

Modelo de error en imágenes comprimidas con wavelets

Error Model in Wavelet-compressed Images

Jairo Villegas G.¹, Gloria Puetamán G.² y Hernán Salazar E.³

Recepción: 19-jun-2007/Modificación: 31-jul-2007/Aceptación: 13-ago-2007
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En este artículo se presenta la compresión de imágenes a través de la comparación entre el modelo Wavelet y el modelo Fourier, utilizando la minimización de la función de error. El problema que se estudia es específico, consiste en determinar una base $\{e_i\}$ que minimice la función de error entre la imagen original y la recuperada después de la compresión. Es de resaltar que existen muchas aplicaciones, por ejemplo, en medicina o astronomía, en donde no es aceptable ningún deterioro de la imagen porque toda la información contenida, incluso la que se estima como ruido, se considera imprescindible.

Palabras claves: wavelet, compresión de imágenes, imagen observada, compresión lineal y no lineal.

Abstract

In this paper we study image compression as a way to compare Wavelet and Fourier models, by minimizing the error function. The particular problem we consider is to determine basis $\{e_i\}$ minimizing the error function between the

¹ Doctor en Ciencias Matemáticas, javille@eafit.edu.co, profesor, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.

² Magíster en Matemáticas Aplicadas, gloria.puetaman@usbmed.edu.co, profesora, Universidad de San Buenaventura, Medellín–Colombia.

³ Magíster en Matemáticas Aplicadas, hernan.salazar@usbmed.edu.co, profesor, Universidad de San Buenaventura, Medellín–Colombia.

original image and the recovered one after compression. It is to be noted or remarked that there are many applications in such diverse fields as for example medicine and astronomy, where no image deteriorating is acceptable since even noise is considered essential.

Key words: wavelet, compression of images, observed image, compression linear and nonlinear.

1 Introducción

Las wavelets constituyen una potente herramienta para afrontar problemas fundamentales en el tratamiento de señales. Entre ellos se encuentran la reducción del ruido [1], la compresión de señales (de mucha importancia tanto en la transmisión de grandes cantidades de datos como en su almacenamiento) [2, 3, 4, 5], o la detección de determinados patrones o irregularidades locales en ciertos tipos de señales como electrocardiogramas, huellas digitales, vibraciones de motores, defectos de soldadura entre placas de acero, problemas de turbulencia de flujos, entre otras (ver [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Esta moderna teoría ha experimentado un gran desarrollo en las dos últimas décadas mostrándose muy eficiente donde otras técnicas no resultan satisfactorias, por ejemplo, la transformada rápida de Fourier .

Algunos de los principales problemas que afectan el tratamiento de señales digitales es la compresión de datos para su almacenamiento o transmisión. La eliminación del ruido y detección de ciertos fenómenos locales [7, 12, 13, 14], ha permitido el desarrollo tanto teórico como computacional de este campo del análisis armónico. Otra de las principales virtudes de las wavelets es que permiten un mejor modelamiento de procesos que dependen fuertemente del tiempo y para los cuales su comportamiento no tiene porque ser suave. Una de las principales ventajas de las wavelets frente a los métodos clásicos, como la transformada de Fourier, es que en el segundo caso se maneja una base de funciones bien localizada en frecuencia pero no en tiempo, mientras que la mayoría de las wavelets interesantes presentan una buena localización en tiempo y en frecuencia, disponiendo incluso de bases de wavelets con soporte compacto [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Por otro lado, no existe una transformada wavelet única, que resuelva todos los problemas a partir de la

modelación del proceso de un análisis a priori del tipo de señal tratada y del objetivo pretendido (compresión, eliminación del ruido u otro); se busca la familia de wavelets (Haar, Daubechies, Coiflets,...) que mejor coincida con las características de la señal a estudiar (ver [16, 17, 18, 25, 26, 27]).

El propósito de este trabajo es presentar algunos conceptos matemáticos en el procesamiento de señales. En particular en la compresión de imágenes, que se puede mirar como un proceso de compresión de datos, en donde los datos comprimidos siempre son representaciones digitales de señales bidimensionales. La compresión de imágenes se puede situar en el contexto más general de la teoría de la información y de la codificación en donde existen muchos problemas de comunicación digital; la información se transmite en forma de cadenas de ceros y unos a través de un canal en el cual la transmisión puede producir perturbaciones debidas a interferencias climatológicas, problemas eléctricos, error humano, deterioro de una cinta o disco, que podrían causar que un cero se reciba como uno o viceversa. Estas perturbaciones, en general, se llaman ruido. En estas circunstancias, las transformaciones erróneas de los dígitos de una palabra enviada, pueden conllevar a que la recibida sea diferente (ver [28, 29, 30, 31, 32, 33]).

