)}}{2a^2\kappa^2}, \quad (37)$$

independiente del valor de $\kappa \neq 0$, la hipérbola tendrá cuatro interceptos con el eje x , esto es cierto debido que $b^2 + 2a^2c^2\kappa^2 > b^2\sqrt{(1 + 4a^2\kappa^2)}$ es una desigualdad cierta para todo a , b , c y κ . Además, se sigue que la hipérbola κ -deformada siempre será cerrada y que al tener cuatro puntos de corte, $\kappa > \frac{b}{c^2}$ y como las ecuaciones de la elipse e hipérbola κ -deformada coinciden entonces el área encerrada por ésta última también será la expresión encontrada en (26), donde la diferencia de los resultado radica en el valor de la distancia focal c . Estos cuatro puntos de corte respecto al eje x se pueden hallar de forma alternativa como

$$x^2 = \frac{2a^2(c^4\kappa^2 + b^2)}{b^2 + 2a^2c^2\kappa^2 \pm \sqrt{b^4(1 + 4a^2\kappa^2)}}, \quad (38)$$

donde, si $\kappa \rightarrow 0$ se obtiene que $x^2 \rightarrow a^2$ y $x^2 \rightarrow \infty$, es por esto que la hipérbola usual tiene dos puntos de corte $(\pm a, 0)$. A partir de estos interceptos con el eje x se define las funciones ε_{h1} y ε_{h2} en términos de κ como $\varepsilon_{h1}(\kappa) = \frac{c}{\sqrt{\frac{b^2+2a^2c^2\kappa^2-b^2\sqrt{1+4a^2\kappa^2}}{2a^2\kappa^2}}}$ y $\varepsilon_{h2}(\kappa) = \frac{c}{\sqrt{\frac{b^2+2a^2c^2\kappa^2+b^2\sqrt{1+4a^2\kappa^2}}{2a^2\kappa^2}}}$,

dichas funciones se llamarán *excentricidad* para la hipérbola κ -deformada. De acuerdo con la representación gráfica (ver gráfico 5) se puede concluir que $\varepsilon_{h1}(\kappa)$ se acerca al término $\frac{c}{a}$ (excentricidad de la hipérbola usual) siempre que $\kappa \rightarrow 0$; mientras que ε_{h2} se acerca a cero para este valor del

parámetro.

$$\varepsilon_{h1}(\kappa) = \left(1 - \frac{2b^2}{c^2 (\sqrt{1 + 4a^2\kappa^2} + 1)} \right)^{-1/2} \quad y$$

$$\varepsilon_{h2}(\kappa) = \left(1 + \frac{2b^2}{c^2 (\sqrt{1 + 4a^2\kappa^2} - 1)} \right)^{-1/2}$$

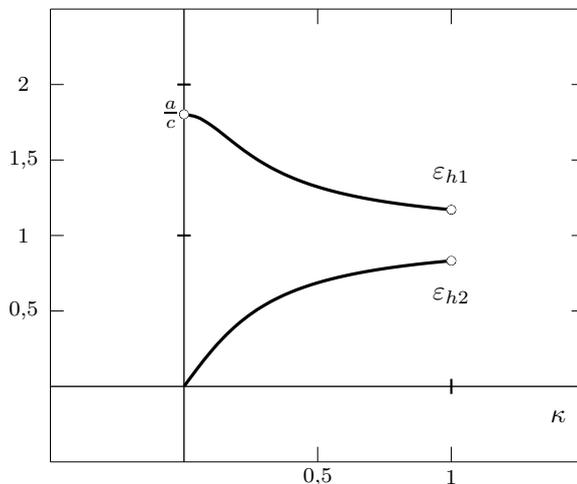


Figura 5: Excentricidad de las hipérbolas κ-deformadas.

Por medio de derivada implícita aplicada a la igualdad (35) es posible encontrar y' como

$$y' = \left[\frac{2b^2 + 4a^2c^2\kappa^2 - 4a^2\kappa^2x^2 - 4a^2\kappa^2y^2}{2a^2 + 4a^2c^2\kappa^2 + 4a^2\kappa^2y^2 + 4a^2\kappa^2x^2} \right] \frac{x}{y}, \quad (39)$$

se iguala a cero esta derivada, donde $x = 0$ es un número crítico que no se tiene en cuenta ya que la hipérbola κ-deformada no pasa por el

