Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 3, número 5, páginas 67-85, junio de 2007

Algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss

Some improper integrals with integration infinity limit involving generalizad hypergeometric function ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$

Jaime Castillo Pérez[1]

Recepción: 09–feb–2007/Modificación: 23–abr–2007/Aceptación: 23–abr–2007
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En 1991 M. Dotsenko presentó una generalización de la función hipergeométrica de Gauss denotada por ${}_2R_1^{\tau}(z)$, estableciendo además tanto su representación en serie como también su representación integral. Es importante notar que en 1999 Nina Virchenko y luego, en el 2003, Leda Galué consideraron esta función, introduciendo un conjunto de fórmulas de recurrencia y de diferenciación las cuales permiten simplificar algunos cálculos complicados. Kalla y colaboradores estudiaron esta función y presentaron una nueva forma unificada de la función Gamma, luego en el 2006, Castillo y colaboradores presentaron algunas representaciones simples para ésta función. En este trabajo se establecen algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$.

Palabras claves: función hipergeométrica generalizada, integrales impropias.

[1] MSc en Matemática Aplicada, jacas68@yahoo.es, profesor titular, Universidad de la Guajira, Riohacha–Colombia.

Abstract
In 1991 M. Dotsenko presented a generalization of Gauss' hypergeometric function refered as ${}_2R_1^{\tau}(z)$, and established its representation in series and integral. It is important to remark that in 1999 Nina Virchenko and, later in 2003, Leda Galué considered this function by introducing a set of recurrence and differentiation formulas; they permit simplify some complicated calculus. Kalla et al studied this function and they presented a new unified form of the gamma function. Later in 2006, Castillo et al present some simple representation for this function. Along this paper work some improper integrals with integration infinity limit involving generalized hypergeometric function ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ are displayed.

Key words: generalized hypergeometric function, improper integrals.

1 Introducción

El estudio de las funciones especiales ha apoyado en gran manera el desarrollo de las matemáticas aplicadas, entre ellas se tienen [1, 2]: la función hipergeométrica de Gauss, la función hipergeométrica generalizada, la función hipergeométrica de Wright, las funciones de Appell, la función G, la función H, las funciones de Humbert, etcétera.

Las funciones hipergeométricas aparecen en una diversidad de aplicaciones tales como [1, 3]: estadísticas, investigación de operaciones, teoría cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de placas, conducción de calor, elasticidad, radiación, etcétera.

En 1991 M. Dotsenko consideró una generalización de la función hipergeométrica de Gauss denotada por ${}_2R_1^{\tau}(z)$, estableciendo además su representación en serie e integral. En 1999 Nina Virchenko [4] estableció algunas fórmulas de diferenciación y relaciones de recurrencia para la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$, luego en el 2006 Jaime Castillo y colaboradores [5] obtuvieron 17 representaciones simples para dicha función.

En este trabajo se pretende obtener algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$.

1.1 La función hipergeométrica

En esta sección se presenta la ecuación diferencial hipergeométrica con la solución en serie denominada serie hipergeométrica de Gauss, la cual se nota por ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ llamada comunmente como la función hipergeométrica de Gauss. También se presenta la representación integral para dicha función, posteriormente se define la función hipergeométrica generalizada ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$ con su representación en serie e integral y algunas relaciones de recurrencia. Finalmente, se muestran algunas integrales que contienen a $A\left(x\right)_2 F_1\left(a,b;c;\varphi\left(x\right)\right)$ las cuales son útiles dado que expresan formas computables para la función beta generalizada usada por diversos investigadores en el estudio de las funciones de densidad de probabilidad y sus propiedades estadísticas para resolver diversos problemas asociadas a las mismas.

1.1.1 La ecuación hipergeométrica

La ecuación diferencial lineal, dada por [3, pág. 162],

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]u' - \alpha\beta u = 0\,, \tag{1}$$

donde z es una variable compleja y α, β, γ son parámetros reales o complejos. La ecuación (1) se conoce como la ecuación hipergeométrica y contiene como casos especiales muchas ecuaciones diferenciales encontradas en las aplicaciones.

En la región $|z|<1$, una solución particular de (1) es

$$u_1(z) = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)\,,$$

donde ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ es la función hipergeométrica de Gauss definida de la forma

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k\,(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!}\,,$$

donde $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$

La representación integral de la función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ está dada por [8, pág. 240]

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\gamma-\beta\right)}\int_0^1 t^{\beta-1}\left(1-t\right)^{\gamma-\beta-1}\left(1-tz\right)^{-\alpha}dt\,,$$

$$\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\beta) > 0; \ |\arg(1-z)| < \pi \,.$$

De acuerdo con el teorema 18 [6, pág. 49] se tiene

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{Re}\,(c-a-b) > 0, \ c \neq 0,-1,-2,\ldots$$

1.1.2 La función ${}_2R_1^{\tau}(z)$

En 1999 N. Virchenco [4] consideró una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss de la forma

$$ {}_2R_1^{\tau}(z) = {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!}\,,$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq 0,-1,-2,\ldots$, $|z| < 1$.