El interés por la teoría de comunicación, desde la compresión de datos, se centra principalmente en la codificación eficiente de la información en ausencia del ruido [34]. Sin embargo, existen muchas aplicaciones, por ejemplo, en medicina o astronomía, en donde no es aceptable ningún deterioro de la imagen porque toda la información contenida, incluso la que se estima como ruido, se considera imprescindible [8, 35].

En varias áreas de trabajo, las necesidades de compresión provienen principalmente de problemas de transmisión y manipulación de información, y en menos ocasiones por problemas de almacenamiento. Es evidente que las imágenes, incluso comprimidas, requieren grandes cantidades de memoria. Debido a este hecho, existen básicamente dos tipos de compresores de imágenes: compresores sin pérdida (*lossless compressors*) y compresores con pérdida (*lossy compressors*). Estos últimos, a costa de eliminar la información menos relevante para el observador, alcanzan cotas de compresión muy eficientes. A este tipo de compresores pertenece el estándar JPEG [3, 5, 14], el cual usa la transformada discreta coseno de Fourier, mientras la versión JPEG2000 está completamente basada en la transformada wavelet [36].

2 Preliminares y terminología

En esta sección se presentará alguna terminología necesaria para la lectura del artículo. En particular, se hará un resumen de resultados básicos de análisis de Fourier y wavelets omitiendo sus pruebas, las cuales se pueden encontrar en [15, 19, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Recuerde que $L_1(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$. De igual forma se tiene $L_2(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones cuadrado-integrables, cuya norma es

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Este espacio se dota con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

donde $\overline{g(t)}$ denota el conjugado complejo de $g(t)$. Con este producto interno el espacio $L_2(\mathbb{R})$ es de Hilbert. Las funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle_{L_2} = 0$. En general, $L_p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$), es el espacio de todas las funciones (clases de equivalencia) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f\|_{L_p}^p < \infty$, acá

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es la norma de f en $L_p(\mathbb{R})$. Otro espacio que se utilizará es $\ell_2(\mathbb{Z})$, el de las sucesiones (x_j) , $j \in \mathbb{Z}$, tal que $\sum_j |x_j|^2 < \infty$.

Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\omega \in \mathbb{R}$. La transformada de Fourier de f en ω se define por

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| |e^{-it\omega}| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$$

se tiene que la transformada de Fourier está bien definida. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ se llama transformación de Fourier y se denota por \mathcal{F} ($\mathcal{F}(f) = \hat{f}$). La función

\hat{f} es continua y tiende a cero cuando $|\omega| \rightarrow \infty$ (Lema de Riemann–Lebesgue). Es claro que $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

En general \hat{f} no es una función integrable, por ejemplo, sea

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-1}^1 e^{-it\omega} dt = \left[\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right] \\ &= \frac{\text{sen } \omega}{\omega} \notin L_1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Si $\hat{f}(\omega)$ es integrable, entonces existe una versión continua de f y se puede obtener la fórmula de inversión de Fourier

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

La teoría wavelets se basa en la representación de una función en términos de una familia biparamétrica de dilataciones y traslaciones de una función fija ψ , la *wavelet madre* que, en general, no es senoidal. Por ejemplo,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathcal{W}_\psi f(a, b) da db$$

en donde $\mathcal{W}_\psi f$ es una transformada de f definida adecuadamente. También se tiene de modo alterno un desarrollo en serie

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

en donde se suma sobre las dilataciones en progresión geométrica. Para conservar la norma en $L_2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre ψ , se insertan los factores $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ y $2^{j/2}$, respectivamente.

Definición 2.1. Una wavelet ψ es una función cuadrado integrable tal que la siguiente condición de admisibilidad se tiene

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \tag{1}$$

donde $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de ψ .

Nota 1. Si además $\psi \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la condición (1) implica que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$. En efecto, por el Lema de Riemann–Lebesgue (ver [37]), $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$ y la transformada de Fourier es continua, lo cual implica que $0 = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt$.

Definición 2.2. Una función $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet si la familia de funciones ψ_{jk} definidas por

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

es una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$.

Una condición suficiente para la reconstrucción de una señal f es que la familia de dilatadas y trasladadas ψ_{jk} forme una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$, ver [7, 16, 17, 43] para más detalles. Si esto se tiene, cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{jk}(t) \quad (3)$$

o teniendo en cuenta (2) como

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

donde $d_{j,k} = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$.

Definición 2.3. Para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$ el conjunto bidimensional de coeficientes

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} f(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt$$

se llama la transformada wavelet discreta de f .

En consecuencia, la expresión (3) se puede escribir en forma alterna como

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle \psi_{jk}(t). \quad (4)$$

La serie (4) se llama representación wavelet de f .

El ejemplo más clásico es la wavelet de Haar

$$\psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases}$$

representada en la figura 1.

