Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 3, número 6, diciembre de 2007, páginas 135–171

Lógica básica para la verdad y la falsedad LBVF

Basic logic for true and false LBVF

Manuel Sierra A.[1]

Recepción: 25-sep-2007/Modificación: 18-oct-2007/Aceptación: 18-oct-2007
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

El sistema LBVF se construye como una extensión de la lógica clásica positiva, al incluir operadores de afirmación alterna, negación alterna y completez, además, se definen a partir de ellos los operadores de negación clásica y buena fundamentación. El sistema es caracterizado por una semántica de valuaciones tradicionales con la cual se prueba que, respecto a los operadores de afirmación y de negación alterna el sistema es paracompleto. En el sistema se caracterizan las definiciones de verdad y falsedad presentadas por Aristóteles, representando la falsedad aristotélica con el operador de negación alterna y la verdad aristotélica con el operador de afirmación alterna, lográndose con esta interpretación dar solución a una variante de la paradoja del mentiroso.

Palabras claves: verdad, falsedad, afirmación alterna, negación alterna, paracompleto, bien fundado, paradoja del mentiroso.

Abstract

System LBVF is an extension of the classical positive logic, the system includes operators of alternating affirmation, alternating negation and determinability, and the operators of classical negation and good foundation are defined as from them. The system is characterized by a semantic of traditional valuations. Respect to the negation and affirmation operators the system is paracomplete.

[1] Magíster en Matemáticas, msierra@eafit.edu.co, profesor integrante del grupo en Lógica y Computación, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.

In the system the definitions of truth and falsity presented by Aristotle are really characterized, representing the Aristotelian falsity with the operator of alternating negation and the Aristotelian truth with the operator of alternating affirmation. This interpretation gives solution to a variant of the liar's paradox.

Key words: truth, falsity, alternating affirmation, alternating negation, paracomplete, good foundation, liar's paradox.

1 Presentación

El sistema *lógica básica para la verdad y la falsedad* (LBVF) presentado en este trabajo, incorpora, además de los operadores usuales de la lógica proposicional clásica positiva, operadores de *afirmación y negación alternas*, y operadores de *completez* respecto a las parejas de operadores: afirmación usual y negación alterna, negación usual y afirmación alterna, negación alterna y afirmación alterna. El sistema resulta ser una extensión deductiva del cálculo proposicional clásico.

Para los operadores de *afirmación y negación* de la lógica clásica se tiene que, si se rechaza la negación de la fórmula A entonces se acepta la afirmación de A. Lo anterior tiene como consecuencia la validez del principio del *tercero excluido* $A\vee \sim A$, el cual prohíbe que una fórmula y su negación sean ambas rechazadas, no permite las *indeterminaciones* respecto a la negación, es decir, la lógica clásica no soporta las indeterminaciones.

El sistema LBVF tiene la característica de no prohibir la indeterminabilidad de la afirmación de un enunciado con su negación alterna, y por lo tanto es *paracompleto* respecto a este par de operadores. Los teoremas acerca de la negación clásica son recuperados de dos formas, por un lado caracterizando en términos del operador de negación alterna y el de completez respecto a la afirmación usual y a la negación alterna, un operador de *negación fuerte*, y por otro lado, pidiendo a las fórmulas que se encuentran bajo el alcance de la negación alterna, algunos requisitos de determinabilidad. En el sistema la determinabilidad o *completez* respecto a la afirmación usual y a la negación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la disyunción entre la fórmula y su negación alterna.

El sistema LBVF también tiene la característica de no prohibir la indeterminabilidad de la afirmación alterna de un enunciado con su negación clásica, y por lo tanto es *paracompleto* respecto a este par de operadores. También es *paracompleto* respecto a los operadores de afirmación y negación alternas.

En el libro IV de la Metafísica [1], Aristóteles define el concepto de verdad de la siguiente manera "decir de *lo que es* que es, y de *lo que no es* que no es, es *lo verdadero*; decir de *lo que es* que no es, y de *lo que no es* que es, es *lo falso*". Con el sistema LBVF se puede modelar esta definición interpretando la *afirmación alterna* como *verdadero*, la *negación alterna* como *falso*, y la *completez alterna* o *buena fundamentación* como *decir*. Utilizando esta interpretación, se da solución a una variante de la paradoja del mentiroso, en la cual se plantea una oración que afirma su propia falsedad. Se tiene pues que los operadores de afirmación y negación alterna, son auténticas generalizaciones de las nociones usuales de verdad y falsedad.

El sistema LBVF es caracterizado con una semántica de valuaciones tradicional. Las pruebas de validez y completitud son presentadas de manera detallada.

2 Sistema deductivo para LBVF

El lenguaje de la *Lógica Clásica Positiva* (LCP) consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El *lenguaje del sistema* LBVF se obtiene extendiendo el lenguaje de la lógica clásica positiva con los operadores monádicos $\neg$, I, $+$, C.

El conjunto de *fórmulas de* LBVF es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

R1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas.*

R2. Si A es una fórmula entonces $\neg(A)$, $(A)^C$, $+(A)$ y $(A)^I$ son fórmulas[1].

[1] $\neg A$ es la negación alterna de A. A^C indica que las fórmulas A y $\neg A$ son determinables, semánticamente significa que al menos una de A y $\neg A$ es verdadera. A^C se lee A es determinable con su negación alterna (C es el operador de completez respecto a la afirmación usual y a la negación alterna). $+A$ es la afirmación alterna de A. A^I indica que las fórmulas $\sim A$ y $+A$ son determinables, semánticamente significa que al menos una de $\sim A$ y $+A$ es

R3. Si A y B son fórmulas entonces $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$ y $(A) \leftrightarrow (B)$ son fórmulas.

El *sistema deductivo para* LBVF es una extensión del cálculo proposicional clásico positivo LCP, por lo que se toman dos grupos de axiomas.

Axiomas para el cálculo proposicional clásico:

Ax 0.1	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax 0.2	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Ax 0.3	$A \rightarrow (A \vee B)$
Ax 0.4	$B \rightarrow (A \vee B)$
Ax 0.5	$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
Ax 0.6	$(A \wedge B) \rightarrow A$
Ax 0.7	$(A \wedge B) \rightarrow B$
Ax 0.8	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$
Ax 0.9	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
Ax 0.10	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax 0.11	$(A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)]$
Ax 0.12	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

Axiomas para los nuevos operadores:

Ax 1.1	$(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$
Ax 1.2	$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$
Ax 2.1	$(A \rightarrow +A) \rightarrow A^I$
Ax 2.2	$(A^I \rightarrow +A) \rightarrow A$
Ax 3.1	$(A^I \wedge A^C) \rightarrow (+A \vee \neg A)$
Ax 4.1	$^*A \leftrightarrow^* (\sim A)$
Ax 4.2	$^*(A \wedge B) \leftrightarrow (^*A \wedge^* B)$
Ax 4.3	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (^*A \leftrightarrow^* B)$
Ax 4.4	$^*A \leftrightarrow^* (+A)$
Ax 4.5	$^*A \leftrightarrow^* (\neg A)$

verdadera. A^I se lee $\sim A$ es determinable con su afirmación alterna (I es el operador de completez respecto a la negación usual y a la afirmación alterna).

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* (MP): de A y $A \to B$ se infiere B.

En el sistema se definen dos operadores monádicos:

$\sim\!A = A \to \neg A$ (*negación fuerte* de A)

${}^*A = A^I \wedge A^C$ (*completez alterna* de A; A *es bien fundado*)[2].

Se dice que una fórmula A es un *teorema de LBVF*, denotado $\vdash A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP. Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de LBVF a partir de* Γ, denotado $\Gamma \vdash A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

En lo que sigue se hará referencia a los siguientes resultados muy conocidos de la lógica clásica positiva (LCP) (para detalles de las pruebas ver [2] y [3]). *Principio de identidad:* $A \to A$, *teorema de deducción:* para Γ un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$, *introducción y eliminación de la conjunción:* $\vdash A \wedge B \Leftrightarrow (\vdash A$ y $\vdash B)$, *conmutatividad de la conjunción:* $\vdash A \wedge B \Leftrightarrow \vdash B \wedge A$, *conmutatividad de la disyunción:* $\vdash A \vee B \Leftrightarrow \vdash B \vee A$, *introducción de la disyunción:* $\vdash A \Rightarrow (\vdash A \vee B$ y $\vdash B \vee A)$, *silogismo hipotético:* $(\vdash A \to B$ y $\vdash B \to C) \Rightarrow \vdash A \to C$, *eliminación de la disyunción:* $(\vdash A \vee B$ y $\vdash A \to C$ y $\vdash B \to C) \Rightarrow \vdash C$, *dilema constructivo:* $(\vdash A \vee B, \vdash A \to C$ y $\vdash B \to D) \Rightarrow \vdash C \vee D$, *exportación:* $\vdash A \to (B \to C) \Leftrightarrow \vdash (A \wedge B) \to C$, *disyunción en el antecedente:* $\vdash (A \vee B) \to C) \Leftrightarrow (\vdash A \to C$ y $\vdash B \to C)$.

Proposición 2.1.

a. $A \to A^C$

b. $\neg A \to A^C$

c. $\neg A \to A^I$

[2] ${}^*A$ indica que las fórmulas $+A$ y $\neg A$ son determinables, semánticamente significa que al menos una de $+A$ y $\neg A$ es verdadera. ${}^*A$ se lee A es bien fundado (* es el operador de completez respecto a la afirmación alterna y a la negación alterna, u operador de buena fundamentación).

d. $+A \rightarrow A^I$

e. $+A \rightarrow A$

f. $\neg A \rightarrow \sim A$

Prueba.

Las partes a y b se obtienen por aplicación de la regla disyunción en el antecedente en Ax 1.1.

Para la parte c, por Ax 1.2 se tiene $(A \wedge \neg A) \rightarrow +A$, utilizando conmutatividad y exportación resulta $\neg A \rightarrow (A \rightarrow +A)$, por Ax 2.1 se tiene $(A \rightarrow +A) \rightarrow A^I$, y por silogismo hipotético se concluye $\neg A \rightarrow A^I$.

Para la parte d, por Ax 0.1 se tiene $+A \rightarrow (A \rightarrow +A)$, por Ax 2.1 se tiene $(A \rightarrow +A) \rightarrow A^I$, y por silogismo hipotético se concluye $+A \rightarrow A^I$.

Para la parte e, por Ax 0.1 se tiene $+A \rightarrow (A^I \rightarrow +A)$, por Ax 2.2 se tiene $(A^I \rightarrow +A) \rightarrow A$, y por silogismo hipotético se concluye $+A \rightarrow A$.

Para la parte f, por Ax 0.1 se tiene $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg A)$, por la definición de negación fuerte resulta $\neg A \rightarrow \sim A$. □

Proposición 2.2 (La negación fuerte se comporta como la clásica)**.**

a. Trivialización: $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$

b. Tercero excluido: $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$

c. Los teoremas del cálculo proposicional clásico que involucren la negación clásica son teoremas del sistema LBVF cuando se cambia la negación clásica por la negación fuerte.

Prueba.

Para la parte a, supóngase que se tienen A y $\sim A$. Por la definición de la negación fuerte al tener $\sim A$ resulta $A \rightarrow \neg A$, y como se tiene A, entonces se infiere $\neg A$. Por introducción de la conjunción se obtiene $A \wedge \neg A$, y como por Ax 1.2 se tiene $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$, entonces resulta B. Por lo tanto, de A y $\sim A$ se infiere B. Aplicando dos veces el teorema de deducción, se concluye $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$.

Para la parte b, por Ax 0.12 se tiene $[(A \rightarrow \neg A) \rightarrow A] \rightarrow A$, y utilizando la definición de negación fuerte se concluye $({\sim}A \rightarrow A) \rightarrow A$.