Fácilmente se verifica que

$$ {}_2R_1(a,b;c;1;z) = {}_2F_1(a,b;c;z)$$

$$c \neq 0,-1,-2,\ldots,|z| < 1.$$

Esta función tiene la representación integral

$$ {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt^{\tau})^{-a}dt$$

$$\tau > 0, \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0 \ .$$

Una nueva representación para la función ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$ la obtuvieron Castillo y colaboradores [5]

$$ {}_2R_1(a,b;c;\tau;x) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times$$

$$ {}_2F_1(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; x). \tag{3}$$

$$\tau > 0, \mathrm{Re}\,(c) > \mathrm{Re}\,(b) > 0\,.$$

1.1.3 Algunas integrales que contienen a $A(x)_2F_1(a,b;c;\varphi(x))$

A continuación se presentan algunas integrales impropias que contienen a $A(x)_2F_1(a,b;c;\varphi(x))$ para algunas funciones $A(x), \varphi(x)$ [7, págs. 314–318], números $(1), (2), (4), (5), (10), (11), (13) - (22), (29)$ las cuales han sido desarrolladas por diversos investigadores y servirán de base para verificar los nuevos resultados que se presentan en este trabajo.

1) $$\int_0^\infty x^{\alpha-1}{}_2F_1(a,b;c;-wx)\,dx = w^{-\alpha}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha,a-\alpha,b-\alpha \\ a,b,c-\alpha \end{array}\right]$$

$$0<\operatorname{Re}(\alpha)<\operatorname{Re}(a),\operatorname{Re}(b);|\arg w|<\pi\,.$$

2) $$\int_0^\infty x^{\alpha-1}{}_2F_1(a,b;c;1-wx)\,dx = w^{-\alpha}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha,a-\alpha,b-\alpha,c-a-b+\alpha \\ a,b,c-a,c-b \end{array}\right]$$

$$0,\operatorname{Re}(a+b-c)<\operatorname{Re}(\alpha)<\operatorname{Re}(a),\operatorname{Re}(b);|\arg w|<\pi\,.$$

3) $$\int_0^y x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}\ {}_2F_1(a,b;c;-wx)\,dx =$$

$$B(\alpha,\beta)\,y^{\alpha+\beta-1}{}_3F_2(a,b,\alpha;c,\alpha+\beta;-wy)$$

$$y,\operatorname{Re}(\alpha),\operatorname{Re}(\beta)>0;|\arg(1+wy)|<\pi\,.$$

4) $$\int_0^y x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}{}_2F_1\left(a,b;c;\tfrac{x}{y}\right)dx = B(\alpha,\beta)\,y^{\alpha+\beta-1}{}_3F_2(a,b,\alpha;c,\alpha+\beta;1)$$

$$y,\operatorname{Re}(\alpha),\operatorname{Re}(\beta),\operatorname{Re}(c-a-b+\beta)>0\,.$$

5) $$\int_0^y x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}{}_2F_1(a,b;c;1-wx)\,dx = y^{\alpha+\beta-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,c-a-b,\alpha,\beta \\ c-a,c-b,\alpha+\beta \end{array}\right]\times$$

$${}_3F_2(a,b,\alpha;a+b-c+1,\alpha+\beta;wy)+w^{c-a-b}y^{c-a-b+\alpha+\beta-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,a+b-c,\beta,c- \\ a,b,c-a-b+ \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} a-b+\alpha \\ \alpha+\beta \end{array}\right]\times{}_3F_2(c-a,c-b,c-a-b+\alpha;c-a-b+1,c-a-b+\alpha+\beta;wy)$$

$$y, \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta), \operatorname{Re}(c-a-b+\alpha) > 0; |\arg w| < \pi\,.$$

6) $$\int_0^y x^{\alpha-1}(y-x)^{c-1}{}_2F_1\left(a,b;c;1-\tfrac{x}{y}\right)dx = y^{c+\alpha-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha,c-a-b+\alpha \\ c-a+\alpha,c-b+\alpha \end{array}\right]$$

$$y, \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(c-a-b+\alpha) > 0\,.$$

7) $$\int_y^\infty x^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}{}_2F_1(a,b;c;-wx)\,dx = y^{\alpha+\beta-1}B(\beta,1-\alpha-\beta)_3F_2(a,b,\alpha;$$

$$c,\alpha+\beta;-wy) + w^{1-\alpha-\beta}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,a-\alpha-\beta+1,b-\alpha-\beta+1,\alpha+\beta-1 \\ a,b,c-\alpha-\beta+1 \end{array}\right]\times$$

$${}_3F_2(1-\beta,a-\alpha-\beta+1,b-\alpha-\beta+1;2-\alpha-\beta,c-\alpha-\beta+1;-wy)$$

$$y, \operatorname{Re}(\beta) > 0; \operatorname{Re}(\alpha+\beta-a), \operatorname{Re}(\alpha+\beta-b) < 1; |\arg w| < \pi\,.$$

8) $$\int_y^\infty x^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}{}_2F_1(a,b;c;1-wx)\,dx = w^{-a}y^{\alpha+\beta-a-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,b-a,\beta,a-\alpha- \\ b,c-a,a- \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} \beta+1 \\ \alpha+1 \end{array}\right]\times {}_3F_2\left(a,c-b,a-\alpha-\beta+1;a-\alpha+1,a-b+1;\tfrac{1}{wy}\right) + w^{-b}y^{\alpha+\beta-b-1}\Gamma$$

$$\left[\begin{array}{c} c,a-b,\beta,b-\alpha-\beta+1 \\ a,c-b,b-\alpha+1 \end{array}\right]\times{}_3F_2\left(b,c-a,b-\alpha-\beta+1;b-a+1,b-\alpha+1;\tfrac{1}{wy}\right)$$

$$y, \operatorname{Re}(\beta) > 0; \operatorname{Re}(\alpha+\beta-a), \operatorname{Re}(\alpha+\beta-b) < 1; |\arg w| < \pi\,.$$