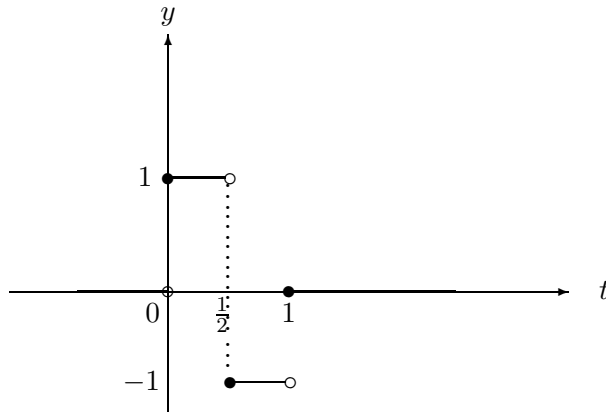


Figura 1: Wavelet de Haar

Algunas observaciones interesantes sobre wavelets:

1. $\psi_{jk}(t)$ es más apropiada para representar detalles finos de la señal como oscilaciones rápidas. Los coeficientes wavelet $d_{j,k}$ miden la cantidad de fluctuación sobre el punto $t = 2^{-j}k$ con una frecuencia determinada por el índice de dilatación j .
2. Las wavelets gozan de la “propiedad zoom”, esto hace que las bases wavelet sean excelentes detectores de singularidades, en otras palabras, las singularidades producen coeficientes wavelet grandes [44].
3. La propiedad zoom es común en todos los sistemas wavelet, constituye la mayor diferencia con los sistemas de Fourier para la detección de

singularidades. En problemas de teoría de señales, las singularidades llevan información esencial como la presencia de esquinas en las imágenes. Esto hace de las bases wavelet una herramienta muy útil para el procesamiento de imágenes, en detrimento del análisis de Fourier.

3 El problema de la compresión de imágenes

Así como las señales son tratadas como funciones de una variable, las imágenes se representarán por funciones de dos variables. Por lo tanto, dada una imagen f , que pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{H} , el problema de la compresión de imágenes es el de encontrar una representación aproximada \tilde{f} de f con las siguientes tres condiciones:

- a) La señal \tilde{f} es dada por un número fijo de coeficientes N
- b) Existe un control conocido del error $E(N) := \|f - \tilde{f}\|$
- c) Existe un algoritmo rápido que reproduce a \tilde{f} .

El objetivo de un algoritmo de compresión (procedimiento o método) es representar ciertas imágenes con menor información que la usada en la representación de la imagen original. Para un algoritmo sin pérdida, la imagen original y la comprimida será la misma, y el error entre ellas será cero; mientras un algoritmo con pérdida, la imagen original difiere de la comprimida. Este tipo de algoritmo es de suma importancia en la minimización de transmisión de datos o almacenamiento de información [45].

Otro hecho importante es el estudio del error, es decir, encontrar una base $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ en donde la señal procesada \tilde{f} se pueda expresar como una combinación lineal finita de la forma $\sum_{j=1}^N \langle f, e_j \rangle e_j$ de tal manera que el error de aproximación sea lo más pequeño posible, esto es, $E(N) = O(N^{-\alpha})$. Existen dos formas estándar de construir tal aproximación: la lineal y la no lineal y las representaciones más usuales para \tilde{f} son la serie de Fourier o la serie wavelet. Los espacios más usados, en donde se definirá la métrica o norma que mide el error, son los espacios de Sobolev y Besov [46].

Finalmente, otro punto de interés en esta teoría, es entender la interrelación entre la calidad de la imagen comprimida y el número de coeficientes

empleados. El propósito de esta sección es estudiar las dos primeras condiciones (a y b), siguiendo [12, 13, 47].

3.1 Formulación matemática

Una imagen se puede considerar como una función f definida sobre el cuadrado unitario $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Se verá que el procesamiento de señales está estrechamente ligado con el análisis wavelet. El concepto de wavelets en dos dimensiones es relevante en este estudio.

Sea φ la función de escala y $\psi(x)$ la correspondiente wavelet madre, entonces las tres funciones

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &= \psi(x)\psi(y) \\ \psi_2(x, y) &= \psi(x)\varphi(y) \\ \psi_3(x, y) &= \varphi(x)\psi(y)\end{aligned}$$

forman, por dilatación y traslación, una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R}^2)$, esto es,

$$\{2^{j/2}\psi_m(2^j x - k_1, 2^j y - k_2)\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2,$$

$m = 1, 2, 3$ es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Por tanto, cada $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ se puede representar como

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{jk},$$

donde ψ es cualquiera de las tres funciones $\psi_m(x, y)$ y $d_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle$.