origen (ver (38)) Otros posibles números críticos se logran al solucionar la ecuación $2b^2 + 4a^2c^2\kappa^2 - 4a^2\kappa^2x^2 - 4a^2\kappa^2y^2 = 0$ que se puede escribir equivalentemente como $x^2 + y^2 = \frac{b^2+2a^2c^2\kappa^2}{2a^2\kappa^2}$ y así los extremos relativos de la hipérbola κ -deformada resultan para los valores $x = \pm \frac{\sqrt{c^4(1+4a^2\kappa^2)-a^4}}{2ac\kappa}$. Resolviendo la inecuación $c^4(1 + 4a^2\kappa^2) - a^4 \geq 0$ se llega a la desigualdad $4a^2c^4\kappa^2 \geq -b^2(a^2 + c^2)$ que siempre es cierta para cualquier valor de κ ; por tal motivo, la hipérbola κ -deformada siempre tendrá dos valores máximos y dos valores mínimos.

Las asíntotas de esta cónica κ -deformada resultan de resolver la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{\kappa^2}{b^2} [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2] = 0$ cuya solución es

$$y^2 = \frac{2 [a^2\kappa^2x^4 - (b^2 + 2a^2\kappa^2c^2)x^2 + a^2\kappa^2c^4]}{-a^2(1 + 2\kappa^2(x^2 + c^2)) - \sqrt{a^4(1 + 4c^2\kappa^2) + 4a^2\kappa^2c^2(1 + 4a^2\kappa^2)}x^2}, \quad (40)$$

si $\kappa \rightarrow 0$ en (40) se obtiene las rectas $y = \pm \frac{b}{a}x$ que son las asíntotas de la hipérbola con la diferencia usual. Hallando los interceptos con los ejes de estas asíntotas se encuentra que no cortan al eje y y los puntos de corte con x son de la forma $x^2 = \frac{b^2+2a^2c^2\kappa^2 \pm \sqrt{b^2(b^2+4a^2c^2\kappa^2)}}{2a^2\kappa^2}$.

Para las hipérbola de los gráficos (6) y (7) se eligió $a = 2$, $b = 3$ logrando $c = \sqrt{13}$, los valores de κ seleccionados en ese orden son $\kappa = 0,5$ y $\kappa = 0,1$. En ambos gráficos se puede identificar el rectángulo de inspección (en la hipérbola usual, las asíntotas pasan por los vértices opuestos de este rectángulo), así como las asíntotas que son las curvas punteadas que aparecen en la parte exterior, donde, a medida que $\kappa \rightarrow 0$ se acercan al centro de esta cónica deformada; independiente del valor de κ seleccionado las hipérbolas κ -deformadas tienen dos máximos y dos mínimos y las curvas son cerradas, lo mismo que las asíntotas.

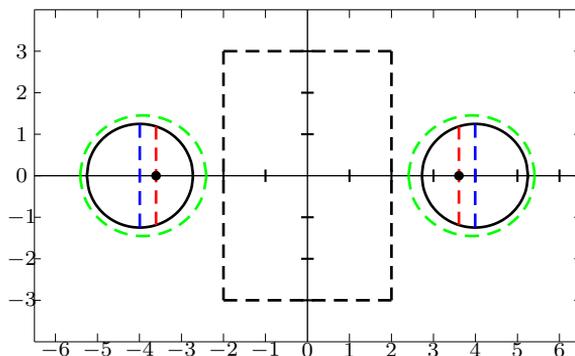


Figura 6: Hipérbola κ -deformada con $\kappa = 0,5$.

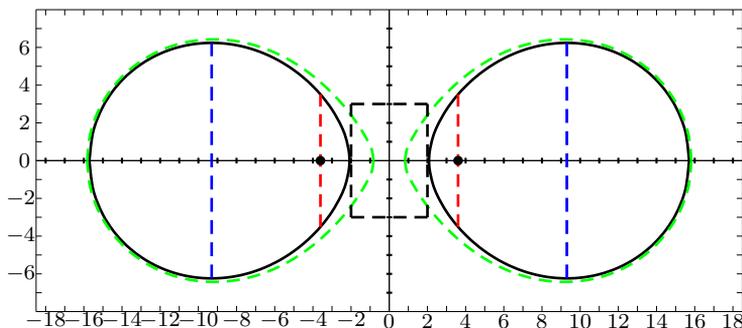


Figura 7: Hipérbola κ -deformada con $\kappa = 0,1$.