9) $$\int_0^\infty \tfrac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\rho}{}_2F_1(a,b;c;-wx)\,dx = z^{\alpha-\rho}B(\alpha,\rho-\alpha)_3F_2(a,b,\alpha;c,\alpha-\rho+1;wz) +$$

$$w^{\rho-\alpha}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,a-\alpha+\rho,b-\alpha+\rho,\alpha-\rho \\ a,b,c-\alpha+\rho \end{array}\right]{}_3F_2(a-\alpha+\rho,b-\alpha+\rho,\rho;c-\alpha+\rho,$$

$$\rho-\alpha+1;wz)$$

$$\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(a-\alpha+\rho), \operatorname{Re}(b-\alpha+\rho) > 0; |\arg w|, |\arg z| < \pi\,.$$

10) $$\int_0^\infty \tfrac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\rho}{}_2F_1(a,b;c;1-wx)\,dx = w^{-\alpha}z^{-\rho}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha,a-\alpha,b-\alpha,c-a-b+\alpha \\ a,b,c-a,c-b \end{array}\right]\times$$

$$ {}_3F_2\left(\alpha,\rho,c-a-b+\alpha,\alpha-a+1,\alpha-b+1;-\tfrac{1}{wz}\right)+w^{-a}z^{\alpha-\rho-a}\Gamma\left[\begin{array}{c} b-a,c,\alpha-a, \\ b,c-a, \end{array}\right. $$

$$ \left.\begin{array}{c} a-\alpha+\rho \\ \rho \end{array}\right]\times {}_3F_2\left(a,c-b,a-\alpha+\rho;a-\alpha+1,a-b+1;-\tfrac{1}{wz}\right)+w^{-b}z^{\alpha-\rho-b}\Gamma $$

$$ \left[\begin{array}{c} a-b,c,\alpha-b,b-\alpha+\rho \\ a,c-b,\rho \end{array}\right]\times {}_3F_2\left(b,c-a,b-\alpha+\rho;b-a+1,b-\alpha+1;-\tfrac{1}{wz}\right) $$

$$ \operatorname{Re}(\alpha),\operatorname{Re}(c-a-b+\alpha),\operatorname{Re}(a-\alpha+\rho),\operatorname{Re}(b-\alpha+\rho)>0;|\arg w|,|\arg z|<\pi\,. $$

11) $$ \int_0^\infty \tfrac{x^{\alpha-1}}{(x-y)}{}_2F_1(a,b;c;-wx)\,dx=w^{1-\alpha}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,a-\alpha+1,b-\alpha+1,\alpha-1 \\ a,b,c-\alpha+1 \end{array}\right]\times $$

$$ {}_3F_2(1,a-\alpha+1,b-\alpha+1;2-\alpha;c-\alpha+1-wy)-\pi y^{\alpha-1}\cot\alpha\pi{}_2F_1(a,b;c;-wy) $$

$$ y,\operatorname{Re}(\alpha)>0;\operatorname{Re}(\alpha-a),\operatorname{Re}(\alpha-b)<1;|\arg w|<\pi\,. $$

12) $$ \int_0^\infty \tfrac{x^{\alpha-1}}{(x-y)}{}_2F_1(a,b;c;1-wx)\,dx=\pi w^{-a}y^{\alpha-a-1}\cot(\alpha-a)\pi\Gamma\left[\begin{array}{c} c,b-\alpha \\ b,c-a \end{array}\right]\times $$

$$ {}_2F_1\left(a,c-b,\alpha-b+1;\tfrac{1}{wz}\right)+\pi w^{-b}z^{\alpha-b-1}\cot(b-\alpha)\pi\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha-b \\ a,c-b \end{array}\right]\times $$

$$ {}_2F_1\left(b,c-a;b-a+1;\tfrac{1}{wy}\right)-\tfrac{w^{-\alpha}}{y}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha,a-\alpha,b-\alpha,c-a-b+\alpha \\ a,b,c-a,c-b \end{array}\right]\times $$

$$ {}_3F_2\left(1,\alpha,c-a-b+\alpha;\alpha-a+1;\alpha-b+1;\tfrac{1}{wy}\right) $$

$$ y,\operatorname{Re}(\alpha),\operatorname{Re}(c-a-b+\alpha)>0;\operatorname{Re}(\alpha-a),\operatorname{Re}(\alpha-b)<1;|\arg w|<\pi\,. $$

13) $$ \int_0^y \tfrac{x^{c-1}(y-x)^{\beta-1}}{(1-xz)^{\rho}}{}_2F_1(a,b;c;wx)\,dx=B(c,\beta)\,\tfrac{y^{c+\beta-1}}{(1-yz)^{\rho}}F_3\left(\rho,a,\beta,b;c+\beta;\tfrac{yz}{yz-1},wy\right) $$

$$ y,\operatorname{Re}(c),\operatorname{Re}(\beta)>0;|\arg(1-wy)|,|\arg\ (1-z)|<\pi\,. $$