Un modelo matemático natural en el procesamiento de señales, es considerar una señal f como un elemento de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Usualmente, \mathcal{H} se toma como $L_2(\mathbb{R}^d)$, $L_2([0, N]^d)$ ó $\ell_2(N^d)$, dependiendo de la aplicación en estudio. Por ejemplo, las imágenes de la vida real se pueden ver como funciones $f(x, y)$ que corresponden a la intensidad del campo de luz en $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Se explicará brevemente como este tipo de funciones se pueden discretizar con el propósito de manipulación y almacenamiento en el computador [12].

Es de notar que la función intensidad $f(x, y)$ asociada con la imagen no puede, en general, medirse en todos los puntos $0 \leq x, y \leq 1$. En la práctica,

un dispositivo (un fotómetro) mide promedios de intensidad de luz sobre pequeños cuadrados que se llaman pixels (o elementos de imagen) distribuidos diádicamente a lo largo de toda la imagen en Q . Para m grande (usualmente, $m \geq 8$), se puede codificar la imagen como una sucesión de 2^{2m} coeficientes

$$p_j = p_j^{(m)} = \frac{1}{|Q_{m,j}|} \iint_{Q_{m,j}} f(x,y) dx dy, \quad 0 \leq j_1, j_2 < 2^m, \quad (5)$$

donde $j = (j_1, j_2)$ y $Q_{m,j}$ (el j -ésimo pixel) denota el cuadrado diádico

$$\left[\frac{j_1}{2^m}, \frac{j_1 + 1}{2^m} \right] \times \left[\frac{j_2}{2^m}, \frac{j_2 + 1}{2^m} \right].$$

A cada uno de estos cuadrados se le asocia el número p_j (usualmente entre 0 y 2^8), el cual representa la escala de gris de la imagen en ese punto. De esta forma, la imagen queda digitalizada y se puede almacenar y procesar por computador.

Observe que hasta el momento no se ha definido una función f que represente la imagen como una colección de pixels. Esto se puede hacer considerando una sucesión $\{\varphi_{mj}\}$ de funciones de valor real con soporte en $Q_{m,j}$ y construyendo la *imagen observada*

$$f_o(x) = \sum_j p_j \varphi_{mj}(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Usualmente, $\varphi_{mj}(x) = \varphi(2^m x - j)$, para una función fija φ , la cual se puede escoger simplemente como χ_Q (la característica de Q), o versiones suavizadas tales como splines o funciones de escala [48, 49]. En el caso de escoger una wavelet, por ejemplo, las wavelets de Haar en el cuadrado Q , y denotando la función característica de Q por $\chi = \chi_Q$ y la función característica normalizada de $Q_{m,j}$ por

$$\chi_{mj} = 2^m \chi_{Q_{m,j}} = 2^m \chi(2^m x - j), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

entonces (5) se puede expresar como

$$\begin{aligned} p_j &= 2^m \int_{Q_{m,j}} \chi(2^m x - j) f(x) dx \\ &= 2^m \langle \chi_{mj}, f \rangle. \end{aligned}$$

De esta forma, la imagen observada (6) queda expresada como

$$\begin{aligned} f_o(x) &= \sum_j p_j \chi(2^m x - j) \\ &= \sum_j \langle \chi_{mj}, f \rangle \chi_{mj}. \end{aligned}$$

Por tanto, si la expansión en wavelet del campo de intensidad f es

$$f = \sum_{k \geq 0} \sum_j d_{j,k} \psi_{jk}, \quad (7)$$

entonces la expansión en wavelet de la imagen f_o es

$$f_o = \sum_{0 \leq k < m} \sum_j d_{j,k} \psi_{jk}.$$

Observe que f_o es la proyección de f sobre $\text{gen}\{\chi_{mj}\}_j = \text{gen}\{\psi_{jk}\}_{0 \leq k < m, j}$ en $L_2(Q)$. Note también que para m suficientemente grande, f_o es prácticamente una copia indistinguible de la imagen original f . El problema de la compresión de imágenes es entonces representar f_o con una cantidad suficiente de coeficientes para no perder la semejanza o parecido visual de la imagen original.

En la sección 4 se presentarán las dos técnicas de aproximación utilizando bases wavelet, y se estudiará el problema del error en este caso.

4 Compresión lineal y no lineal

Considere el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal fija. Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}$ se tiene

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

donde $c_k = \langle f, e_k \rangle$ son los coeficientes base. Hay dos maneras de construir y aproximar una señal f_N con sólo N coeficientes base.

1. El método de aproximación lineal: corresponde a minimizar el funcional

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right\|, \quad \text{para todo } a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}.$$

Para la base $\{e_k\}$ el mínimo es dado por

$$f_N = \sum_{k=1}^N \langle f, e_k \rangle e_k,$$

es decir, f_N es la proyección ortogonal de f sobre $V_N := \text{gen}\{e_1, \dots, e_N\}$.