Para la parte c, basta notar que el cálculo proposicional clásico puede ser axiomatizado por Ax 0.1,...,Ax 0.12,proposición 2.2b y proposición 2.2a. Para los detalles ver [4]. $\square$

3 Semántica para LBVF

Una *valuación* v es una función que interpreta las fórmulas atómicas como elementos del conjunto $\{0,1\}$. La valuación v se extiende a una función V que interpreta las fórmulas de LBVF en el conjunto $\{0,1\}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\text{Si } p \text{ es atómica entonces } V(p) = v(p)} \\
V\wedge. & V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow [V(A) = 1 \text{ y } V(B) = 1] \\
V\vee. & V(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow [V(A) = 0 \text{ y } V(B) = 0] \\
V \rightarrow. & V(A \rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow [V(A) = 1 \text{ y } V(B) = 0] \\
V \leftrightarrow. & V(A \leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = V(B) \\
VC. & V(A^C) = 0 \Leftrightarrow [V(A) = 0 \text{ y } V(\neg A) = 0] \\
V\neg. & V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0 \\
VI. & V(A^I) = 0 \Leftrightarrow [V(A) = 1 \text{ y } V(+A) = 0] \\
V+. & V(+A) = 1 \Rightarrow V(A) = 1 \\
V+\sim. & V(+{\sim}A) = V(\neg A) \\
V\neg+. & V(\neg + A) = V(\neg A) \\
V+\neg. & V(+\neg A) = V(\neg A) \\
V++. & V(++A) = V(+A) \\
V\neg\sim. & V(\neg{\sim}A) = V(+A) \\
V\neg\neg. & V(\neg\neg A) = V(+A) \\
V^*eq. & V(A) = V(B) \Rightarrow V(^*A) = V(^*B) \\
V^*\wedge. & V(^*(A \wedge B)) = 1 \Leftrightarrow [V(^*A) = 1 \text{ y } V(^*B) = 1]
\end{array}
$$

Se dice que una fórmula A es *válida*, denotado $\models A$, si y solamente si para toda valuación $v, V(A) = 1$.

Proposición 3.1 (Propiedades de las valuaciones[3]).

$V\sim$.	$V(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$
V^*.	$V(^*A) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = V(\neg A) = 0$
$V + eq$.	$V(A) = V(B) \Rightarrow V(+A) = V(+B)$
$V\neg eq$.	$V(A) = V(B) \Rightarrow V(\neg A) = V(\neg B)$
$VIeq$.	$V(A) = V(B) \Rightarrow V(A^I) = V(B^I)$
$VCeq$.	$V(A) = V(B) \Rightarrow V(A^C) = V(B^C)$
$VC\sim$.	$V(A^I) = V((\sim A)^C)$
$VI\sim$.	$V(A^C) = V((\sim A)^I)$
$V^*\sim$.	$V(^*A) = V(^*\sim A)$
V^*+.	$V(^*A) = V(^*+A)$
$V^*\neg$.	$V(^*A) = V(^*\neg A)$

Prueba.

Para la prueba de $V\sim$, sea v una valuación tal que, $V(\sim A) = 1$. Por la definición de negación fuerte se obtiene que $V(A \to \neg A) = 1$, y por $V\to$ resulta $V(A) = 0$ ó $V(\neg A) = 1$. Pero, por $V\neg$, de $V(\neg A) = 1$ se infiere $V(A) = 0$, por lo que necesariamente $V(A) = 0$. De esta manera se ha probado que, $V(\sim A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0$.
Para la recíproca, sea v una valuación tal que, $V(A) = 0$. Utilizando $V\to$ resulta que $V(A \to \neg A) = 1$, lo cual por la definición de negación fuerte significa $V(\sim A) = 1$. Por lo tanto, $V(A) = 0 \Rightarrow V(\sim A) = 1$.

Para la prueba de V^*, por la definición de completez alterna, $V(^*A) = 0$ significa $V(A^I \wedge A^C) = 0$, lo cual por $V\wedge$ es equivalente a $V(A^I) = 0$ ó $V(A^C) = 0$. En el primer caso, si $V(A^I) = 0$, entonces por VI resultan $V(+A) = 0$ y $V(A) = 1$, utilizando $V\neg$ se infiere $V(\neg A) = 0$. En el segundo caso, si $V(A^C) = 0$, entonces por VC resultan $V(\neg A) = 0$ y $V(A) = 0$, utilizando $V+$ se infiere $V(+A) = 0$. Por lo que, $V(^*A) = 0 \Rightarrow V(+A) = V(\neg A) = 0$.

[3]Como consecuencia de $V + eq$, $V\neg eq$, $VIeq$, $VCeq$ y Ax 4.3, se tiene que, en la LBVF vale sustitución por equivalencia. Es decir, si $F(A)$ es una fórmula en la cual figura A y $F(B)$ es el resultado de cambiar en $F(A)$ alguna ocurrencia de A por B, entonces, para cada valuación v, $V(A) = V(B)$ implica que $V(F(A)) = V(F(B))$, o dicho de otra manera, $[(A \leftrightarrow B) \wedge F(A)] \to F(B)$.

Para la recíproca, supóngase que $V(+A) = 0$, $V(\neg A) = 0$ y $V({}^*A) = 1$. Por la definición de completez alterna se obtiene $V(A^I \wedge A^C) = 1$, lo cual por $V\wedge$ implica $V(A^I) = 1$ y $V(A^C) = 1$. Al ser $V(A^I) = 1$, por VI se infiere $V(A) = 0$ ó $V(+A) = 1$, y puesto que $V(+A) = 0$ entonces $V(A) = 0$. Al ser $V(A^C) = 1$, por VC se infiere $V(A) = 1$ ó $V(\neg A) = 1$, y puesto que $V(A) = 0$ entonces $V(\neg A) = 1$, lo cual no es el caso. Por lo que, $V(+A) = V(\neg A) = 0 \Rightarrow V({}^*A) = 0$.

Para la prueba de $V + eq$, sea $V(A) = V(B)$. Supóngase que $V(+A) = 1$, por $V+$ se infiere que $V(A) = 1$, y como $V(A) = V(B)$, resulta que $V(B) = 1$. Al ser $V(A) = V(B)$, por V^*eq se obtiene $V({}^*A) = V({}^*B)$, además, como se tiene $V(+A) = 1$ entonces, por VI, resulta $V(A^I) = 1$, y como también se tiene $V(A) = 1$, entonces por VC, resulta $V(A^C) = 1$, y aplicando $V\wedge$ resulta $V(A^I \wedge A^C) = 1$, lo cual, por la definición de completez alterna significa $V({}^*A) = 1$. Se tienen $V({}^*A) = V({}^*B)$ y $V({}^*A) = 1$, por lo que $V({}^*B) = 1$, lo cual por la definición de completez alterna y $V\wedge$ significa $V(B^I) = 1$ y $V(B^C) = 1$. Al tener $V(B^I) = 1$ y $V(B) = 1$, utilizando VI se obtiene $V(+B) = 1$. Se ha probado de esta forma que $V(+A) = 1 \Rightarrow V(+B) = 1$. De manera similar se prueba la recíproca, por lo que se obtiene $V(+A) = 1 \Leftrightarrow V(+B) = 1$, es decir, $V(+A) = V(+B)$.

Para la prueba de $V\neg eq$, sea $V(A) = V(B)$. Supóngase que $V(\neg A) = 1$, por $V\neg$ se infiere que $V(A) = 0$, y como $V(A) = V(B)$, resulta que $V(B) = 0$. Al ser $V(A) = V(B)$, por V^*eq se obtiene $V({}^*A) = V({}^*B)$, además como se tiene $V(\neg A) = 1$ entonces, por VC, resulta $V(A^C) = 1$, y como también se tiene $V(A) = 0$, por VI resulta $V(A^I) = 1$. Al tener $V(A^I) = 1$ y $V(A^C) = 1$, por $V\wedge$ y la definición de completez alterna se genera $V({}^*A) = 1$. Se tienen $V({}^*A) = V({}^*B)$ y $V({}^*A) = 1$, por lo que $V({}^*B) = 1$, es decir $V(B^I \wedge B^C) = 1$, lo cual por $V\wedge$ significa $V(B^I) = 1$ y $V(B^C) = 1$. Al tener $V(B^C) = 1$ y $V(B) = 0$, utilizando VC se obtiene $V(\neg B) = 1$. Se ha probado de esta forma que $V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(\neg B) = 1$. De manera similar se prueba la recíproca, por lo que se obtiene $V(\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(\neg B) = 1$, es decir, $V(\neg A) = V(\neg B)$.

Para la prueba de $VIeq$, sea $V(A) = V(B)$. Supóngase que $V(A^I) = 0$, por VI resultan $V(+A) = 0$ y $V(A) = 1$. Al tener $V(A) = V(B)$ y $V(A) = 1$ resulta $V(B) = 1$. Como se tiene $V(A) = V(B)$, por $V + eq$ se obtiene $V(+A) = V(+B)$, y como también se tiene $V(+A) = 0$, se infiere $V(+B) = 0$. Aplicando VI en $V(B) = 1$ y $V(+B) = 0$ se genera $V(B^I) = 0$. Se ha probado de esta manera que $V(A^I)=0 \Rightarrow V(B^I)=0$. De manera similar se prueba la recíproca, por lo que se obtiene $V(A^I)=0 \Leftrightarrow V(B^I)=0$, es decir, $V(A^I)=V(B^I)$.

Para la prueba de $VCeq$, sea $V(A)=V(B)$. Supóngase que $V(A^C)=0$, por VC resultan $V(\neg A)=0$ y $V(A)=0$. Al tener $V(A)=V(B)$ y $V(A)=0$ resulta $V(B)=0$. Como se tiene $V(A)=V(B)$, por $V\neg eq$ se obtiene $V(\neg A)=V(\neg B)$, y como también se tiene $V(\neg A)=0$, se infiere $V(\neg B)=0$. Aplicando VC en $V(B)=0$ y $V(\neg B)=0$ se genera $V(B^C)=0$. Se ha probado de esta manera que $V(A^C)=0 \Rightarrow V(B^C)=0$. De manera similar se prueba la recíproca, por lo que se obtiene $V(A^C)=0 \Leftrightarrow V(B^C)=0$, es decir, $V(A^C)=V(B^C)$.

Para la prueba de $VC\sim$. Por VI se tiene $V(A^I)=1 \Leftrightarrow [V(A)=0$ ó $V(+A)=1]$, por $V\sim$ y $V\neg\sim$ resulta $V(A^I)=1 \Leftrightarrow [V(\sim A)=1$ ó $V(\neg\sim A)=1]$, lo cual por VC significa $V(A^I)=1 \Leftrightarrow V((\sim A)^C)=1$. Por lo tanto, $V(A^I)=V((\sim A)^C)$.

Para la prueba de $VI\sim$. Por VC se tiene $V(A^C)=1 \Leftrightarrow [V(A)=1$ ó $V(\neg A)=1]$, por $V\sim$ y $V+\sim$ resulta $V(A^C)=1 \Leftrightarrow [V(\sim A)=0$ ó $V(+\sim A)=1]$, lo cual por VI significa $V(A^C)=1 \Leftrightarrow V((\sim A)^I)=1$. Por lo tanto, $V(A^C)=V((\sim A)^I)$.

Para la prueba de $V^*\sim$. Por la definición de completez alterna $V(^*A)=1 \Leftrightarrow V(A^I \wedge A^C)=1$, y por $V\wedge$ resulta $V(^*A)=1 \Leftrightarrow [V(A^I)=1$ y $V(A^C)=1]$. Por $VI\sim$ y $VC\sim$ se obtiene $V(^*A)=1 \Leftrightarrow (V((\sim A)^I)=1$ y $V((\sim A)^C)=1)$, lo cual por la definición de completez alterna significa $V(^*A)=1 \Leftrightarrow V(^*\sim A)=1$. Por lo tanto, $V(^*A)=V(^*\sim A)$.

Para la prueba de V^*+. Sea $V(^*A)=1$, por la definición de completez alterna y eliminación de la conjunción resultan $V(A^I)=1$ y $V(A^C)=1$. Si $V((+A)^I)=0$, entonces por VI resultan $V(+A)=1$ y $V(++A)=0$, la última afirmación por $V++$ implica $V(+A)=0$, lo cual no es el caso, por lo que $V((+A)^I)=1$. Supóngase que $V((+A)^C)=0$, entonces por VC resultan $V(+A)=0$ y $V(\neg+A)=0$, la última afirmación por $V\neg+$ implica $V(\neg A)=0$, y puesto que $V(A^C)=1$, por VC se infiere $V(A)=1$, pero como $V(+A)=0$ y $V(A^I)=1$, por VI se infiere $V(A)=0$, lo cual es imposible, por lo tanto, $V((+A)^C)=1$. Se tienen $V((+A)^I)=1$ y $V((+A)^C)=1$, lo cual por $V\wedge$ y la definición de completez alterna implica $V(^*+A)=1$. Se ha probado de esta forma que $V(^*A)=1 \Rightarrow V(^*+A)=1$.