14) $$ \int_0^y \tfrac{x^{c-1}(y-x)^{\beta-1}}{(1-xz)^{\beta+c-a}}{}_2F_1(a,b;c;wx)\,dx=B(c,\beta)\,\tfrac{(1+wy)^{a}}{(1-wy)^{c}}y^{c+\beta-1}{}_2F_1(a,b+\beta;c+\beta;wy) $$

$$ y,\operatorname{Re}(c),\operatorname{Re}(\beta)>0;|\arg(1-wy)|<\pi\,. $$

15) $$\int_0^y \frac{x^{c-1}(y-x)^{\beta-1}}{(1-xz)^{\rho}} {}_2F_1\left(a,b;c;\frac{x}{y}\right)dx = \Gamma\left[\begin{array}{c} c,\beta,c-a-b+\beta \\ c-a+\beta, c-b+\beta \end{array}\right] \times$$

$${}_3F_2\left(\rho,\beta,c-a-b+\beta;c-a+\beta;c-b+\beta;\frac{yz}{yz-1}\right)$$

$$y, \mathrm{Re}\,(c)\,, \mathrm{Re}\,(\beta)\,, \mathrm{Re}\,(c-a-b+\beta) > 0; |\arg\,(1-yz)\,| < \pi\,.$$

16) $$\int_0^y x^{\alpha-1}\,(y-x)^{\beta-1}{}_2F_1\,(a,b;c;wx\,(y-x))\,dx =$$

$$y^{c+\beta-1}B\,(\alpha,\beta)_3F_2\left(a,b,\alpha,\beta;c,\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2};\frac{wy^2}{4}\right)$$

$$y, \mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(\beta) > 0\,.$$

A menudo se hará uso de la notación

$$\frac{\Gamma\,(a_1)\,\Gamma\,(a_2)\ldots\Gamma\,(a_n)}{\Gamma\,(b_1)\,\Gamma\,(b_2)\ldots\Gamma\,(b_n)} = \Gamma\left[\begin{array}{c} a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n \\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n \end{array}\right].$$

2 Resultados

En esta sección se presentan algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss. Se establece el desarrollo simbólico para uno de los resultados con el apoyo de diversas herramientas del cálculo avanzado; el método que aquí se usa es similar al que se utilizó para obtener el resto de resultados listados en la subsección 2.1.

2.1 Algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss

A continuación se presentan los resultados obtenidos, junto con sus condiciones de validez, tales condiciones son coherentes con las presentadas en la subsección 1.1.3

Calcular

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1}{}_2R_1\left(a, b; c; \tau; -wx\right) dx\,.$$

De acuerdo con el resultado (3), I se escribe de la forma

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} {}_2F_1(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1 - wx) dx;$$

Aprovechando la convergencia absolúta de la serie, se intercambia la suma con la integral

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} {}_2F_1(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1 - wx) dx;$$

Aprovechando el resultado (1) se obtiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} w^{-\alpha} \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{k+b}{\tau} + 1, \alpha, a - \alpha, \\ a, \frac{k+b}{\tau}, \frac{k+b}{\tau} + [c]c\frac{k+b}{\tau} - \alpha \\ 1 - \alpha \end{array} \right].$$

Reorganizando se tiene

$$I = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} w^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}-\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1-\alpha\right)}\,.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de la función Gamma que expresa $\Gamma\left(a+1\right) = a\Gamma\left(a\right)$ y después de simplicar se tiene

$$I = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} w^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{1}{(k+b-\tau\alpha)}\,.$$

Se vuelve a aplicar la propiedad anterior

$$I = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} w^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(b-\tau\alpha+k\right)}{\Gamma\left(b-\tau\alpha+1+k\right)}\,,$$

y haciendo uso del símbolo de Pocchhammer

$$I = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)} w^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(b-\tau\alpha\right)\left(b-\tau\alpha\right)_k}{\Gamma\left(b-\tau\alpha+1\right)\left(b-\tau\alpha+1\right)_k}\,,$$

luego

$$I=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)\Gamma\left(b-\tau\alpha\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma\left(b-\tau\alpha+1\right)}w^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-c+b\right)_k}{k!}\frac{\left(b-\tau\alpha\right)_k}{\left(b-\tau\alpha+1\right)_k}\,.$$

Observe que la serie es de tipo hipergeométrico y de aquí

$$I=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)\Gamma\left(b-\tau\alpha\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma\left(b-\tau\alpha+1\right)}w^{-\alpha}{}_2F_1\left(1-c+b,b-\tau\alpha;b-\tau\alpha+1;1\right)\,.$$

Ahora se hace uso de (2) y se obtiene

$$I=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)\Gamma\left(b-\tau\alpha\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma\left(b-\tau\alpha+1\right)}w^{-\alpha}\frac{\Gamma\left(b-\tau\alpha+1\right)\Gamma(c-b)}{\Gamma\left(c-\tau\alpha\right)}\,.$$

Después de simplificar se obtiene

$$I=w^{-\alpha}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha,a-\alpha,b-\tau\alpha \\ a,b,c-\tau\alpha \end{array}\right]\,.$$

$$\tau>0,\ 0<\mathrm{Re}\left(\tau\alpha\right)<\mathrm{Re}\left(b\right),\ 0<\mathrm{Re}\left(\alpha\right)<\mathrm{Re}\left(a\right);\left|\arg\ w\right|<\pi\,.$$

Observe que este resultado generaliza a 1 cuando $\tau=1$.