2. El método de aproximación no lineal: corresponde a minimizar

$$\left\| f - \sum_{\gamma \in A} a_\gamma e_\gamma \right\|, \quad \text{para todo } a_\gamma \in \mathbb{C}$$

y todo conjunto de índices $A \subset \mathbb{N}$ tal que $\text{Car}A \leq N$. Cuando $\{e_k\}$ es una base ortonormal, el mínimo es dado por

$$f_N = \sum_{r=1}^N \langle f, e_{k_r} \rangle e_{k_r},$$

donde los coeficientes se han ordenado en forma no creciente

$$|\langle f, e_{k_1} \rangle| \geq |\langle f, e_{k_2} \rangle| \geq \dots$$

A manera de ejemplo, considere el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L_2[0, b]$ y su base de Fourier asociada

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b}} e^{2\pi i n t / b}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Esta es una base ortonormal para $L_2[0, b]$, así que cualquier función f se puede representar en términos de su serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{b}} \hat{f} \left(\frac{2\pi n}{b} \right) e_n(t),$$

con la convergencia en el sentido de L_2 . La última identidad tiene sentido cuando f se extiende a cero fuera de $[0, b]$ y

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

es la transformada de Fourier de f . La mejor aproximación lineal para f con N coeficientes está dada por

$$f_N(t) = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{\sqrt{b}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{b}\right) e_n(t),$$

y el error de aproximación es

$$E(N) = \|f - f_N\|_{L_2} = \left(\frac{1}{b} \sum_{|n| > N} \left| \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{b}\right) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Ahora, la caracterización del conjunto de todas las señales $f \in L_2[0, b]$ para el cual el error de aproximación decae conforme $E(N) = O(N^{-\alpha})$, se hace teniendo en cuenta que la pequeñez de $E(N)$ está estrechamente relacionada al decaimiento rápido de $\hat{f}(\omega)$ cuando $|\omega| \rightarrow \infty$. Este decaimiento asintótico es de hecho equivalente a la regularidad de la función f , en virtud de la bien conocida identidad

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(t)e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^k \hat{f}(\omega).$$

Estos hechos conducen a un candidato natural para el estudio de la aproximación lineal con Fourier: la familia de espacios de Sobolev (véase [38]).

Para $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ se define por

$$H^s(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s \left| \hat{f}(x) \right|^2 dx < \infty \right\},$$

donde \hat{f} es la transformada de Fourier de f . $H^s(\mathbb{R})$ equipado con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^s} := \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$$

es un espacio de Hilbert. También se le asocia la norma

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s |\hat{f}(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

En consecuencia, si $s > 0$ y $f \in L_2[0, b]$ y es de soporte compacto, entonces

$$f \in H^s(\mathbb{R}) \iff \sum_{N=1}^{\infty} N^{2s-1} E^2(N) < \infty.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} N^{2s-1} E^2(N) &= \sum_{N=1}^{\infty} N^{2s-1} \left(\frac{1}{b} \sum_{|n|>N} \left| \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{b}\right) \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{N=1}^{|n|} N^{2s-1} \right) \left| \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{b}\right) \right|^2 \\ &= \frac{C_s}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left| \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{b}\right) \right|^2 \\ &\approx \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|^2)^s |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \end{aligned}$$

En el último paso se utilizó el hecho plausible de ver la integral como una suma de Riemann (para una prueba rigurosa véase [27]).

Se puede concluir de lo anterior que la aproximación lineal con Fourier es muy buena en el análisis de señales con suavidad uniforme en todos los puntos $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, en el modelo de imágenes es mala, puesto que una sola discontinuidad en un punto conllevará a una baja sensible en la suavidad global [27, 39]. Nótese también que de la razón del decaimiento del error de aproximación, se puede estimar numéricamente el mejor s para el cual $f \in H^s$.

Para desarrollar la aproximación tanto lineal como no lineal usando wavelet, es necesario introducir algo de terminología matemática como la noción de espacio de Besov [50].

Dado $\alpha > 0$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, y sea $r \in \mathbb{Z}$ con $q > \alpha \geq r - 1$. El espacio de Besov, $B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))$, consiste de las funciones f para las cuales la norma $\|f\|_{B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))}$ definida por

$$\|f\|_{B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))} = \|f\|_{L_p(Q)} + \left(\int_0^\infty \left[\frac{\omega_r(f,t)_p}{t^\alpha} \right]^q dt \right)^{1/q} < \infty, \quad q < \infty$$

y

$$\|f\|_{B_\infty^{\alpha,r}(L_p(Q))} = \|f\|_{L_p(Q)} + \sup_{t>0} \left[\frac{\omega_r(f,t)_p}{t^\alpha} \right] < \infty, \quad q = \infty,$$

donde para cualquier $h \in \mathbb{R}^2$,

$$\omega_r(f,t)_p = \sup_{|h|\leq t} \left(\int_{Q_{rh}} |\Delta_h^r f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 \leq p \leq \infty,$$

es el r -módulo de continuidad en L_p , con el cambio usual del supremo esencial cuando $p = \infty$. Si se define $\Delta_h^0 f(x) = f(x)$, entonces

$$\Delta_h^r f(x) = \Delta_h^{r-1} f(x+h) - \Delta_h^{r-1} f(x), \quad r = 1, 2, \dots,$$

es la r -ésima diferencia hacia adelante de f , $Q_{rh} = \{x \in Q : x + rh \in Q\}$; recuerde que $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

Nota 2.