Para probar la recíproca, sea $V({}^{*}{+}A) = 1$. Por la definición de completez alterna y eliminación de la conjunción resultan $V((+A)^I) = 1$ y $V((+A)^C) = 1$. Si $V(A^I) = 0$, entonces por VI resultan $V(A) = 1$ y $V(+A) = 0$, y como además se tiene $V((+A)^C) = 1$ se infiere $V(\neg + A) = 1$, lo cual por $V\neg+$ implica $V(\neg A) = 1$, y por$V\neg$ se obtiene $V(A) = 0$, resultando una contradicción, por lo tanto, $V(A^I) = 1$. Si $V(A^C) = 0$, entonces por VC resultan $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$, la segunda afirmación por $V\neg+$ implica $V(\neg + A) = 0$, y como $V((+A)^C) = 1$, por VC se obtiene $V(+A) = 1$, y por $V+$ se infiere $V(A) = 1$, resultando una contradicción, por lo tanto, $V(A^C) = 1$. Se tienen $V(A^I) = 1$ y $V(A^C) = 1$, lo cual por $V\wedge$ y la definición de completez alterna implica $V({}^{*}A) = 1$. Se ha probado de esta forma que $V({}^{*}{+}A) = 1 \Rightarrow V({}^{*}A) = 1$, y como también se tiene la recíproca, se obtiene $V({}^{*}{+}A) = 1 \Leftrightarrow V({}^{*}A) = 1$. Se concluye finalmente que $V({}^{*}{+}A) = V({}^{*}A)$.

Para la prueba de $V^{*}\neg$. Sea $V({}^{*}A) = 1$, por la definición de completez alterna y eliminación de la conjunción resultan $V(A^I) = 1$ y $V(A^C) = 1$. Si $V((\neg A)^I) = 0$, entonces por VI resultan $V(\neg A) = 1$ y $V(+\neg A) = 0$, la última afirmación por $V + \neg$ implica $V(\neg A) = 0$, lo cual no es el caso, por lo que $V((\neg A)^I) = 1$. Supóngase que $V((\neg A)^C) = 0$, entonces por VC resultan $V(\neg A) = 0$ y $V(\neg\neg A) = 0$, la última afirmación por $V\neg\neg$ implica $V(+A) = 0$, y puesto que $V(A^I) = 1$, por VI se infiere $V(A) = 0$, pero como $V(\neg A) = 0$ y $V(A^C) = 1$, por VC se infiere $V(A) = 1$, lo cual es imposible, por lo tanto, $V((\neg A)^C) = 1$. Se tienen $V((\neg A)^I) = 1$ y $V((\neg A)^C) = 1$, lo cual por $V\wedge$ y la definición de completez alterna implica $V({}^{*}\neg A) = 1$. Se ha probado de esta forma que $V({}^{*}A) = 1 \Rightarrow V({}^{*}\neg A) = 1$.

Para probar la recíproca, sea $V({}^{*}\neg A) = 1$. Por la definición de completez alterna y eliminación de la conjunción resultan $V((\neg A)^I) = 1$ y $V((\neg A)^C) = 1$. Si $V(A^I) = 0$, entonces por VI resultan $V(A) = 1$ y $V(+A) = 0$, la segunda afirmación por $V\neg\neg$ implica $V(\neg\neg A) = 0$, y como además se tiene $V((\neg A)^C) = 1$ se infiere $V(\neg A) = 1$, lo cual por $V\neg$ implica $V(A) = 0$, resultando una contradicción, por lo tanto, $V(A^I) = 1$. Si $V(A^C) = 0$, entonces por VC resultan $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$, y como $V((\neg A)^C) = 1$, por VC se obtiene $V(\neg\neg A) = 1$, lo cual por $V\neg\neg$ implica $V(+A) = 1$, y por $V+$ se infiere $V(A) = 1$, resultando una contradicción, por lo tanto, $V(A^C) = 1$. Se tienen $V(A^I) = 1$ y $V(A^C) = 1$ lo cual por $V\wedge$ y la definición de completez alterna implica $V(^*A) = 1$. Se ha probado de esta forma que $V(^*\neg A) = 1 \Rightarrow V(^*A) = 1$, y como también se tiene la recíproca, se obtiene $V(^*\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(^*A) = 1$. Se concluye finalmente que $V(^*\neg A) = V(^*A)$. $\square$

En la proposición 5.6 se prueba que la semántica presentada caracteriza al sistema deductivo LBVF, para esto se deben garantizar dos puntos, validez y completitud. El primero dice que todos los teoremas del sistema sean válidos, esto se logra con la proposición 4.2. El segundo dice que todos los enunciados válidos sean teoremas, esto se logra con la proposición 5.5. Lo anterior significa que los teoremas del sistema son las fórmulas válidas y solamente ellas.

4 Validez de LBVF

Proposición 4.1 (Validez de los Axiomas)**.** *Los axiomas son válidos.*

Prueba. La validez de los axiomas Ax 0.1, ..., Ax 0.12 es un resultado bien conocido de la LCP, para detalles de las pruebas ver [5].

Supóngase que Ax 1.1 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A \vee \neg A) \rightarrow A^C) = 0$, es decir según $V \rightarrow$, $V(A \vee \neg A) = 1$ y $V(A^C) = 0$. Al ser $V(A^C) = 0$, por VC, se tiene que $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$, pero esto según $V\vee$, significa que $V(A \vee \neg A) = 0$ lo cual es imposible. Por lo tanto, Ax 1.1 es válido.

Supóngase que Ax 1.2 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A \wedge \neg A) \rightarrow B) = 0$, es decir según $V \rightarrow$, $V(A \wedge \neg A) = 1$. Se tiene entonces por $V\wedge$ que $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$. Al ser $V(\neg A) = 1$, de acuerdo a $V\neg$ resulta que $V(A) = 0$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, Ax 1.2 es válido.

Supóngase que Ax 2.1 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A \rightarrow +A) \rightarrow A^I) = 0$, es decir según $V \rightarrow$, $V(A \rightarrow +A) = 1$ y $V(A^I) = 0$. Al ser $V(A^I) = 0$, por VI, se tiene que $V(A) = 1$ y $V(+A) = 0$. Como $V(A \rightarrow +A) = 1$ y $V(A) = 1$, entonces, por $V \rightarrow$ se infiere $V(+A) = 1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, Ax 2.1 es válido.

Supóngase que Ax 2.2 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A^I \rightarrow +A) \rightarrow A) = 0$, por $V \rightarrow$ se obtienen $V(A^I \rightarrow +A) = 1$ y $V(A) = 0$. Como $V(A) = 0$ por $V+$ resulta que $V(+A) = 0$, y como además

$V(A^I \to +A) = 1$, por $V \to$ se infiere $V(A^I) = 0$, y por VI resulta $V(A) = 1$, lo cual contradice el que $V(A) = 0$. Por lo tanto, Ax 2.2 es válido.

Supóngase que Ax 3.1 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A^I \wedge A^C) \to (+A \vee \neg A)) = 0$, por $V \to$ se obtienen $V(A^I \wedge A^C) = 1$ y $V(+A \vee \neg A) = 0$, por $V\wedge$ y $V\vee$ se infieren $V(A^I) = 1$, $V(A^C) = 1$, $V(+A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$. Al tener $V(A^I) = 1$ y $V(+A) = 0$, por VI se obtiene que $V(A) = 0$, pero como $V(A^C) = 1$, por VC resulta que $V(\neg A) = 1$, lo cual es imposible ya que $V(\neg A) = 0$. Por lo tanto, Ax 3.1 es válido.

Por $V^* \sim$de la proposición 3.1, se tiene que para toda valuación v, $V(^*A) = V(^*{\sim}A)$, lo cual por $V \leftrightarrow$ significa $V(^*A \leftrightarrow^* {\sim}A) = 1$. Por lo tanto, Ax 4.1 es válido.

De $V^*\wedge$ se tiene que para toda valuación v, $V(^*(A \wedge B)) = 1 \Leftrightarrow [V(^*A) = 1$ y $V(^*B) = 1]$, lo cual por $V\wedge$ significa $V(^*(A \wedge B)) = 1 \Leftrightarrow V(^*A \wedge^* B) = 1$, y entonces, $V(^*(A \wedge B)) = V(^*A \wedge^* B)$, utilizando $V \leftrightarrow$ se infiere $V(^*(A \wedge B) \leftrightarrow (^*A \wedge^* B)) = 1$. Por lo tanto, Ax 4.2 es válido.

De V^*eq se tiene que para toda valuación v, $V(A) = V(B) \Rightarrow V(^*A) = V(^*B)$, lo cual por $V \leftrightarrow$ significa $V(A \leftrightarrow B) = 1 \Rightarrow V(^*A \leftrightarrow^* B) = 1$, y utilizando $V \to$ se infiere $V((A \leftrightarrow B) \to (^*A \leftrightarrow^* B)) = 1$. Por lo tanto, Ax 4.3 es válido.

Por V^*+ de la proposición 3.1, se tiene que para toda valuación v, $V(^*A) = V(^*{+}A)$, lo cual por $V \leftrightarrow$ significa $V(^*A \leftrightarrow^* +A) = 1$. Por lo tanto, Ax 4.4 es válido.

Por $V^*\neg$ de la proposición 3.1, se tiene que para toda valuación v, $V(^*A) = V(^*\neg A)$, lo cual por $V \leftrightarrow$ significa $V(^*A \leftrightarrow^* \neg A) = 1$. Por lo tanto, Ax 4.5 es válido. □

Proposición 4.2 (Validez). *Todo teorema de LBVF es válido.*

Prueba. Sea A un teorema de LBVF. Se prueba la validez de A, por inducción sobre la longitud de la demostración de A en LBVF.
Para el paso base, supóngase que la demostración de A consta de una sola fórmula, la propia A, entonces A es un axioma de LBVF, y se tiene por la proposición 4.1 que todos los axiomas de LBVF son fórmulas válidas.
Supóngase ahora que la demostración de A contiene n fórmulas, siendo $n > 1$, y supóngase como hipótesis de inducción que todos los teoremas de LBVF que

poseen demostraciones de menos de n pasos son fórmulas válidas. O bien A es un axioma, en cuyo caso A es una fórmula válida, o A se deduce mediante MP de dos fórmulas anteriores en la demostración. Estas dos fórmulas deberían tener las formas B y $B \to A$. Pero B y $B \to A$ son teoremas de LBVF cuyas demostraciones son sucesiones de menos de n fórmulas, así pues, B y $B \to A$ son fórmulas válidas por hipótesis de inducción. Sea v una valuación arbitraria, se tiene entonces que $V(B) = V(B \to A) = 1$, y no puede ocurrir que $V(A) = 0$, ya que al ser $V(B) = 1$, según $V \to$, se tendría que $V(B \to A) = 0$, se concluye que para toda valuación v, $V(A) = 1$, es decir A también es válida.

De esta forma, por el principio de inducción matemática, todo teorema de LBVF es una fórmula válida. □

5 Completitud de LBVF

Una *extensión* de un sistema deductivo se obtiene alterando el conjunto de axiomas de manera que todos los teoremas del sistema sigan siendo teoremas. Una extensión es *consistente* si no existe ninguna fórmula A tal que tanto A como $\sim A$ sean teoremas de la extensión. Una extensión es *completa* si para toda fórmula A, o bien A o bien $\sim A$ es teorema de la extensión.

Proposición 5.1 (Extensión consistente de LBVF)**.**

a. LBVF es consistente.

b. Si E es una extensión de LBVF, A no es teorema de E, y E^* es la extensión de LBVF obtenida añadiendo $\sim A$ como nuevo axioma a E, entonces, E^* es consistente.

Prueba. Supóngase que LBVF no fuese consistente, por lo que debe existir una fórmula A tal que tanto A como $\sim A$ sean teoremas. Entonces por la proposición 4.2, tanto A como $\sim A$ son fórmulas válidas, pero esto es imposible, ya que si $\sim A$ es una fórmula válida, entonces para toda valuación v, $V(\sim A) = 1$, es decir, según la proposición 3.1, $V(A) = 0$, por lo que A no puede ser válida, lo cual no es el caso. Por lo tanto, LBVF es consistente.

Para la parte b, sea A una fórmula LBVF que no es teorema de E, y sea E^* la extensión obtenida añadiendo $\sim A$ como nuevo axioma a E. Supóngase que E^* es inconsistente. Entonces, para alguna fórmula B, tanto B como $\sim B$ son teoremas de E^*. Ahora bien, por la proposición 2.2a se tiene que $B \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$ es teorema de LBVF y por lo tanto de E^*, aplicando dos veces MP se obtiene que A es teorema de E^*. Pero E^* sólo se diferencia de E en que tiene $\sim A$ como axioma adicional, así que 'A es un teorema de E^*' es equivalente a 'A es un teorema de E a partir del conjunto $\{\sim A\}$'. Por el teorema de deducción resulta que $\sim A \rightarrow A$ es un teorema de E. Como por la proposición 2.2b se tiene que $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$ es teorema de LBVF (y por lo tanto de E), entonces utilizando MP, A también teorema de E, lo cual no es el caso. Por lo tanto, E^* es consistente.