Utilizando argumentos similares se obtienen los siguientes resultados:

2) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;1-wx\right)dx=$

$$w^{-\alpha}\Gamma\left[\begin{array}{c} c,\alpha,a-\alpha,b-\tau\alpha \\ a,b,c-\tau\alpha \end{array}\right]\times{}_2R_1\left(a-\alpha,b-\tau\alpha;c-\tau\alpha;\tau;1\right)$$

$$\tau>0,\ 0,\mathrm{Re}\left(a+b-c\right)<\mathrm{Re}\left(\tau\alpha\right)<\mathrm{Re}\left(b\right);$$
$$0,\mathrm{Re}\left(a+b-c\right)<\mathrm{Re}\left(\alpha\right)<\mathrm{Re}\left(a\right);\ \left|\arg\ w\right|<\pi.$$

3) $\displaystyle\int_0^{y}x^{\alpha-1}\left(y-x\right)^{\beta-1}{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;-wx\right)dx=$

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}B\left(\alpha,\beta\right)y^{\alpha+\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_n\left(\alpha\right)_n\Gamma\left(b+\tau n\right)}{\left(\alpha+\beta\right)_n\Gamma\left(c+\tau n\right)}\frac{\left(-wy\right)^n}{k!}$$

$$\tau,\ y,\mathrm{Re}\left(\alpha\right),\mathrm{Re}\left(\beta\right)>0;\left|\arg\left(1+wy\right)\right|<\pi\,.$$

4) $\displaystyle\int_0^y x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}\,{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;\frac{x}{y}\right)dx =$

$$B(\alpha,\beta)\,y^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(\alpha)_n\Gamma(b+\tau n)}{(\alpha+\beta)_n\Gamma(c+\tau n)}$$

$$\tau,\ y\ \operatorname{Re}(\alpha)\operatorname{Re}(\beta),\operatorname{Re}(c-a-b+\beta)>0\,.$$

5) $\displaystyle\int_0^y x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}\,{}_2R_1(a,b;c;\tau;1-wx)\,dx =$

$$\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\times$$

$$\left[y^{\alpha+\beta-1}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{k+b}{\tau}+1,\alpha,1-a,\alpha,\beta\\ \frac{k+b}{\tau}+1-\alpha,1,\alpha+\beta\end{array}\right]{}_3F_2\left(a,\tfrac{k+b}{\tau},\alpha;a,\alpha+\beta;wy\right)+w^{1-a}y^{\alpha+\beta-a}\times\right.$$

$$\left.\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{k+b}{\tau}+1,a-1,1-a+\alpha,\beta\\ a,\frac{k+b}{\tau},1-a+\alpha+\beta\end{array}\right]{}_3F_2\left(\tfrac{k+b}{\tau}+1-a,1,1-a+\alpha;2-a,1-a+\alpha+\beta;wy\right)\right]$$

$$\tau,\ y,\operatorname{Re}(\alpha),\operatorname{Re}(\beta),\operatorname{Re}(c-a-b+\alpha)>0;|\arg w|<\pi\,.$$

6) $\displaystyle\int_0^y x^{\alpha-1}(y-x)^{c-1}\,{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;\left(1-\frac{x}{y}\right)^{\tau}\right)dx =$

$$y^{\alpha+c-1}\frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+c)}\,{}_2R_1(a,b;\alpha+c;\tau;1)$$

$$y,\operatorname{Re}(\alpha),\operatorname{Re}(c),\operatorname{Re}(c-a-b+\alpha)>0\,.$$

7) $\displaystyle\int_y^{\infty} x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}\,{}_2R_1(a,b;c;\tau;-wx)\,dx =$

$$\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\times$$

$$\left[y^{\alpha+\beta-1}B(\beta,1-\alpha-\beta)\,{}_3F_2\left(a,b,\alpha;\tfrac{k+b}{\tau}+1,\alpha+\beta;-wy\right)+w^{1-a-\beta}\times\right.$$

$$\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{k+b}{\tau}+1, a-\alpha-\beta+1, \frac{k+b}{\tau}-\alpha-\beta+1, \alpha+\beta-1\\ a, \frac{k+b}{\tau}, \frac{k+b}{\tau}+2-\alpha-\beta\end{array}\right]\times$$

$$\left.{}_3F_2(1-\beta, a-\alpha-\beta+1, \tfrac{k+b}{\tau}-\alpha-\beta+1; 2-\alpha-\beta, c-\alpha-\beta+1; -wy)\right]$$

$$\tau,\ y, \operatorname{Re}(\beta)>0; \operatorname{Re}(\alpha+\beta-a), \operatorname{Re}\left(\alpha+\beta-\frac{k+b}{\tau}\right)<1; |\arg w|<\pi\,.$$

8) $$\int_y^\infty x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}\,{}_2R_1(a,b;c;\tau;1-wx)\,dx=$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)}\times$$

$$\left[w^{-\alpha}y^{\alpha+\beta-a-1}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{k+b}{\tau}+1, \frac{k+b}{\tau}-a, \beta, a-\alpha-\beta+1\\ \frac{k+b}{\tau}, \frac{k+b}{\tau}+1-a, a-\alpha+1\end{array}\right]\times\right.$$

$${}_3F_2\left(a,1,a-\alpha-\beta+1; a-\alpha+1, a-\tfrac{k+b}{\tau}+1; \frac{1}{wy}\right)+$$

$$w^{-\frac{k+b}{\tau}}y^{\alpha+\beta-\frac{k+b}{\tau}-1}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{k+b}{\tau}+1, a-\frac{k+b}{\tau}, \beta, \frac{k+b}{\tau}-\alpha-\beta+1,\\ a, 1, \frac{k+b}{\tau}-\alpha+1\end{array}\right]\times$$

$$\left.{}_3F_2(\tfrac{k+b}{\tau}, \tfrac{k+b}{\tau}+1-a, \tfrac{k+b}{\tau}-\alpha-\beta+1; \tfrac{k+b}{\tau}-a+1, \tfrac{k+b}{\tau}-\alpha+1; \frac{1}{wy})\right]$$

$$\tau,\ y, \operatorname{Re}(\beta)>0; \operatorname{Re}(\alpha+\beta-a), \operatorname{Re}\left(\alpha+\beta-\frac{k+b}{\tau}\right)<1; |\arg w|<\pi\,.$$