1. Si $0 < p < 1$ ó $0 < q < 1$, entonces $\|\cdot\|_{B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))}$ no satisface la desigualdad triangular. Sin embargo, existe una constante C tal que para todo $f, g \in B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))$,

$$\|f + g\|_{B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))} \leq C(\|f\|_{B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))} + \|g\|_{B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))}).$$

2. Como, para cualquier $r > \alpha$, $r' > r$, $\|f\|_{B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))}$ y $\|f\|_{B_q^{\alpha,r'}(L_p(Q))}$ son normas equivalentes, se denotará el espacio de Besov por $B_q^\alpha(L_p(Q))$ en lugar de $B_q^{\alpha,r}(L_p(Q))$ para todo $r > \alpha$.
3. Para $p = q = 2$, $B_2^\alpha(L_2(Q))$ es el espacio de Sobolev $H^\alpha(L_2(Q))$.
4. Para $\alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$ y $q = \infty$, $B_\infty^\alpha(L_p(Q))$ es el espacio de Lipschitz

$$\text{Lip}(\alpha, L_p(Q)) = \{f \in L_p(Q) : \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p} \leq k|h|^\alpha, k > 0 \text{ cte}\}.$$

5. $\|f\|_{B_2^\alpha(L_p(Q))}$ es equivalente a la norma $\left(\sum_k \sum_j 2^{\alpha k} |d_{j,k}|^q\right)^{1/q}$, donde $d_{j,k}$ son los coeficientes wavelet de f .
6. $\|f\|_{B_q^\alpha(L_p(Q))}$ es equivalente a la norma $\left(\sum_k \sum_j |d_{j,k}|^q\right)^{1/q}$, donde $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}$.

4.1 Compresión lineal

Sea ψ una wavelet y considere la imagen f dada por (7). Sea

$$f_N = \sum_{k < N} \sum_j d_{j,k} \psi_{jk}, \quad \text{donde } d_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle,$$

es decir, se incluye en la aproximación todos los coeficientes $d_{j,k}$ con frecuencia menor que 2^N , $N < m$ (f_N es la proyección sobre V_m). f_N se llama la aproximación wavelet para f . Entonces

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{L_2(Q)}^2 &= \left\| \sum_{k \geq 0} \sum_j d_{j,k} \psi_{jk} - \sum_{0 \leq k < N} \sum_j d_{j,k} \psi_{jk} \right\|_{L_2(Q)}^2 \\ &= \left\| \sum_{k \geq N} \sum_j d_{j,k} \psi_{jk} \right\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k \geq N} \sum_j \langle d_{j,k} \psi_{jk}, d_{j,k} \psi_{jk} \rangle_2 \\ &= \sum_{k \geq N} \sum_j d_{j,k} \overline{d_{j,k}} \langle \psi_{jk}, \psi_{jk} \rangle_2 \stackrel{*}{=} \sum_{k \geq N} \sum_j |d_{j,k}|^2 \\ &\leq \sum_{k \geq N} \sum_j \frac{2^{2\alpha k}}{2^{2\alpha N}} |d_{j,k}|^2 \leq 2^{-2\alpha N} \sum_k \sum_j 2^{2\alpha k} |d_{j,k}|^2 \\ &= 2^{-2\alpha N} \|f\|_{H^\alpha(L_2(Q))}^2, \quad \text{por la nota 2.} \end{aligned}$$

Note que $\langle \psi_{jk}, \psi_{jk} \rangle_2 = \|\psi_{jk}\|^2 = 1$.

Por tanto,

$$\|f - f_N\|_{L_2(Q)} \leq 2^{-\alpha N} \|f\|_{H^\alpha(L_2(Q))}.$$

Observe que la aproximación lineal por wavelets produce resultados similares a la aproximación por Fourier [27].

4.2 Compresión no lineal

Ahora, el propósito es presentar la aproximación no lineal usando bases wavelets, más bien que la base de Fourier. Sea $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2)$, y considere una base ortonormal de la forma $\{\psi_{jk}\}$. El objetivo es aprovechar la propiedad zoom de las wavelets para reproducir las singularidades esenciales de f en la imagen comprimida f_N . Recuerde que las singularidades producen coeficientes grandes de la wavelet, por lo tanto, se espera que el error en este caso sea ciertamente una cantidad más pequeña que el error de la aproximación lineal [27, 47, 51].