En lo que sigue se hará referencia a los siguientes resultados muy conocidos de la lógica clásica CP, y se tienen como consecuencia de la proposición 2.2c (para detalles de las pruebas ver [2] y [3]). *Silogismo disyuntivo:* de $A \vee B$ y $\sim A$ se infiere B, *demostración indirecta:* de $A \rightarrow (B \wedge \sim B)$ resulta $\sim A$, y de $\sim A \rightarrow (B \wedge \sim B)$ se obtiene A, *doble negación:* de A se infiere $\sim\sim A$ y viceversa, *negación de la disyunción:* $\sim(A \vee B)$ y $\sim A \wedge \sim B$ son equivalentes, *negación de la conjunción:* $\sim(A \wedge B)$ y $\sim A \vee \sim B$ son equivalentes, *negación del condicional:* de $\sim(A \rightarrow B)$ se deduce $A \wedge \sim B$ y viceversa, *transposición:* $A \rightarrow B$ implica $\sim B \rightarrow \sim A$ y recíprocamente, *modus tollens MT*: de $A \rightarrow B$ y $\sim B$ se sigue $\sim A$, *implicación material:* $A \rightarrow B$ y $\sim A \vee B$ son equivalentes, *equivalencia material:* $A \leftrightarrow B$ implica $(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$ y recíprocamente, *transposición en la equivalencia:* $A \leftrightarrow B$ y $\sim A \leftrightarrow \sim B$ son equivalentes, *dilema destructivo:* de $\sim B \vee \sim D, A \rightarrow B$ y $C \rightarrow D$ se deduce $\sim A \vee \sim C$. □

Proposición 5.2 (Combinando afirmaciones y negaciones).

a. *Negación alterna de la negación:* $\neg \sim A \leftrightarrow +A$

b. *Afirmación alterna de la negación:* $+ \sim A \leftrightarrow \neg A$

c. *Negación alterna de la negación alterna:* $\neg\neg A \leftrightarrow +A$

d. *Afirmación alterna de la negación alterna:* $+\neg A \leftrightarrow \neg A$

e. *Negación alterna de la afirmación alterna:* $\neg + A \leftrightarrow \neg A$

f. *Afirmación alterna de la afirmación alterna:* $+ + A \leftrightarrow +A$

Prueba.

Para el caso de la negación alterna de la negación, supóngase $\neg\sim A$. Por Ax 1.2 se tiene $(\sim A \wedge \neg\sim A) \rightarrow A$, utilizando conmutatividad, exportación y MP resulta $\sim A \rightarrow A$, lo cual por la proposición 2.2b implica A. De nuevo por Ax 1.2 se tiene $(A \wedge \neg A) \rightarrow \sim\neg A$, y como se tiene A, utilizando exportación y MP resulta $\neg A \rightarrow \sim\neg A$, este resultado, por doble negación y la proposición 2.2b, implica $\sim\neg A$. Al tener $\neg\sim A$, por la proposición 2.1b resulta $(\sim A)^C$. Al tener A, por la proposición 2.2a resulta $\sim A \rightarrow +\sim A$, y como por Ax 2.1 se tiene $(\sim A \rightarrow +\sim A) \rightarrow (\sim A)^I$, entonces se infiere $(\sim A)^I$. De $(\sim A)^I$ y $(\sim A)^C$, por introducción de la conjunción y la definición de completez alterna se obtiene $^*\sim A$. Por Ax 4.1 se tiene $^*A \leftrightarrow {}^*\sim A$, y al tener $^*\sim A$ y Ax 0.10, se infiere $^*A$, lo cual por la definición de completez alterna significa $A^I \wedge A^C$, y como por Ax 3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \rightarrow (+A \vee \neg A)$, entonces se infiere $+A \vee \neg A$. Se tienen $\sim\neg A$ y $+A \vee \neg A$, por silogismo disyuntivo resulta $+A$. Utilizando el teorema de deducción, se concluye $\neg\sim A \rightarrow +A$.

Para la recíproca, supóngase $+A$. Utilizando la proposición 2.1d resulta A^I. Al tener $+A$, utilizando la proposición 2.1e resulta A, como además, por la proposición 2.1a se tiene $A \rightarrow A^C$, entonces se infiere A^C. Por introducción de la conjunción y la definición de completez alterna, de A^I y A^C se obtiene $^*A$. Por Ax 4.1 se tiene $^*A \leftrightarrow {}^*\sim A$, y como se tiene $^*A$, utilizando Ax 0.9, resulta $^*\sim A$, lo cual por la definición de completez alterna implica $(\sim A)^I \wedge (\sim A)^C$, y como por Ax 3.1 se tiene $((\sim A)^I \wedge (\sim A)^C) \rightarrow (+\sim A \vee \neg\sim A)$, entonces se infiere $+\sim A \vee \neg\sim A$. Al tener A, por doble negación se genera $\sim\sim A$, como además por Ax 2.2 se tiene $((\sim A)^I \rightarrow +\sim A) \rightarrow \sim A$, por modus tollens se obtiene $\sim((\sim A)^I \rightarrow +\sim A)$, lo cual por negación del condicional y eliminación de la conjunción implica $\sim+\sim A$. Se tienen $+\sim A \vee \neg\sim A$ y $\sim+\sim A$, por silogismo disyuntivo resulta $\neg\sim A$. Utilizando el teorema de deducción, se concluye $+A \rightarrow \neg\sim A$, y como ya se probó la recíproca, utilizando Ax 0.11, se obtiene $\neg\sim A \leftrightarrow +A$.

Para el caso de la afirmación alterna de la negación, supóngase $+\sim A$. Utilizando la proposición 2.1d resulta $(\sim A)^I$. Al tener $+\sim A$, utilizando la proposición 2.1e resulta $\sim A$, y por la proposición 2.1a se infiere $(\sim A)^C$. Por introducción de la conjunción y la definición de completez alterna, de $(\sim A)^I$ y $(\sim A)^C$ se obtiene $^*\sim A$. Por Ax 4.1 se tiene $^*A \leftrightarrow {}^*\sim A$, y como se tiene $^*\sim A$, utilizando Ax 0.10, resulta $^*A$, lo cual por la definición de completez

alterna implica $A^I \wedge A^C$, y como por Ax 3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \to (+A \vee \neg A)$, entonces se infiere $+A \vee \neg A$. Al tener $\sim A$, como además por Ax 2.2 se tiene $(A^I \to +A) \to A$, por modus tollens se obtiene $\sim(A^I \to +A)$, lo cual por negación del condicional y eliminación de la conjunción implica $\sim +A$. Se tienen $+A \vee \neg A$ y $\sim +A$, por silogismo disyuntivo resulta $\neg A$. Utilizando el teorema de deducción, se concluye $+\sim A \to \neg A$.
Para la recíproca, supóngase $\neg A$. Utilizando la proposición 2.1f se obtiene $\sim A$. Por Ax 1.2 se tiene $(\sim A \wedge \neg \sim A) \to \sim \neg \sim A$, y como se tiene $\sim A$, utilizando exportación y MP resulta $\neg \sim A \to \sim \neg \sim A$, este resultado, por doble negación y la proposición 2.2b, implica $\sim \neg \sim A$. Al tener $\neg A$, por la proposición 2.1b resulta A^C. Al tener $\sim A$, por la proposición 2.2a y doble negación resulta $A \to +A$, y como por Ax 2.1 se tiene $(A \to +A) \to A^I$, entonces se infiere A^I. De A^I y A^C, por introducción de la conjunción y la definición de completez alterna se obtiene $^*A$. Por Ax 4.1 se tiene $^*A \leftrightarrow {}^*\sim A$, y al tener $^*A$ y Ax 0.9, se infiere $^* \sim A$, lo cual por la definición de completez alterna significa $(\sim A)^I \wedge (\sim A)^C$, y como por Ax 3.1 se tiene $((\sim A)^I \wedge (\sim A)^C) \to (+\sim A \vee \neg \sim A)$, entonces se infiere $+\sim A \vee \neg \sim A$. Se tienen $\sim\neg \sim A$ y $+\sim A \vee \neg \sim A$, por silogismo disyuntivo resulta $+\sim A$. Utilizando el teorema de deducción, se concluye $\neg A \to +\sim A$, y como ya se probó la recíproca, utilizando Ax 0.11, se obtiene $+\sim A \leftrightarrow \neg A$.

Para el caso de la negación alterna de la negación alterna, supóngase $\neg\neg A$. Por la proposición 2.1c se infiere $(\neg A)^I$, además al tener $\neg\neg A$, por la proposición 2.1b resulta $(\neg A)^C$, por introducción de la conjunción y la definición de afirmación alterna resulta $^*\neg A$, utilizando Ax 4.5 se infiere $^*A$, es decir $A^I \wedge A^C$, utilizando Ax 3.1 se obtiene $+A \vee \neg A$. Por Ax 1.2 se tiene $(\neg A \wedge \neg\neg A) \to +A$, y al tener $\neg\neg A$, resulta $\neg A \to +A$, además $+A \to +A$ es teorema, por lo que aplicando dilema constructivo se concluye $+A$. Aplicando el teorema de deducción queda probado $\neg\neg A \to +A$.
Para la recíproca, supóngase $+A$, utilizando la proposición 2.1d se infiere A^I. Al tener $+A$, por la proposición 2.1e se obtiene A, lo cual por la proposición 2.1a genera A^C. Por la definición de completez alterna se obtiene $^*A$, y por Ax 4.5 resulta $^*\neg A$, es decir, $(\neg A)^I \wedge (\neg A)^C$, lo cual por Ax 3.1 implica $+\neg A \vee \neg\neg A$. Por Ax 1.2 se tiene $(A \wedge \neg A) \to \neg\neg A$, y como se tiene A, se obtiene $\neg A \to \neg\neg A$, y como de la proposición 2.1e se tiene $+\neg A \to \neg A$, por silogismo hipotético resulta $+\neg A \to \neg\neg A$, y como se tienen $+\neg A \vee \neg\neg A$ y $\neg\neg A \to \neg\neg A$, por dilema constructivo se concluye $\neg\neg A$. Aplicando el teorema de deducción

queda probado $+A \rightarrow \neg\neg A$, y como se tiene la recíproca, por Ax 0.11 se concluye $\neg\neg A \leftrightarrow +A$.

Para el caso de la afirmación alterna de la negación alterna, supóngase $\neg A$, utilizando la proposición 2.1c se obtiene A^I, además de $\neg A$ por la proposición 2.1b se obtiene A^C, por lo que resulta $^*A$, y por Ax 4.5 se genera $^*\neg A$, es decir $(\neg A)^I \wedge (\neg A)^C$, lo cual por Ax 3.1 implica $+\neg A \vee \neg\neg A$, además, al tener $\neg A$, por Ax 1.2 resulta $\neg\neg A \rightarrow +\neg A$, y como se sabe que $+\neg A \rightarrow +\neg A$, por dilema constructivo se concluye $+\neg A$. Por el teorema de deducción se ha probado $\neg A \rightarrow +\neg A$. De la proposición 2.1e se sigue la recíproca, por lo que se concluye que $\neg A \leftrightarrow +\neg A$.

Para el caso negación alterna de la afirmación alterna, supóngase $\neg + A$, por las proposiciones 2.1b y 2.1c resultan $(+A)^I$ y $(+A)^C$, es decir $^* + A$, lo cual por Ax 4.4 significa $^*A$, y por Ax 3.1 se infiere $+A \vee \neg A$, pero al tener $\neg + A$, por la proposición 2.1f se obtiene $\sim + A$, aplicando silogismo disyuntivo en los últimos resultados se concluye $\neg A$. Por el teorema de deducción se ha probado $\neg + A \rightarrow \neg A$.
Para la recíproca, supóngase $\neg A$, por las proposiciones 2.1b y 2.1c resultan A^I y A^C, es decir $^*A$, lo cual por Ax 4.4 significa $^* + A$, es decir $(+A)^I \wedge (+A)^C$, y por Ax 3.1 se infiere $+ + A \vee \neg + A$. Al tener $\neg A$, por la proposición 2.1f se obtiene $\sim A$, aplicando la proposición 2.1e resulta $\sim + A$, y de nuevo por la proposición 2.1e se infiere $\sim + + A$. Aplicando silogismo disyuntivo en $+ + A \vee \neg + A$ y $\sim + + A$ se concluye $\neg + A$. Por el teorema de deducción se ha probado $\neg A \rightarrow \neg + A$. Como se tiene la recíproca, se puede asegurar $\neg A \leftrightarrow \neg + A$.