9) $$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\rho}\,{}_2R_1(a,b;c;\tau;-wx)\,dx=$$

$$z^{\alpha-\rho}B(\alpha,\rho-\alpha)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(\alpha)_n\Gamma(b+\tau n)}{(\alpha-\rho+1)_n\Gamma(c+\tau n)}\frac{(wz)^n}{n!}+$$

$$w^{\rho-\alpha}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}B(a+\rho-\alpha,\alpha-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+\rho-\alpha)_n(\rho)_n\Gamma(b+\tau(\rho-\alpha)+\tau n)}{(\rho-\alpha+1)_n\Gamma(c+\tau(\rho-\alpha)+\tau n)}\frac{(wz)^n}{n!}$$

$$\tau, \operatorname{Re}(\alpha)>0; \operatorname{Re}(\alpha+\rho-a), \operatorname{Re}(b-\tau(\rho-\alpha))>0; |\arg w|, |\arg z|<\pi\,.$$

10) $$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\rho}\,{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;1-wx\right)dx = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(a-\alpha\right)\Gamma\left(b-\tau\alpha\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma(b)\Gamma(c-\tau\alpha)}w^{-\alpha}z^{-\rho}\times$$

$${}_2R_1\left(a-\alpha,b-\tau\alpha;c-\tau\alpha;\tau;1\right){}_3F_2\left(a,\rho,1-a+\alpha;1-a+\alpha,1-b+\alpha;-\frac{1}{wz}\right)+$$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha-a\right)\Gamma\left(a-\alpha+\rho\right)}{\Gamma(b)\Gamma(\rho)}w^{-a}z^{\alpha-\rho-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\left(a-\alpha+\rho\right)_n\Gamma\left(b-a\tau-n\tau\right)}{\Gamma\left(c-a\tau-n\tau\right)}$$

$${}_2R_1\left(-n,b-a\tau-n\tau;c-a\tau-n\tau;\tau;1\right)\frac{\left(\frac{1}{wz}\right)^n}{n!}+$$

$$w^{-\frac{k+b}{\tau}}z^{\alpha-\rho-\frac{k+b}{\tau}}\Gamma\left[\begin{array}{c} a-\frac{k+b}{\tau},\frac{k+b}{\tau},\alpha-\frac{k+b}{\tau},\frac{k+b}{\tau}-\alpha+\rho \\ a,\rho \end{array}\right]\times$$

$${}_3F_2\left(\tfrac{k+b}{\tau},\tfrac{k+b}{\tau}-a,\tfrac{k+b}{\tau}-\alpha+\rho;\tfrac{k+b}{\tau}-a+1,\tfrac{k+b}{\tau}-\alpha+1;-\frac{1}{wz}\right)$$

$$\tau,\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}\left(1-a+\alpha\right),\mathrm{Re}\left(a-\alpha+\rho\right),\mathrm{Re}\left(\frac{k+b}{\tau}-\alpha+\rho\right)>0;$$
$$|\arg w|,|\arg z|<\pi,\ c-\tau\alpha\neq 0,-1,-2,\ldots;\ c-a\tau-n\tau\neq 0,-1,-2,\ldots$$

11) $$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x-y}\,{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;-wx\right)dx = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(a-\alpha+1\right)\Gamma(c-b-\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(1-\tau)}w^{1-\alpha}\times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n\left(a-\alpha+1\right)_n\Gamma\left(b-\alpha\tau+n\tau+\tau\right)}{(2-\alpha)_n\Gamma\left(c-\alpha\tau+n\tau\right)}\frac{(-wy)^n}{n!}-\pi y^{\alpha-1}\cot\alpha\pi\;{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;-wy\right)$$

$$\tau,\ y,\mathrm{Re}(\alpha)>0;\mathrm{Re}\left(\alpha-a\right),\mathrm{Re}\left(\alpha-b\right)<1;|\arg w|<\pi\,.$$

12) $$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x-y}\,{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;1-wx\right)dx =$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+b)_k}{k!}\left[\pi w^{-a}y^{\alpha-a-1}\cot\left(a-\alpha\right)\pi\ \times\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{k+b}{\tau}-a\\ \frac{k+b}{\tau}-\alpha+1\end{array}\right]\right.$$

$${}_2F_1\left(a,1;a-\tfrac{k+b}{\tau};\tfrac{1}{wy}\right)+\pi w^{-b}y^{\alpha-\frac{k+b}{\tau}-1}\cot\left(\tfrac{k+b}{\tau}-\alpha\right)\pi\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{k+b}{\tau},a-\frac{k+b}{\tau}\\ a\end{array}\right]\times$$

$$\left(1-\frac{1}{wy}\right)^{-\frac{k+b}{\tau}}-\frac{w^{-\alpha}}{y}\Gamma\left[\begin{array}{c}\alpha,a-\alpha,\frac{k+b}{\tau}-\alpha,1-a+\alpha\\ a,\frac{k+b}{\tau}-\alpha+1\end{array}\right]{}_2F_1\left(1,\alpha;\alpha-\tfrac{k+b}{\tau}+1;\frac{1}{wy}\right)\Bigg]$$

$$\tau,\ y,\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}\,(1-a+\alpha)>0;\mathrm{Re}\,(\alpha-a)\,,\mathrm{Re}\left(\alpha-\frac{k+b}{\tau}\right)<1;|\arg w|<\pi\,.$$