Para una señal $f \in L_2(\mathbb{R})$, la aproximación no lineal con N coeficientes está dada por

$$f_N = \sum_{\gamma \in A_N} \langle f, \psi_\gamma \rangle \psi_\gamma,$$

donde $A_N = \{\gamma_1 = (j_1, k_1), \dots, \gamma_N = (j_N, k_N)\}$ y los coeficientes se escogen en orden no creciente

$$|\langle f, \psi_{\gamma_1} \rangle| \geq |\langle f, \psi_{\gamma_2} \rangle| \geq \dots \quad (8)$$

El error de aproximación es la suma de los coeficientes restantes

$$\|f - f_N\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{\gamma \notin A_N} |\langle f, \psi_\gamma \rangle|^2.$$

Con el fin de minimizar este error, los índices en A_N deben corresponder a los N coeficientes grandes, pues éstos provienen de las singularidades de f .

En consecuencia, para el algoritmo de la compresión no lineal se toma

$$f_N = \sum_{k=1}^N |\langle f, \psi_{\gamma_k} \rangle| \psi_{\gamma_k}.$$

Ahora, suponiendo que $f \in B_q^\alpha(L_q(Q))$, $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}$, entonces el error mínimo en la aproximación no lineal es

$$\|f - f_N\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle f, \psi_{\gamma_k} \rangle|^2. \quad (9)$$

Como los coeficientes satisfacen (8), entonces

$$\begin{aligned}
 k|\langle f, \psi_{\gamma k} \rangle|^q &= |\langle f, \psi_{\gamma k} \rangle|^q + \dots + |\langle f, \psi_{\gamma k} \rangle|^q \\
 &\leq |\langle f, \psi_{\gamma 1} \rangle|^q + \dots + |\langle f, \psi_{\gamma k} \rangle|^q \\
 &= \sum_{n=1}^k |\langle f, \psi_{\gamma n} \rangle|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \psi_{\gamma n} \rangle|^q \\
 &= \|f\|_{\ell_q}^q \leq C \|f\|_{B_q^\alpha(L_q(Q))}^q.
 \end{aligned}$$

De donde

$$|\langle f, \psi_{\gamma k} \rangle| \leq C k^{-1/q} \|f\|_{B_q^\alpha(L_q(Q))}. \quad (10)$$

Por tanto, al sustituir (10) en (9) se tiene

$$\|f - f_N\|_{L_2(Q)}^2 \leq C \|f\|_{B_q^\alpha(L_q(Q))}^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-2/q},$$

y teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-2/q} \leq \int_N^{\infty} x^{-2/q} dx = \frac{N^{-\alpha}}{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

se deduce

$$\|f - f_N\|_{L_2(Q)} \leq C N^{-\alpha/2} \|f\|_{B_q^\alpha(L_q(Q))}.$$

5 Conclusiones

Se destacan dos hechos relevantes:

1. El análisis expuesto en la sección anterior se aplica a cualquier esquema de compresión que satisfaga

$$\tilde{f} = \sum \tilde{d}_{j,k} \psi_{jk}, \quad \tilde{d}_{j,k} = \langle \tilde{f}, \psi_{jk} \rangle$$

con $|d_{j,k} - \tilde{d}_{j,k}| \leq \gamma$ y $|d_{j,k}| < \gamma$ implicando $\tilde{d}_{j,k} = 0$.

2. Es de resaltar que la cantidad $N^{-\alpha/2}$ se puede obtener por aproximación lineal para funciones que tienen α derivadas en L_2 , es decir, funciones en H^α . La mejora al utilizar la aproximación no lineal está en que la clase $B_q^\alpha(L_q(Q))$ es más grande que H^α . En particular, $B_q^\alpha(L_q(Q))$ contiene funciones discontinuas para valores arbitrariamente grandes de α , mientras que las funciones en H^α son necesariamente continuas si $\alpha > 1/2$.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros anónimos sus valiosos comentarios y sugerencias.