Para el caso de la afirmación alterna de la afirmación alterna, supóngase que $+A$, por la proposición 2.1d resulta A^I, además, de $+A$ por la proposición 2.1e se obtiene A y por la proposición 2.1a se infiere A^C, de lo anterior se puede afirmar $^*A$, lo cual por Ax 4.4 significa $^* + A$, es decir $(+A)^I \wedge (+A)^C$, y por Ax 3.1 se infiere $+ + A \vee \neg + A$. Al tener $+A$, por la proposición 2.1f se obtiene $\sim\neg + A$, por silogismo disyuntivo en $+ + A \vee \neg + A$ y $\sim\neg + A$ se concluye $+ + A$. Por el teorema de deducción se ha probado $+A \rightarrow + + A$. Por la proposición 2.1e se tiene la recíproca, por lo que se puede asegurar $+A \leftrightarrow + + A$. □

Proposición 5.3 (Extensión consistente y completa). *Sea E una extensión consistente de LBVF. Entonces existe una extensión consistente y completa de E.*

Prueba. Sea $A_0, A_1, A_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de LBVF. Se construye una sucesión J_0, J_1, J_2, ... de extensiones de E como sigue:

Sea $J_0 = E$. Si A_0 es teorema de J_0, sea $J_1 = J_0$. En caso contrario añádase $\sim A_0$ como nuevo axioma para obtener J_1 a partir de J_0.

En general, dado $n \geq 1$, para construir J_n a partir de J_{n-1}, se procede de la siguiente manera: si A_{n-1} es teorema de J_{n-1}, entonces $J_n = J_{n-1}$, en caso contrario, sea J_n la extensión de J_{n-1} obtenida añadiendo $\sim A_{n-1}$ como nuevo axioma.

E es consistente, es decir, J_0 es consistente por hipótesis. Dado $n \geq 1$, si J_{n-1} es consistente, entonces, por la proposición 5.1b, J_n es consistente. Así pues, por inducción, todo J_n es consistente. Se define ahora J, como aquella extensión de E, la cual tiene como axiomas a aquellas fórmulas que son axiomas de al menos uno de los J_n.

Se probará que J es consistente. Supóngase lo contrario. Entonces, existe una fórmula A tal que, tanto A como $\sim A$ son teoremas de J. Ahora bien, las demostraciones de A y $\sim A$ en J son sucesiones finitas de fórmulas, de modo que cada demostración solamente puede contener casos particulares de un número finito de axiomas de J. Por lo que, debe existir un n suficientemente grande, para que todos estos axiomas utilizados sean axiomas de J_n. Se deduce que tanto A como $\sim A$ son teoremas de J_n, lo cual es imposible ya que J_n es consistente. Por lo tanto J es consistente.

Para probar que J es completo, sea A una fórmula de LBVF. A debe aparecer en la lista A_0, A_1, A_2,..., supóngase que A es A_k. Si A_k es teorema de J_k, entonces A_k también es teorema de J, puesto que J es una extensión de J_k. Si A_k no es teorema de J_k, entonces de acuerdo con la construcción de J_{k+1}, $\sim A_k$ es un axioma de J_{k+1}, con lo que $\sim A_k$ es teorema de J_{k+1}, y entonces $\sim A_k$ también es teorema de J. Así, en todo caso se tiene que A_k es teorema de J ó $\sim A_k$ es teorema de J, con lo que J es completo. $\square$

Proposición 5.4 (Construyendo una valuación). *Si E es una extensión consistente de LBVF, entonces existe una valuación en la cual todo teorema de E toma el valor* 1.

Prueba. Se define V sobre las fórmulas de LBVF haciendo: $V(A) = 1$ si $\vdash_J A$, y $V(A) = 0$ si $\vdash_J \sim A$, donde J es una extensión consistente y completa de E, como la dada en la proposición 5.3. Nótese que V es una función, ya que está definida sobre todas las fórmulas, por ser J consistente y completa. Ahora bien, ya que J es consistente, entonces $V(A) \neq V(\sim A)$ y por lo tanto, $V(A) = 1 \Leftrightarrow V(\sim A) = 0$ para toda fórmula A, por lo que se satisface la definición $V\sim$. Para afirmar que V es una valuación, se debe mostrar que, para cada uno de los conectivos, V satisface la definición de valuación.

Para el caso del condicional, utilizando la negación del condicional, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \to B) = 0 \Leftrightarrow \vdash_J \sim(A \to B) \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge \sim B \Leftrightarrow (\vdash_J A \text{ y } \vdash_J \sim B) \Leftrightarrow [V(A) = 1 \text{ y } V(B) = 0]$, por lo que se satisface la definición $V\to$.

Para el caso de la conjunción, utilizando la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge B \Leftrightarrow (\vdash_J A \text{ y } \vdash_J B) \Leftrightarrow [V(A) = 1 \text{ y } V(B) = 1]$, por lo que se satisface la definición $V\wedge$.

Para el caso de la disyunción, utilizando negación de la disyunción e introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow \vdash_J \sim (A \vee B) \Leftrightarrow \vdash_J \sim A \wedge \sim B \Leftrightarrow [\vdash_J \sim A \text{ y } \vdash_J \sim B] \Leftrightarrow [V(A) = 0 \text{ y } V(B) = 0]$, por lo que se satisface la definición $V\vee$.

Para el caso de bicondicional, utilizando equivalencia material, $V\vee$, $V\wedge$ y $V\sim$(ya probadas) e introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash_J (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B) \Leftrightarrow V((A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)) = 1 \Leftrightarrow [V(A \wedge B) = 1 \text{ ó } V(\sim A \wedge \sim B) = 1] \Leftrightarrow [V(A) = V(B) = 1 \text{ ó } (A) = V(B) = 0] \Leftrightarrow V(A) = V(B)$, por lo que se satisface $V\leftrightarrow$.

Para el caso de la determinabilidad. Supóngase que $V(A^C) = 0$, por la definición de V resulta $\vdash_J \sim A^C$, como por Ax 1.1 se tiene $\vdash_J (A \vee \neg A) \to A^C$, entonces por modus tollens se infiere $\vdash_J \sim(A \vee \neg A)$, y por negación de la disyunción y eliminación de la conjunción resultan $\vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim\neg A$, utilizando la definición de V se obtienen $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$. Se ha probado entonces que, $V(A^C) = 0 \Rightarrow (V(A) = 0 \text{ y } V(\neg A) = 0)$.
Para probar la recíproca supóngase que $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$. Por la definición de V resultan $\vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim \neg A$, y como por Ax 2.2 se tiene $\vdash_J (A^I \to +A) \to A$, entonces, por modus tollens resulta $\vdash_J \sim(A^I \to +A)$, lo cual por negación del condicional y eliminación de la conjunción genera $\vdash_J A^I$ y $\vdash_J \sim +A$. Al tener $\vdash_J \sim \neg A$ y $\vdash_J \sim +A$, por introducción de la conjunción y negación de la disyunción se obtiene $\vdash_J \sim(+A \vee \neg A)$, y como por Ax 3.1 se tiene $\vdash_J (A^I \wedge A^C) \to (+A \vee \neg A)$, entonces por modus tollens se infiere

$\vdash_J\sim(A^I \wedge A^C)$, lo cual por negación de la conjunción significa $\vdash_J\sim A^I\vee \sim A^C$, y como también se tiene $\vdash_J A^I$, por silogismo disyuntivo se obtiene $\vdash_J\sim A^C$, lo cual, por la definición de V significa, $V(A^C) = 0$. Por lo tanto, $(V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0) \Rightarrow V(A^C) = 0$.
Se ha probado entonces que $V(A^C) = 0 \Leftrightarrow [V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0]$, por lo que se satisface la definición VC.

Para el caso de la primera negación alterna, supóngase que $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$. Por la definición de V resultan $\vdash_J A$ y $\vdash_J \neg A$, y por introducción de la conjunción se infiere $\vdash_J A \wedge \neg A$. Por Ax 1.2 se tiene $\vdash_J (A \wedge \neg A) \rightarrow\sim A$, y por modus ponens resulta $\vdash_J\sim A$, lo cual es imposible ya que $\vdash_J A$ y J es consistente. Por lo tanto, $V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0$, por lo que se satisface la definición $V\neg$.

Para el caso de la incompatibilidad. Supóngase que $V(A^I) = 0$, por la definición de V resulta $\vdash_J\sim A^I$, y como por Ax 2.1 se tiene $\vdash_J (A \rightarrow +A) \rightarrow A^I$, entonces, por modus tollens se infiere $\vdash_J\sim(A \rightarrow +A)$, por negación del condicional y eliminación de la conjunción se obtienen $\vdash_J A$ y $\vdash_J\sim+A$, finalmente por la definición de V se concluyen $V(A) = 1$ y $V(+A) = 0$. De esta forma, se ha probado que $V(A^I) = 0 \Rightarrow [V(A) = 1$ y $V(+A) = 0]$.
Para probar la recíproca supóngase que $V(A) = 1$ y $V(+A) = 0$, pero que $V(A^I) = 1$. Por la definición de V resultan $\vdash_J A$, $\vdash_J\sim +A$ y $\vdash_J A^I$, Por la proposición 2.1a se tiene $\vdash_J A \rightarrow A^C$, por lo que se infiere $\vdash_J A^C$, y por introducción de la conjunción resulta $\vdash_J A^I \wedge A^C$. Por Ax 3.1 se tiene $\vdash_J (A^I \wedge A^C) \rightarrow (+A \vee \neg A)$, y como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\vdash_J +A\vee\neg A$, como además se tiene $\vdash_J\sim+A$, por silogismo disyuntivo se obtiene $\vdash_J \neg A$, y por introducción de la conjunción resulta $\vdash_J A\wedge\neg A$. Por Ax 1.2 se tiene $\vdash_J (A \wedge \neg A) \rightarrow\sim\neg A$, y como se tiene $\vdash_J A \wedge \neg A$, entonces resulta $\vdash_J\sim\neg A$, y como también se tiene $\vdash_J \neg A$, resulta que J es inconsistente, lo cual no es el caso. Por lo tanto, $[V(A) = 1$ y $V(+A) = 0] \Rightarrow V(A^I) = 0$.
Se ha probado entonces que, $V(A^I) = 0 \Leftrightarrow [V(A) = 1$ y $V(+A) = 0]$, por lo que se satisface la definición VI.

Para el caso de la afirmación alterna, supóngase que $V(A) = 0$. Por la definición de V resulta $\vdash_J\sim A$, y como por Ax 2.2 se tiene $\vdash_J (A^I \rightarrow +A) \rightarrow A$, utilizando modus tollens resulta $\vdash_J\sim(A^I \rightarrow +A)$, y por negación del condicional y eliminación de la conjunción se infiere $\vdash_J\sim +A$.

Por la definición de V resulta $V(+A)=0$. Se tiene entonces que $V(A)=0 \Rightarrow V(+A)=0$, es decir, $V(+A)=1 \Rightarrow V(A)=1$, por lo que se satisface la definición $V+$.

Para el caso de la completez alterna en la equivalencia, supóngase que $V(A)=V(B)$, por lo que $V(A)=V(B)=1$ ó $V(A)=V(B)=0$. En el primer caso, por la definición de V resultan $\vdash_J A$ y $\vdash_J B$, utilizando Ax 0.1 se infieren $\vdash_J B \rightarrow A$ y $\vdash_J A \rightarrow B$, aplicando Ax 0.11 resulta $\vdash_J A \leftrightarrow B$. En el segundo caso, por la definición de V resultan $\vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim B$, por la proposición 2.2a se tienen $\vdash_J A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$ y $\vdash_J B \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$, los cuales por exportación y conmutatividad, equivalen a $\vdash_J \sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$ y $\vdash_J \sim B \rightarrow (B \rightarrow A)$, y como se tienen los antecedentes, entonces, se infieren los consecuentes $\vdash_J A \rightarrow B$ y $\vdash_J B \rightarrow A$, aplicando Ax 0.11 resulta $\vdash_J A \leftrightarrow B$. De esta manera en ambos casos se obtiene $\vdash_J A \leftrightarrow B$, y como por Ax 4.3 se tiene $\vdash_J (A \leftrightarrow B) \rightarrow ({}^*A \leftrightarrow^* B)$, entonces se infiere $\vdash_J^* A \leftrightarrow^* B$, lo cual, por la definición de V significa $V({}^*A \leftrightarrow^* B)=1$, finalmente, utilizando $V \leftrightarrow$ (ya probado) se concluye que, $V({}^*A)=V({}^*B)$. Se ha probado de esta forma que $V(A)=V(B) \Rightarrow V({}^*A)=V({}^*B)$, por lo que se satisface la definición V^*eq.