7 Problemas abiertos

Un problema a considerar es el estudio de las secciones cónicas por medio de la entropía relativa de Tsallis (q -deformación) para la cual se define la suma como $x \oplus_q y = x + y + (1 - q)xy$ (ver [13],[14],[15],[16]). Es necesario ahondar en el estudio de la longitud de arco para la elipse y la hipérbolas deformadas de acuerdo al índice κ por medio de integrales elípticas. Así mismo se pretende hacer el estudio de las propiedades ópticas para rayos que son tangentes a estas cónicas. Ya que las secciones cónicas han servido de modelos para el movimiento planetario, se pretende indagar sobre

planetas (en sistemas binarios) o cometas (trayectorias hiperbólicas) que puedan tener trayectorias análogas a las representaciones encontradas en los gráficos 3, 6 y 7.

8 Conclusiones

Conceptos clásicos como circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son generalizados al sustituir la suma o diferencia usuales por la suma o diferencia deformada en el sentido de Kaniadakis, la parábola permaneció invariante a esta transformación. Para la elipse κ -deformada se hallan tres casos posibles respecto del número de interceptos dependiendo del término $\frac{b}{c^2}$, se presenta la posibilidad de tres extremos (respecto del eje x) relativos o solo uno de acuerdo a la comparación de κ^2 y $\frac{b^2(a^2+c^2)}{4a^2c^4}$. La hipérbola κ -deformada siempre tiene cuatro interceptos con el eje x y ninguno con el eje y , las asíntotas adoptan una forma similar a la de la hipérbola salvo que se acercan al origen a medida que $\kappa \rightarrow 0$, a diferencia de la hipérbola usual es una figura cerrada y las asíntotas no son rectas. La circunferencia κ -deformada son trazas del paraboloides circular $z = x^2 + y^2$ para z entre $\sqrt{\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2}}$ y r . Las áreas de la elipse e hipérbola κ -deformada se hallan con la misma expresión (27) la diferencia en los resultados radica en el valor de c .

Referencias

- [1] A. Castellón Serrano, “Astronomía y Matemáticas,” *Unión, Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, no. 20, pp. 113–116, 2009. [Online]. Available: <http://goo.gl/ov3Dt1> 10
- [2] P. Costa Buján, “Superficies cónicas: Aplicación a la arquitectura y el diseño [vídeo],” 2014. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/2183/12666> 10
- [3] P. Ramírez Granados, “Elementos de cartografía matemática y su aplicación en la elaboración de las cartas geográficas,” *Revista Geográfica de América Central*, vol. 46, no. 1, pp. 15–36, 2011. [Online]. Available: <http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/geografica/article/view/3290> 10
- [4] M. González and G. Patiño, “Método para obtener los elementos de las secciones cónicas por medio de la derivación implícita,” *TecnoLógicas*, no. 19, pp. 87–118, 2007. [Online]. Available: <http://itmojs.itm.edu.co/index.php/tecnologicas/article/view/305> 10

- [5] C. Lehmann, “Geometría Analítica,” *Noriega Editores*, 1995. 11
- [6] M. Karatas, “A multi foci closed curve: Cassini oval, its properties and applications,” *Doğuş University Dergisi*, vol. 2, no. 14, pp. 231–248, 2013. [Online]. Available: <http://journal.dogus.edu.tr/index.php/duj/article/view/661> 11
- [7] G. Kaniadakis, “Statistical mechanics in the context of special relativity,” *The American Physical Society, Physical Review E*, no. 66, pp. 1–17, 2002. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056125> 11
- [8] —, “Statistical mechanics in the context of special relativity II,” *The American Physical Society, Physical Review E*, no. 72, pp. 1–14, 2005. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.72.036108> 11
- [9] D. Deossa, “Sobre funciones exponenciales y logarítmicas deformadas según Kaniadakis,” p. 96, 2011. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10784/156> 11
- [10] J. C. Arango Parra, “Una variedad de información estadística κ -deformada,” p. 121, 2012. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10784/1307> 11
- [11] H. Quiceno and J. C. Arango, “K-exponential Statistical Manifold Modeled on Orlicz Spaces,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 2, no. 431, pp. 1080–1098, 2015. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.065> 11
- [12] J. Ramírez and Y. Hernández, “La matriz κ -exponencial y soluciones de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales,” *Tesis de Maestría, Universidad Eafit*, p. 82, 2014. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10784/8108> 11
- [13] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 52, no. 1, pp. 479–487, 1988. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01016429> 27
- [14] G. Loaiza and H. Quiceno, “A q-exponential statistical Banach Manifold,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 2, no. 398, pp. 466–476, 2013. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01018-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01018-X) 27
- [15] J. Naudts, “Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatics,” *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 1-4, no. 316, pp. 323–334, 2002. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01018-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01018-X) 27
- [16] H. Quiceno Echavarría, “Variedad de información estadística q-exponencial,” p. 73, 2010. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10784/153> 27