13) $$\int_0^y\frac{x^{c-1}\,(y-x)^{\beta-1}}{(1-x^{\tau}z)^{\rho}}{}_2R_1\,(a,b;c;\tau;wx)\,dx=$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}y^{c+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,\Gamma\,(b+\tau k)}{\Gamma\,(c+\tau k)}\frac{(wy)^k}{k!}B\,(k+c,\beta)\times\,{}_2R_1\,(\rho,c+k;\beta+c+k;\tau;y^{\tau}z)$$

$$\tau,\ y,\mathrm{Re}(c),\mathrm{Re}(\beta)>0;|\arg\,(1-wy)\,|,|\arg\,(1-z)\,|<\pi\,.$$

14) $$\int_0^y\frac{x^{c-1}\,(y-x)^{\beta-1}}{(1-wx^{\tau})^{\beta+c-a}}{}_2R_1\,(a,b;c;\tau;wx^{\tau})\,dx=$$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma\,(\beta)}{\Gamma(b)}y^{c+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,\Gamma\,(b+\tau k)}{\Gamma\,(c+\beta+\tau k)}\frac{(wy^{\tau})^k}{k!}\times{}_2R_1\,(\beta+c-a,c+\tau k;\beta+c+\tau k;\tau;wy^{\tau})$$

$$\tau,\ y,\mathrm{Re}(c),\mathrm{Re}(\beta)>0;|\arg\,(1-wy^{\tau})\,|<\pi\,.$$

15) $$\int_0^y\frac{x^{c-1}\,(y-x)^{\beta-1}}{(1-zx^{\tau})^{\rho}}{}_2R_1\left(a,b;c;\tau;\left(\tfrac{x}{y}\right)^{\tau}\right)dx=$$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma\,(\beta)}{\Gamma(b)}y^{c+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,\Gamma\,(b+\tau k)}{\Gamma\,(c+\beta+\tau k)}\times{}_2R_1\,(\rho,c+\tau k;\beta+c+\tau k;\tau;zy^{\tau})$$

$$\tau,\ y,\mathrm{Re}(c),\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}\,(c-a-b+\beta)>0;|\arg\,(1-zy^{\tau})\,|<\pi\,.$$

16) $$\int_0^y x^{\alpha-1}\,(y-x)^{\beta-1}{}_2R_1\,(a,b;c;\tau;wx\,(y-x))\,dx=$$

$$B\,(\alpha,\beta)\,\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}y^{\alpha+\beta-1}\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(\alpha)_k\,(\beta)_k\,\Gamma\,(b+\tau k)}{\left(\frac{a+\beta}{2}\right)_k\left(\frac{a+\beta+1}{2}\right)_k\Gamma\,(c+\tau k)}\frac{\left(\dfrac{wy^2}{4}\right)^k}{k!}$$

$$\tau,\ y,\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)>0\,.$$

2.2 Aplicación

A continuación se presenta una aplicación de las integrales impropias a la teoría estadística; inicialmente se muestran algunos conceptos, éstos permiten entender mejor el problema.

Muchas funciones especiales de matemáticas aplicadas, pueden ser expresadas en términos de las funciones hipergeométricas, las cuales son una clase importante de funciones especiales [3, 8]. Las funciones hipergeométricas y sus generalizaciones han sido usadas en varios problemas de estadística [9, 10], particularmente en el estudio de más funciones de densidad de probabilidad generalizadas y sus propiedades estadísticas las cuales tienen varias aplicaciones, no sólo en la teoría de confiabilidad, sino también en algunos problemas importantes tales como la teoría de tasa demográfica, biomedicina, datos de trafico y fallas de equipos eléctricos.

A continuación se muestran algunas funciones de densidad que contienen a la función hipergeométrica de Gauss y algunos casos particulares.

2.2.1 Función de densidad de probabilidad

La función $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria x, definida en el conjunto de los números reales de la forma

$$\begin{aligned}
&\text{a) } f(x) \geq 0, \text{ para } x \in R \\
&\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \\
&\text{c) } p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx\,.
\end{aligned}$$

2.2.2 Función característica

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$,entonces la función característica, $\Phi(t)$ de la variable aleatoria X o de la función de distribución $F(x)$ está definida por

$$\Phi(x) = E(\exp(itX)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(itx)dx\,,$$

donde $E[g(x)]$ es llamado el valor esperado de la variable aleatoria $g(x)$.

2.2.3 Valor esperado

Sea X una variable aleatoria, la media de X, notada como $E(x)$, se define por

$$\mu = E(x) = \sum_x x f(x) \ \text{ si } x \text{ es v.a. discreta}\,.$$

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ \text{ si } x \text{ es v.a. continua}\,.$$

2.2.4 El k-ésimo momento

El k-ésimo momento alrededor del origen de la variable aleatoria x está dado por:

$$\mu'_k = E(x^k) = \sum_x x^k f(x) \ \text{ si } x \text{ es v.a. discreta}\,,$$

$$\mu'_k = E(x^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) \ \text{ si } x \text{ es v.a continua}\,,$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad.

2.2.5 Funcion beta generalizada

Sean los parámetros siguientes a, b, c, τ, u y v. Entonces para $\mathrm{Re}(a+\mu)$ y $\mathrm{Re}(b+\mu) > 0$, se define la forma generalizada de la función beta como sigue, según [9],

$$B^{\tau}\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right) = v^{-a}\int_0^{\infty} t^{u-1}(1+t)^{-\mu-u}{}_2R_1(a,b;c;\tau;-\frac{t}{v})dt\,, \qquad (4)$$

donde ${}_2R_1(a,b;c;\tau;x)$ es la función hipergeométrica generalizada.