Para el caso de la completez alterna de la conjunción, por la definición de V, $V({}^*(A \wedge B))=1 \Leftrightarrow \vdash_J^* (A \wedge B)$, y puesto que por Ax 4.2 se tiene $\vdash_J^* (A \wedge B) \leftrightarrow ({}^*A \wedge^* B)$, resulta $V({}^*(A \wedge B))=1 \Leftrightarrow \vdash_J^* A \wedge^* B$, por introducción y eliminación de la conjunción se obtiene $V({}^*(A \wedge B))=1 \Leftrightarrow [\vdash_J^* A$ y $\vdash_J^* B]$, lo cual por la definición de V significa $V({}^*(A \wedge B))=1 \Leftrightarrow [V({}^*A)=1$ y $V({}^*B)=1]$, por lo que se satisface la definición $V^*\wedge$.

Para el caso de la afirmación alterna de la negación, por la definición de V se tiene $V(+\sim A)=1 \Leftrightarrow \vdash_J +\sim A$, y como por la proposición 5.2b se tiene $\vdash_J +\sim A \leftrightarrow \neg A$, entonces resulta $V(+\sim A)=1 \Leftrightarrow \vdash_J \neg A$, lo cual por la definición de V significa $V(+\sim A)=1 \Leftrightarrow V(\neg A)=1$, es decir $V(+\sim A)=V(\neg A)$, por lo que se satisface la definición $V+\sim$.

Para el caso de la negación alterna de la negación, por la definición de V se tiene $V(\neg\sim A)=1 \Leftrightarrow \vdash_J \neg\sim A$, y como por la proposición 5.2a se tiene $\vdash_J \neg\sim A \leftrightarrow +A$, entonces resulta $V(\neg\sim A)=1 \Leftrightarrow \vdash_J +A$, lo cual por la definición de V significa $V(\neg\sim A)=1 \Leftrightarrow V(+A)=1$, es decir $V(\neg\sim A)=V(+A)$, por lo que se satisface la definición $V\neg\sim$.

Para el caso de la afirmación alterna de la negación alterna, por la definición de V se tiene $V(+\neg A)=1 \Leftrightarrow \vdash_J +\neg A$, y como por la proposición

5.2d se tiene $\vdash_J +\neg A \leftrightarrow \neg A$, entonces resulta $V(+\neg A) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J \neg A$, lo cual por la definición de V significa $V(+\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(\neg A) = 1$, es decir $V(+\neg A) = V(\neg A)$, por lo que se satisface la definición $V + \neg$.

Para el caso de la negación alterna de la negación alterna, por la definición de V se tiene $V(\neg\neg A) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J \neg\neg A$, y como por la proposición 5.2c se tiene $\vdash_J \neg\neg A \leftrightarrow +A$, entonces resulta $V(\neg\neg A) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J +A$, lo cual por la definición de V significa $V(\neg\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(+A) = 1$, es decir $V(\neg\neg A) = V(+A)$, por lo que se satisface la definición $V\neg\neg$.

Para el caso de la afirmación alterna de la afirmación alterna, por la definición de V se tiene $V(+ + A) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J + + A$, y como por la proposición 5.2f se tiene $\vdash_J + + A \leftrightarrow +A$, entonces resulta $V(+ + A) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J +A$, lo cual por la definición de V significa $V(+ + A) = 1 \Leftrightarrow V(+A) = 1$, es decir $V(+ + A) = V(+A)$, por lo que se satisface la definición $V + +$.

Para el caso de la negación alterna de la afirmación alterna, por la definición de V se tiene $V(\neg + A) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J \neg + A$, y como por la proposición 5.2e se tiene $\vdash_J \neg + A \leftrightarrow \neg A$, entonces resulta $V(\neg + A) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J \neg A$, lo cual por la definición de V significa $V(\neg + A) = 1 \Leftrightarrow V(\neg A) = 1$, es decir $V(\neg + A) = V(\neg A)$, por lo que se satisface la definición $V\neg+$.

Con base en el análisis anterior se concluye finalmente que V es una valuación.

Para finalizar la prueba, sea A un teorema de E, por lo que $\vdash_J A$. Por lo tanto, utilizando la definición de V resulta que $V(A) = 1$. □

Proposición 5.5 (Completitud)**.** *Las fórmulas válidas de LBVF son teoremas*[4]*.*

Prueba. Sea A una fórmula de LBVF. Si A no es un teorema, entonces, por la proposición 5.1b, la extensión E, obtenida añadiendo $\sim A$ como nuevo axioma, es consistente. Así pues, según la proposición 5.4, existe una valuación V que da a todo teorema de E el valor 1, y como $\sim A$ es un teorema de E entonces, $V(\sim A) = 1$, es decir, $V(A) = 0$, y por lo tanto, A no es válida. Se ha probado de esta forma que, si A no es un teorema entonces A no es válida, o dicho de otra manera, si A es válida entonces A es un teorema. □

[4]En la prueba de completitud se han seguido las directrices dadas por Henkin en [6], para probar la completitud de la lógica de primer orden.

Proposición 5.6 (Caracterización semántica). *Si A es una fórmula de LBVF, entonces, A es válida si y solamente si A es un teorema.*

Prueba. consecuencia de las proposiciones 5.5 y 4.2. □

6 Operadores de completez

En [7] Grana muestra que, un sistema deductivo es *paracompleto respecto al operador de negación* $-$, si existe una fórmula y una valuación tal que tanto la fórmula como su negación son falsas. Por lo que, para probar que un sistema es *paracompleto respecto al operador* $-$, basta probar que no tiene como teorema la fórmula $A \vee -A$, es decir que $A \vee -A$ no es válida. Generalizando la noción anterior se tiene: si θ_1 es un operador monádico de afirmación y θ_2 es un operador monádico de negación, entonces se dice que un sistema deductivo es paracompleto respecto a θ_1 y θ_2, si existe alguna fórmula B y alguna valuación v tal que, $V(\theta_1 B) = V(\theta_2 B) = 0$. Para el caso de LBVF se consideran 3 casos de paracompletez: el primero respecto a la afirmación usual (o clásica) y a la negación alterna, el segundo respecto a la afirmación alterna y a la negación usual, y el tercero respecto a la afirmación alterna y a la negación alterna; resultando que el sistema es paracompleto en los tres casos. Lo anterior significa que las fórmulas $A \vee \neg A, +A \vee \sim A$ y $+A \vee \neg A$ no son teoremas.

Proposición 6.1 (Paracompletez de LBVF). *.El sistema LBVF es paracompleto respecto a las siguientes parejas de operadores:*

a. Negación alterna y afirmación clásica

b. Afirmación alterna y negación clásica

c. Afirmación alterna y negación alterna

Prueba. Sea A una fórmula atómica. La función v_1, tal que $V_1(A) = V_1(\neg A) = V_1(+\sim A) = V_1(+A) = V_1(\neg \sim A) = V_1(A^C) = V_1((\sim A)^I) = V_1({}^*A) = V_1({}^*{\sim} A) = 0$ y $V_1(A^I) = V_1(\sim A) = V_1((\sim A)^C) = 1$, satisface los requisitos de la definición de valuación (y de la proposición 3.1), y por lo tanto, al ser $V_1(A) = V_1(\neg A) = 0$, el sistema es paracompleto respecto a los operadores negación alterna y afirmación clásica, y al ser $V_1(\neg A) = V_1(+A) = 0$, el sistema es paracompleto respecto a los operadores negación alterna y afirmación alterna.

Sea A una fórmula atómica. La función v_2, tal que $V_2(+A) = V_2(\neg A) = V_2(^*A) = V_2(A^I) = V_2(\sim A) = V_2(\neg \sim A) = V_2(+ \sim A) = V_2(^*\!\sim A) = V_2((\sim A)^C) = 0$ y $V_2(A) = V_2(A^C) = V_2((\sim A)^I) = 1$, satisface los requisitos de la definición de valuación (y de la proposición 3.1), y por lo tanto, al ser $V_2(\sim A) = V_2(+A) = 0$, el sistema es paracompleto respecto a los operadores negación clásica y afirmación alterna. □

Proposición 6.2 (Completez respecto a la afirmación clásica y a la negación alterna)**.**

a. $A^C \leftrightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$

b. $\neg A \rightarrow \sim A$

c. $\sim A$ *no implica* $\neg A$

Prueba. Para la parte a, supóngase A^C y $\sim A$. Por Ax 2.2 se tiene $(A^I \rightarrow +A) \rightarrow A$, y como se tiene $\sim A$, por modus tollens y negación del condicional se infiere $A^I \wedge \sim +A$, lo cual por eliminación de la conjunción genera A^I y $\sim +A$. Por Ax 3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \rightarrow (+A \vee \neg A)$, pero al tener A^C y A^I, por introducción de la conjunción resulta $A^I \wedge A^C$, por lo que se infiere $+A \vee \neg A$, pero como se tiene $\sim +A$, por silogismo disyuntivo se deduce $\neg A$. Aplicando dos veces el teorema de deducción se concluye que $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$. Para la recíproca, por Ax 1.1 se tiene $(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$, utilizando doble negación e implicación material resulta $(\sim A \rightarrow \neg A) \rightarrow A^C$. Se han probado $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$ y $(\sim A \rightarrow \neg A) \rightarrow A^C$, utilizando Ax 0.11 se infiere $A^C \leftrightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$. La parte b, es la proposición 2.1f.
La parte c es consecuencia de la proposición 6.1a. □

Proposición 6.3 (Completez respecto a la negación clásica y a la afirmación alterna)**.**

a. $A^I \leftrightarrow (A \rightarrow +A)$

b. $+A \rightarrow A$

c. A *no implica* $+A$

d. $(+A)^I$

e. $(\neg A)^I$

Prueba. Para la parte a, supóngase A^I y A. Por la proposición 2.1a se tiene $A \rightarrow A^C$, y como se tiene A, se infiere A^C. Por introducción de la conjunción se obtiene $A^I \wedge A^C$, por Ax 3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \rightarrow (+A \vee \neg A)$, por lo que se infiere $+A \vee \neg A$. Por la proposición 6.2b se tiene $\neg A \rightarrow \sim A$, y como se tiene A, por modus tollens se obtiene $\sim\neg A$. Al tener $+A \vee \neg A$ y $\sim\neg A$, por silogismo disyuntivo se deduce $+A$. Aplicando dos veces el teorema de deducción resulta $A^I \rightarrow (A \rightarrow +A)$. Además, por Ax 2.1 se tiene la recíproca $(A \rightarrow +A) \rightarrow A^I$, y utilizando Ax 0.11 se infiere $A^I \leftrightarrow (A \rightarrow +A)$.La parte b, es la proposición 2.1e.
Para las partes d y e, observar que de la proposición 5.2 partes d y f resultan $+A \rightarrow ++A$ y $\neg A \rightarrow +\neg A$, y utilizando la proposición 6.3a se obtienen $(+A)^I$ y $(\neg A)^I$.
La parte c es consecuencia de la proposición 6.1b. □

Proposición 6.4 (Completez respecto a la afirmación alterna y a la negación alterna)**.**

a. $\sim(\neg A \wedge +A)$

b. $\neg A \vee +A$ *no es un teorema*

c. $^*A \leftrightarrow (+A \vee \neg A)$

Prueba.

Para la parte a, supóngase $\neg A \wedge +A$. Por eliminación de la conjunción resulta $+A$, y por la proposición 6.3b, se tiene $+A \rightarrow A$, por lo que se infiere A. Por introducción de la conjunción se obtiene $A \wedge \neg A$, y como por Ax 1.2 se tiene que $(A \wedge \neg A) \rightarrow \sim A$ entonces se infiere $\sim A$, y como también se tiene A, entonces por introducción de la conjunción se deduce $A \wedge \sim A$. Utilizando el teorema de deducción se infiere $(\neg A \wedge +A) \rightarrow (A \wedge \sim A)$, aplicando demostración indirecta se concluye $\sim(\neg A \wedge +A)$.

La parte b es consecuencia de la proposición 6.1c.

Para la parte c, por Ax 3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \to (+A \vee \neg A)$, utilizando la definición de completez alterna resulta $^*A \to (+A \vee \neg A)$.
Para la recíproca. Supóngase $\neg A$, por la proposición 2.1b se tiene $\neg A \to A^C$, por lo que resulta A^C. De la proposición 6.2b se tiene $\neg A \to\sim A$, por lo que resulta $\sim A$, y por Ax 0.3 se infiere $\sim A \vee +A$, lo cual por implicación material significa $A \to +A$, lo cual por la proposición 6.3a equivale a A^I. Por introducción de la conjunción se obtiene $A^I \wedge A^C$, lo cual por la definición de completez alterna es $^*A$. Por el teorema de deducción se concluye $\neg A \to^* A$. Por otro lado, por la proposición 2.1d se tiene $+A \to A^I$. Por la proposición 6.3b se tiene $+A \to A$, y por la proposición 2.1a se tiene $A \to A^C$, utilizando silogismo hipotético resulta $+A \to A^C$. Se tienen $+A \to A^I$ y $+A \to A^C$, al suponer $+A$, por MP, introducción de la conjunción y el teorema de deducción se obtiene $+A \to (A^I \wedge A^C)$, lo cual por la definición de completez alterna es $+A \to^* A$. Se tienen $+A \to^* A$ y $\neg A \to^* A$, por disyunción en el antecedente, se sigue $(+A \vee \neg A) \to^* A$.
Se han probado $^*A \to (+A \vee \neg A)$ y $(+A \vee \neg A) \to^* A$, por Ax 0.11 se concluye $^*A \leftrightarrow (+A \vee \neg A)$. □

Proposición 6.5 (Preservación de la equivalencia). [5]

a. $(A \leftrightarrow B) \to (+A \leftrightarrow +B)$

b. $(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \leftrightarrow \neg B)$

c. $(A \leftrightarrow B) \to (A^I \leftrightarrow B^I)$

d. $(A \leftrightarrow B) \to (A^C \leftrightarrow B^C)$

Prueba. Para todos los casos, supóngase que $A \leftrightarrow B$, por lo que según Ax 4.3 resulta $^*A \leftrightarrow^* B$. Para el caso de la afirmación alterna, supóngase $+A$, por introducción de la disyunción resulta $+A \vee \neg A$, y por la proposición 6.4c se obtiene $^*A$, y al tener $^*A \leftrightarrow^* B$, se infiere $^*B$, y de nuevo por la proposición 6.4c resulta $+B \vee \neg B$. Al tener $+A$, por la proposición 2.1e resulta A, y como se tiene $A \leftrightarrow B$, se deduce B, y por la proposición 2.1f se obtiene $\sim\neg B$, aplicando silogismo disyuntivo se concluye $+B$. Por el teorema de deducción se ha probado $+A \to +B$, la recíproca se prueba de igual manera.

[5]De esta proposición se tiene como consecuencia que en LBVF vale sustitución por equivalencia. Ver nota al pie en la proposición 3.1.

Para el caso de la negación alterna, supóngase $\neg A$, por introducción de la disyunción resulta $+A \vee \neg A$, y por la proposición 6.4c se obtiene $^*A$, y al tener $^*A \leftrightarrow ^* B$, se infiere $^*B$, y de nuevo por la proposición 6.4c resulta $+B \vee \neg B$. Al tener $\neg A$, por la proposición 2.1f resulta $\sim A$, y como se tiene $A \leftrightarrow B$, se deduce $\sim B$, y por la proposición 2.1e se obtiene $\sim +B$, aplicando silogismo disyuntivo se concluye $\neg B$. Por el teorema de deducción se ha probado $\neg A \rightarrow \neg B$, la recíproca se prueba de igual manera.

Para el caso de la incompatibilidad, supóngase $\sim A^I$, por la proposición 6.3a se obtienen A y $\sim +A$, y al tener $A \leftrightarrow B$ se infiere B, y como se probó más arriba, también resulta $+A \leftrightarrow +B$, por lo que se infiere $\sim +B$. Al tener B y $\sim +B$, por negación del condicional y la proposición 6.3a se obtiene $\sim B^I$. Por el teorema de deducción y transposición se concluye $B^I \rightarrow A^I$, la recíproca se prueba de igual manera.

Para el caso de la completez, supóngase $\sim A^C$, por la proposición 6.2a se obtienen $\sim A$ y $\sim \neg A$, y al tener $A \leftrightarrow B$ se infiere $\sim B$, y como se probó más arriba, también resulta $\neg A \leftrightarrow \neg B$, por lo que se infiere $\sim \neg B$. Al tener $\sim B$ y $\sim \neg B$, por negación del condicional y la proposición 6.2a se obtiene $\sim B^C$. Por el teorema de deducción y transposición se concluye $B^C \rightarrow A^C$, la recíproca se prueba de igual manera. $\square$

Proposición 6.6 (* con los conectivos)**.**

a. $^*(A \rightarrow B) \leftrightarrow (^*A \wedge ^* B)$

b. $^*(A \vee B) \leftrightarrow (^*A \wedge ^* B)$

c. $^*(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (^*A \wedge ^* B)$

Prueba.

Para la parte a, por negación de la conjunción, doble negación e implicación material, se obtiene $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$, utilizando Ax 4.3 resulta $^*(A \rightarrow B) \leftrightarrow ^*\sim (A \wedge \sim B)$, por Ax 4.1 se deduce $^*(A \rightarrow B) \leftrightarrow ^*(A \wedge \sim B)$, por Ax 4.2 se infiere $^*(A \rightarrow B) \leftrightarrow (^*A \wedge ^* \sim B)$, y de nuevo por Ax 4.1 se concluye $^*(A \rightarrow B) \leftrightarrow (^*A \wedge ^* B)$.

Para la parte b, por negación de la conjunción y doble negación, se obtiene $(A \vee B) \leftrightarrow \sim(\sim A \wedge \sim B)$, utilizando Ax 4.3 resulta $^*(A \vee B) \leftrightarrow ^*\sim(\sim A \wedge \sim B)$, por Ax 4.1 se deduce $^*(A \vee B) \leftrightarrow^* (\sim A \wedge \sim B)$, por Ax 4.2 se infiere $^*(A \vee B) \leftrightarrow (^*\sim A \wedge^* \sim B)$, y de nuevo por Ax 4.1 se concluye $^*(A \vee B) \leftrightarrow (^*A \wedge^* B)$.

Para la parte c, de Ax 0.10, Ax 0.11 y Ax 0.12, se obtiene $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]$, utilizando Ax 4.3 resulta $^*(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow^* [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]$, por Ax 4.2 se deduce $^*(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [^*(A \rightarrow B) \wedge^* (B \rightarrow A)]$, por la parte a, se infiere $^*(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (^*A \wedge^* B)$. □

7 Verdad y falsedad aristotélicas

En el libro IV de la Metafísica [1], Aristóteles define el concepto de verdad de la siguiente manera "decir de *lo que es* que es, y de lo *que no es* que no es, es *lo verdadero*; decir de *lo que es* que no es, y de *lo que no es* que es, es *lo falso*". Con el sistema LBVF se puede modelar esta definición interpretando $+X$ como 'X es verdadero', $\neg X$ como 'X es falso', $^*X$ como 'decir X', X como 'X es' y $\sim X$ como 'X no es'. La definición de *verdad aristotélica* estaría codificada por la fórmula $(A \wedge^* A) \leftrightarrow +A$, y la definición de *falsedad aristotélica* estaría codificada por la fórmula $(\sim A \wedge^* A) \leftrightarrow \neg A$.

Proposición 7.1 (Verdad y falsedad aristotélica)**.**

a. $(A \wedge^* A) \leftrightarrow +A$

b. $(\sim A \wedge^* A) \leftrightarrow \neg A$

Prueba. Supóngase $A \wedge^* A$. Por eliminación de la conjunción se obtienen A y $^*A$. Al tener A, por la proposición 6.2b, se infiere $\sim\neg A$. Al tener $^*A$, por la proposición 6.4c, resulta $+A \vee \neg A$. Aplicando silogismo disyuntivo en estos dos resultados se obtiene $+A$. Por el teorema de deducción se ha probado $(A \wedge^* A) \rightarrow +A$. Por Ax 0.3 se tiene $+A \rightarrow (+A \vee \neg A)$, lo cual por la proposición 6.4c significa $+A \rightarrow^* A$. Por la proposición 6.3b se tiene $+A \rightarrow A$. De estos dos resultados, utilizando Ax 0.8 se obtiene $+A \rightarrow (A \wedge^* A)$. Como se tienen $(A \wedge^* A) \rightarrow +A$ y $+A \rightarrow (A \wedge^* A)$, utilizando Ax 0.11 se infiere $(A \wedge^* A) \leftrightarrow +A$.

Para la parte b, supóngase $\sim A \wedge^* A$. Por eliminación de la conjunción se obtienen $\sim A$ y $^*A$. Al tener $\sim A$, por la proposición 6.3b, se infiere $\sim +A$. Al tener $^*A$, por la proposición 6.4c, resulta $+A \vee \neg A$. Aplicando silogismo disyuntivo en estos dos resultados se obtiene $\neg A$. Por el teorema de deducción se ha probado $(\sim A \wedge^* A) \to \neg A$. Por Ax 0.4 se tiene $\neg A \to (+A \vee \neg A)$, lo cual por la proposición 6.4c significa $\neg A \to^* A$. Por la proposición 2.1f se tiene $\neg A \to \sim A$. De estos dos resultados, utilizando Ax 0.8 se obtiene $\neg A \to (\sim A \wedge^* A)$. Como se tienen $(\sim A \wedge^* A) \to \neg A$ y $\neg A \to (\sim A \wedge^* A)$, utilizando Ax 0.11 se infiere $(\sim A \wedge^* A) \leftrightarrow \neg A$. □

En [8] se presenta el sistema deductivo LBVA, *Lógica Básica para la Verdad Aristotélica*, como una extensión del CPC, *Calculo Proposicional Clásico* (axiomatizado por Ax 0.1,..., Ax 0.12, proposiciones 3.1 y 4.1, y como regla de inferencia se tiene modus ponens), adicionando los axiomas Ax VA: $(A \wedge^* A) \leftrightarrow +A$ y Ax FA: $(\sim A \wedge^* A) \leftrightarrow \neg A$, y definiendo $A^I = A \to +A$, $A^C = \sim A \to \neg A$.

Con base en la anterior definición, la proposición 7.1 indica que los axiomas de LBVA son derivables en LBVF, y por lo tanto, los teoremas de LBVA también son derivables en LBVF, es decir, LBVF es una extensión de LBVA.

En la tabla 1 se presentan algunos teoremas de la LBVF asociados a la semántica bivalente del cálculo proposicional clásico. Por ejemplo, para el caso de la conjunción se sabe que: 'una conjunción es falsa (en el sentido clásico) si y solo si al menos uno de los coyuntos es falso (en el sentido clásico)', mientras que en el sentido Aristotélico extendido no se tiene esta equivalencia[6]

Tabla 1: Teoremas

Verdad y falsedad de la conjunción	No es teorema	$(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$
	Teoremas	$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ $^*(A \wedge B) \to [(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)]$ $(A \wedge B)^C \to [(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)]$
		$(^*A \wedge^* B) \to [\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ $(A \wedge B)^C \to [\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ $+(A \wedge B) \leftrightarrow (+A \wedge +B)$

[6]Desde este punto de vista, el operador de completez alterna '$*$' puede ser interpretado como *'tiene un valor de verdad', 'es una proposición', 'está bien fundamentado'*, el operador de afirmación alterna '$+$' puede ser interpretado como *'el valor de verdad es 1 (verdadero)', 'es una proposición verdadera'*, y el operador de negación alterna '$\neg$' puede ser interpretado como *'el valor de verdad es* 0 *(falso)', 'es una proposición falsa'*.