Para $\tau = 1$ en (4) se tendrá

$$B\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right) = v^{-a}\int_0^{\infty} t^{u-1}(1+t)^{-\mu-u}{}_2F_1(a,b;c;-\frac{t}{v})dt\,,$$

y para $b = c$, se tiene [9]

$$B\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right) = \int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-\mu-u}dt$$
$$= v^{-a}B(u, \mu + a)_2F_1(u, a; u + a + \mu; 1 - \frac{1}{v})\,.$$

Por otro lado, si se hace $a = 0$, entonces (4) se reduce a la conocida fórmula integral de la función beta definida por

$$B(u, \mu) = \int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-\mu-u}dt, \ \ \mathrm{Re}(u); \mathrm{Re}(\mu) > 0\,.$$

La función beta generalizada definida en (4) también se puede escribir como [9]

$$B^\tau\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right) = v^{u-a}\int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-\mu-u}{}_2R_1(a, b; c; \tau; -t)dt\,.$$

2.2.6 Función de densidad de probabilidad definida por Y.B. Nakhin y S. L. Kalla

La función de densidad de probabilidad con variable aleatoria x se define según [9]

$$f(x) = \frac{v^{-n}x^{u-1}(1+x)^{\mu-u}{}_2R_1(a, b; c; \tau; -\frac{x}{v})dt}{B^\tau\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right)}, \quad x > 0\,. \tag{5}$$

2.2.7 Algunos casos especiales de la función de densidad definida por Y.B. Nakhin y S. L. Kalla

Al sustituir $\tau = 1$ en (5), se tiene

$$f(x) = \frac{v^{-n}x^{u-1}(1+x)^{\mu-u}{}_2F_1(a, b; c; -\frac{x}{v})}{B\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right)}\,. \tag{6}$$

Si se hace $b = c$ en (6), y teniendo en cuenta que ${}_2F_1(a, b; b; x) = (1 - x)^{-a}$ [8], entonces

$$f(x) = \frac{v^{-n} x^{u-1}(1 + x)^{-\mu-u}(1 + \frac{x}{v})^{-a}}{B(v, \mu + a)_2F_1(u, a, u + a + \mu; 1 - \frac{1}{v})} .$$

La función de densidad beta de segunda clase dada en (5), cuando $a = 0$, se transforma en

$$f(x) = \frac{x^{u-1}(1 + x)^{-\mu-u}}{B(v, \mu)}, \; x > 0 .$$

3 Conclusiones

De acuerdo con el desarrollo de este trabajo se nota:

- Cada uno de los resultados de la subsección 1.1.3, son formas computables para cada integral propuesta, además, éstas facilitan los cálculos numéricos de las mismas dado que muchos de estos resultados aparecen tabulados en el libro de prudnikov.

- Cada integral es un caso especial de la función beta generalizada

$$B\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right) = v^{-a} \int_0^\infty t^{u-1}(1 + t)^{-\mu-u}{}_2F_1(a, b; c; -\frac{t}{v})dt ,$$

  lo que indica que se tienen diversas formas computables para la misma.

- Una aplicación interesante de estas integrales es que permiten obtener nuevas funciones de densidad de probabilidad. En los últimos años el doctor Kalla y su grupo de colaboradores han trabajado en ese campo.

- Cada resultado de éste trabajo es un caso especial de la función beta generalizada

$$B^\tau\left(\begin{array}{c} a, b; c; v \\ u, \mu \end{array}\right) = v^{-a} \int_0^\infty t^{u-1}(1 + t)^{-\mu-u}{}_2R_1(a, b; c; \tau; -\frac{t}{v})dt .$$

Referencias

[1] James B. Seaborn. *Hypergeometric functions and their applications*, ISBN 0–387–97558–6. New york: Springer-Verlag, 1991. Referenciado en 68

[2] A. M. Mathai and R. K. Saxena. *Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*, ISBN 0–387–06482–6. New york: Springer-Verlag, 1970. Referenciado en 68

[3] N. N. Levedev. *Special functions and their applications*, ISBN 0–486–60624–4. New York: Prentice-Hall, 1965. Referenciado en 68, 69, 81

[4] N. Virchenko. *On some generalizations of the functions of hypergeometric type*. Fractional Calculus and Applied Analysis, ISSN 1311–0454, **2**(3), 233–244 (1999). Referenciado en 68, 70

[5] J. Castillo y C. Jiménez. *Algunas representaciones simples de la función hipergeométrica generalizada*. Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165, **2**(4), 75–94 (2006). Referenciado en 68, 70

[6] Earl David Rainville. *Special Functions*, ISBN 0–8284–0258–2. New York: Chelsea Publishing Company, 1960. Referenciado en 70

[7] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev. *Integrals and Series: More Special Functions* , ISBN 2–88124–682–6. New York: Gordon and Breach Science Publishers, **3**, 1992. Referenciado en 71

[8] George E. Andrews, Richard Askey and Ranjan Roy. *Special Functions*, ISBN 0–521–62321–9. New York: Cambridge University Press 1999. Referenciado en 69, 81, 84

[9] Ben Nakhi and S. L. Kalla. *A generalized beta functions and associated probability density*. International Journal of Mathematics and Mathematics Sciences, ISSN 0161–1712, 30, 467–478 (2002). Referenciado en 81, 82, 83

[10] A. M. Mathai and R. K. Saxena. *Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*. New York: Springer Verlag, ISBN 0–470–26380–6, 1973. Referenciado en 81