Verdad y falsedad de la disyunción	No es teorema	$(+A \vee +B) \rightarrow +(A \vee B)$
	Teoremas	$+(A \vee B) \rightarrow (+A \vee +B)$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [(+A \vee +B) \rightarrow +(A \vee B)]$
		$(A \vee B)^I \rightarrow [(+A \vee +B) \rightarrow +(A \vee B)]$
		$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [+(A \vee B) \leftrightarrow (+A \vee +B)]$
		$(A \vee B)^I \rightarrow [+(A \vee B) \leftrightarrow (+A \vee +B)]$

Verdad y falsedad del condicional	No son teoremas	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
		$(A \rightarrow +B) \rightarrow +(A \rightarrow B)$
	Teoremas	$\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$
		$+(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow +B)$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$
		$(A \rightarrow B)^C \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [(A \rightarrow +B) \rightarrow +(A \rightarrow B)]$
		$(A \rightarrow B)^I \rightarrow [(A \rightarrow +B) \rightarrow +(A \rightarrow B)]$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)]$
		$(A \rightarrow B)^C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)]$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [+(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow +B)]$
		$(A \rightarrow B)^I \rightarrow [(A \rightarrow +B) \leftrightarrow +(A \rightarrow B)]$

Verdad y falsedad del condicional	No son teoremas	$(+A \rightarrow +B) \rightarrow +(A \rightarrow B)$
		$\sim(+A \wedge \neg B) \rightarrow +(A \rightarrow B)$
	Teoremas	$+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [(+A \rightarrow +B) \rightarrow +(A \rightarrow B)]$
		$+(A \rightarrow B) \rightarrow \sim(+A \wedge \neg B)$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [\sim(+A \wedge \neg B) \rightarrow +(A \rightarrow B)]$
		$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (+A \wedge \neg B)$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [+(A \rightarrow B) \leftrightarrow (+A \rightarrow +B)]$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [+(A \rightarrow B) \leftrightarrow \sim(+A \wedge \neg B)]$

Verdad y falsedad de la negación	No es teorema	$A \rightarrow \neg\neg A$
	Teoremas	$\neg \sim A \leftrightarrow +A$
		$+ \sim A \leftrightarrow \neg A$
		$\neg\neg A \rightarrow A$
		${}^*A \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$
		$(\neg A)^C \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$
		$(\neg A)^C \rightarrow (\neg\neg A \leftrightarrow A)$
		${}^*A \rightarrow (A \leftrightarrow \neg\neg A)$

Verdad y falsedad de la falsedad	Teoremas	$\neg\neg A \leftrightarrow +A$ $\neg A \leftrightarrow +\neg A$

Verdad y falsedad de la verdad	Teoremas	$\neg A \leftrightarrow \neg + A$ $+A \leftrightarrow + + A$

Verdad de la falsedad y falsedad de la verdad	Teorema	$+\neg A \leftrightarrow \neg + A$

Silogismo disyuntivo	No son Teoremas	$(A \vee B) \rightarrow (\sim B \rightarrow +A)$
	Teoremas	$+(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow +B)$ $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ $A^I \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\sim B \rightarrow +A)]$

Implicación material	No son Teoremas	$(\neg A \vee +B) \rightarrow +(A \rightarrow B)$ $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B)$
	Teoremas	$+(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee +B)$ $({}^*A \wedge {}^* B) \rightarrow [(\neg A \vee +B) \rightarrow +(A \rightarrow B)]$ $A^C \rightarrow [(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B)]$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [+(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee +B)]$ $A^C \rightarrow [(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)]$

Modus tollens y transposición	No son Teoremas	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow +(A \rightarrow B)$ $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
	Teoremas	$+(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ $[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow +(A \rightarrow B)]$ $A^C \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ $B^C \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$ ${}^*A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ ${}^*B \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$
		$[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [+(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ $(B^C \wedge A^C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ $[{}^*A \wedge {}^* B] \rightarrow [(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$

Reducción al absurdo	No son Teoremas	$[(+A \to +B) \wedge (+A \to \neg B)] \to \neg A$
		$[(\neg A \to +B) \wedge (\neg A \to \neg B)] \to +A$
		$[(A \to B) \wedge (A \to \neg B)] \to \neg A$
		$[(\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)] \to A$
	Teoremas	$*A \to ([(+A \to +B) \wedge (+A \to \neg B)] \to \neg A)$
		$*A \to ([(\neg A \to +B) \wedge (\neg A \to \neg B)] \to +A)$
		$A^C \to [\{(A \to B) \wedge (A \to \neg B)\} \to \neg A]$
		$A^C \to [\{(\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)\} \to A]$
		$^*A \to [\{(A \to B) \wedge (A \to \neg B)\} \to \neg A]$
		$^*A \to [\{(\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)\} \to A]$

Trivialización con las contradicciones	Teoremas	$(+A \wedge \neg A) \to B$
		$\sim(+A \wedge \neg A)$
		$(A \wedge \neg A) \to B$
		$\sim(A \wedge \neg A)$
		$(+A \wedge \sim A) \to B$
		$\sim(+A \wedge \sim A)$

Trivialización con las indeterminaciones	No son teoremas	$(\sim+A \wedge \sim\neg A) \to B$
		$(\sim A \wedge \sim\neg A) \to B$
		$(\sim\sim A \wedge \sim+A) \to B$
	Teoremas	$^*A \to [(\sim+A \wedge \sim\neg A) \to B]$
		$^*A \to [(\sim A \wedge \sim\neg A) \to B]$
		$^*A \to [(\sim\sim A \wedge \sim+A) \to B]$
		$A^C \to [(\sim A \wedge \sim\neg A) \to B]$
		$A^I \to [(\sim\sim A \wedge \sim+A) \to B]$

La forma como se prueban estos teoremas se ilustra en la siguiente proposición.

Proposición 7.2 (Afirmación aristotélica del condicional). *Si en un condicional el antecedente y el consecuente son proposiciones, entonces, el condicional es verdadero si y solamente si no puede ocurrir que el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.*

a. $+(A \to B) \to\sim(+A \wedge \neg B)$

b. $\sim(+A \wedge \neg B)$ *no implica* $+(A \to B)$

c. $(^*A \wedge^* B) \to [\sim(+A \wedge \neg B) \to +(A \to B)]$

d. $(^*A \wedge^* B) \to [\sim(+A \wedge \neg B) \leftrightarrow +(A \to B)]$

Prueba. Para la parte a, supóngase $+(A \to B)$. Utilizando la proposición 6.3b se obtiene $A \to B$, y como de la proposición 6.2b se tiene $\neg B \to\sim B$, entonces se infiere $A \to\sim\neg B$, como además de la proposición 6.3b se tiene $+A \to A$, resulta $+A \to\sim\neg B$, es decir, $\sim+A\vee\sim\neg B$, lo cual significa $\sim(+A\wedge\neg B)$. Se ha probado de esta manera que $+(A \to B) \to\sim(+A\wedge\neg B)$.

Para probar que $\sim(+A \wedge \neg B)$ no implica $+(A \to B)$, considérese la valuación v, la cual asigna los valores que se indican en la tabla 2.

Tabla 2: valuación

A	$\neg A$	$+A$	$^*A$	$^*\sim A$	$\neg\sim A$	$+\sim A$	A^I	A^C	$(\sim A)^I$	$(\sim A)^C$
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

B	$\neg B$	$+B$	$^*B$	$^*\sim B$	$\neg\sim B$	$+\sim B$	B^I	B^C	$(\sim B)^I$	$(\sim B)^C$
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

$A\to B$	$\neg(A\to B)$	$+(A\to B)$	$^*(A\to B)$	$^*\sim(A\to B)$	$\neg\sim(A\to B)$	$+\sim(A\to B)$
1	0	0	0	0	0	0

$(A\to B)^I$	$(A\to B)^C$	$(\sim(A\to B))^I$	$(\sim(A\to B))^C$
0	1	1	0

Para la parte c, supóngase $^*A\wedge^*B$ y $\sim(+A\wedge\neg B)$. En caso de inferirse $\neg(A \to B)$, por la proposición 6.2b se obtendría $\sim(A \to B)$, es decir, A y $\sim B$, y como se tiene $^*A$, por la proposición 7.1a se infiere $+A$. Al tener $\sim(+A\wedge\neg B)$, resulta $\sim+A\vee\sim\neg B$, y como se tiene $+A$, se deduce $\sim\neg B$, pero al tener $^*B$, por la proposición 6.4c se obtiene $+B$, lo cual por la proposición 6.3b implica B, obteniéndose una contradicción. Por lo tanto, resulta $\sim\neg(A \to B)$. Al tener $^*A\wedge^*B$, utilizando la proposición 6.6a se infiere $^*(A \to B)$, y por la proposición 6.4c se concluye $+(A \to B)$. Se ha probado de esta manera que $(^*A\wedge^*B) \to [\sim(+A\wedge\neg B) \to +(A \to B)]$

La parte d, es consecuencia de las partes a y c. $\square$

8 Solución a una paradoja

Muchas paradojas lógicas involucran los conceptos de verdad o falsedad, por ejemplo, la siguiente variante de la paradoja del mentiroso (para detalles ver

[9]). Considérese la situación en la cual se tiene una oración que dice: *esta oración es falsa*. Cuando se identifican ser el caso con verdadero y no ser el caso con falso, entonces se tiene la paradoja: si la oración es verdadera entonces resulta que también es falsa, y si la oración es falsa entonces resulta que no es falsa.

Al interior del sistema LBVF, representando *lo que dice la oración es el caso* como O, *la oración O es falsa* como $\neg O$, y *la oración O es verdadera* como $+O$, entonces la situación queda representada por el enunciado $O \leftrightarrow \neg O$.

Si la oración O es verdadera ($+O$), por la proposición 2.1e, resulta que lo que dice O es el caso (O), y como la oración dice que O es falsa ($O \leftrightarrow \neg O$), se sigue que O es falsa ($\neg O$), y entonces, por la proposición 6.4a, O no puede ser verdadera ($\sim +O$), se obtiene de esta manera una contradicción ($+O \wedge \sim +O$), se concluye por demostración indirecta, que O no es verdadera ($\sim +O$). Ahora, si O es falsa ($\neg O$) entonces, por la proposición 6.2b, lo que dice O no es el caso ($\sim O$), y como la oración dice que O es falsa ($O \leftrightarrow \neg O$), se sigue que O no es falsa ($\sim \neg O$), se obtiene una contradicción ($\neg O \wedge \sim \neg O$), por demostración indirecta, se concluye que O no es falsa ($\sim \neg O$), y como la oración dice que O es falsa ($O \leftrightarrow \neg O$), se infiere que O no es el caso ($\sim O$). Se ha probado que O ni es verdadera ni es falsa ($\sim +O \wedge \sim \neg O$), lo cual, según la proposición 6.4c, significa que O no es completa respecto a la afirmación y a la negación alternas, es decir, O no está bien fundada ($\sim {}^*O$), este hecho, al utilizar la proposición 6.6c, implica que la situación no está bien fundada ($\sim {}^*(O \leftrightarrow \neg O)$). Para garantizar que no hay paradoja, basta verificar que la siguiente asignación v satisface la situación: $V(O) = V(\neg O) = V(+O) = V({}^*O) = V(O^C) = 0$ y $V(O^I) = 1$.

9 Conclusiones

En el sistema LBVF, de acuerdo con la proposición 2.2c, se recuperan todos los teoremas del cálculo proposicional clásico. Pero además, tal como se indica en la tabla de teoremas, es posible probar estos mismos resultados con los operadores alternos, haciendo explícitos los requisitos mínimos de completez de las fórmulas involucradas en el resultado clásico. En la proposición 7.1 se muestra que el sistema LBVF extiende al sistema LBVA, con el cual se caracterizan deductivamente las definiciones de verdad y falsedad aristo–

télica, además, con la solución a la variante de la paradoja del mentiroso, se concluye que el sistema LBVF extiende de manera estricta a la lógica proposicional clásica. Este resultado, junto a las consecuencias presentadas en la tabla de teoremas, muestran que los operadores de afirmación y negación alternas, son auténticas generalizaciones de las nociones usuales de verdad y falsedad. Se sabe que, las nociones usuales de verdad y falsedad, se encuentran estrechamente vinculadas a la afirmación y negación clásicas, mientras que los resultados presentados muestran que, los nuevos operadores de verdad y falsedad, se encuentran ligados a operadores de completez, estableciéndose una conexión con las lógicas paracompletas presentadas inicialmente por Arruda y Alves en [10]. Este hecho puede ser de interés, puesto que el análisis, en lo referente a los operadores de afirmación y negación alternas, es más fino que el hecho por la lógica clásica con los operadores usuales de afirmación y negación.

Referencias

[1] Aristóteles. *Metafísica*, Libro 4, capítulo 7, 1011 b. Referenciado en 137, 163

[2] Xavier Caicedo Ferrer. *Elementos de lógica y calculabilidad*, ISBN 970-625-190-5. Editorial Universidad de los Andes, Bogotá. 1990. Referenciado en 139, 149

[3] A. G. Hamilton, *Lógica para matemáticos.* Editorial Paraninfo S.A. Madrid. 1981. Referenciado en 139, 149

[4] Alfred Tarski. *Logic, semantics and metamathematics*, second edition, 978-0915144761. Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1983. Referenciado en 141

[5] Manuel Sierra A. *Lógica básica con afirmación alterna.* Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165, **1**(1), 2005. Referenciado en 146

[6] Leon Henkin. *The completeness of the first order functional calculus*. The journal of symbolic logic, **14**(3), 1949. Referenciado en 157

[7] Nicola Grana. *Sulla Teoría delle Valutazioni di N. C. A. da Costa*, ISBN 9788820719425. Nàpoli: Liguri Editore, 1990. Referenciado en 158

[8] Manuel Sierra A. *Sistema paraconsistente y paracompleto LBPcPo.* Revista Universidad EAFIT, ISSN 0120-341X, **44**(147), 2007. Referenciado en 164

[9] I. M. Bochenski. *Historia de la lógica formal*, ISBN 84-249-2153-4. Editorial Gredos, Madrid, 1976. Referenciado en 169

[10] A. Arruda y E. Alves. *A semantical study of some systems of vagueness logic*, Bulletin of the Section of Logic, ISSN 0138-0680. Polish Academy of Sciences 8, 1979. Referenciado en 170