Referencias

- [1] Davil L. Donoho. *Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities and Spectra from Indirect and Noisy Data*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **47**, 173–205 (1993). Referenciado en 112
- [2] Roger. J. Clarke. *Transform Coding of Images*, ISBN–10 0121757307. Academic Press, San Diego, CA, 1985. Referenciado en 112
- [3] Roger. J. Clarke. *Digital Compression of Still Images and Video*, ISBN–10 012175720X. Academic Press, San Diego, CA, 1995. Referenciado en 112, 113
- [4] Allen Gersho and Robert M. Gray. *Vector Quantization and Signal Compression*, ISBN 0–7923–9181–0. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992. Referenciado en 112
- [5] Rafael C. González and Richard E. Woods. *Digital Image Processing*, ISBN-13 978–0201508031. Addison-Wesley, New York, 1992. Referenciado en 112, 113
- [6] Akram Aldroubi. The wavelet transform: A surfing guide, in *Wavelets in Medicine and Biology*, ISBN–10 084939483X. Editors Akram Aldroubi and Michael Unser, CRC Press, New York, 3–36 (1996). Referenciado en 112
- [7] Charles K. Chui. *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*, ISBN–10 0–89871–384–6. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia, 1997. Referenciado en 112, 116
- [8] Michael Unser. A practical guide to implementation of the wavelet transform, in *Wavelets in Medicine and Biology*, ISBN–10 084939483X. Editors Akram Aldroubi and Michael Unser, CRC Press, New York, 37–76 (1996). Referenciado en 112, 113

- [9] Michio Yamada and Koji Ohkitani. Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence. *Progress of Theoretical Physics*, ISSN 1347-4081, **83**(5), 819-823 (1990). Referenciado en 112
- [10] Michio Yamada and Koji Ohkitani. An identification of energy cascade in turbulence by orthonormal wavelet analysis, *Progress of Theoretical Physics*, ISSN 1347-4081, **86**(4), 799-815 (1991). Referenciado en 112
- [11] Michio Yamada and Koji Ohkitani. Orthonormal wavelet analysis of turbulence. *Fluid Dynamics Research*, ISSN 0169-5983, **8**, 101-115 (1991). Referenciado en 112
- [12] A. Chambolle, R. A. De Vore, Nam-Yong Lee and B. J. Lucier. Nonlinear wavelet image processing: variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Image Processing*, ISSN 1057-7149, **7**(3), 319-335 (1998). Referenciado en 112, 119
- [13] R. A. De Vore, B. Jawerth and B. J. Lucier. Image Compression through Wavelet transform Coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, ISSN 0018-9448, **38**(2), 719-746 (1992). Referenciado en 112, 119
- [14] John Miano. *Compressed Image File Formats: JPEG, PNG, GIF, XBM, BMP*, ISBN 0201604434. Addison-Wesley, New York, 1999. Referenciado en 112, 113
- [15] Albert Boggess and Francis J. Narcowich. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, ISBN-10 0130228095. Prentice Hall, New Jersey, 2001. Referenciado en 112, 114
- [16] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, ISBN-10 0898712742. SIAM, Philadelphia, 1992. Referenciado en 112, 113, 116
- [17] Eugenio Hernández and Guido Weiss. *A First Course on Wavelets*, ISBN-10 0849382742. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996. Referenciado en 112, 113, 116
- [18] Yves Meyer. *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes*, ISBN 2-7056-6125-0. Editeur Hermann, Paris, 1990. Referenciado en 112, 113
- [19] David F. Walnut. *An Introduction to Wavelets Analysis*, ISBN 0-8176-3962-4. Birkhäuser, Boston, 2001. Referenciado en 112, 114
- [20] Gilbert G. Walter. Approximation with impulse trains. *Results in Mathematics*, ISSN 0378-6218, **34**(1/2), 185-196 (1998). Referenciado en 112

- [21] Gilbert G. Walter and Xiaoping Shen. *A substitute for summability in wavelet expansions* in Analysis of Divergence, ISBN 0817640584. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston, MA, 51–63 (1999). Referenciado en 112
- [22] Gilbert G. Walter and Xiaoping Shen. *Deconvolution using Meyer wavelets*. Journal Integral Equations and Applications, ISSN 0897–3962, **11**(4), 515–534 (1999). Referenciado en 112
- [23] Ingrid Daubechies. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. Communications on Pure and Applied Mathematics, ISSN 0010–3640, **41**(7), 909–996 (1988). Referenciado en 112
- [24] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer. *Discrete–Time Signal Processing*, ISBN–13 978–0132162920. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989. Referenciado en 112
- [25] Aline Bonami, Sylvain Durand and Guido Weiss. *Wavelets obtained by continuous deformations of the Haar wavelet*. Revista Matemática Iberoamericana, **12**(1), 1–18 (1996). Referenciado en 113
- [26] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*, ISBN–10 0121745848. Academic Press, Boston, 1992. Referenciado en 113
- [27] S. Mallat. *A Wavelets Tour of Signal Processing*. Academic Press, New York, 1998. Referenciado en 113, 124, 126, 127
- [28] Elwyn R. Berlekamp. *Algebraic Coding Theory*, ISBN–13 978–0894120633. Aegean Park Press, 1984. Referenciado en 113
- [29] R. W. Hamming. *Error detecting and error correcting codes*. Bell System Technical Journal, **29**, 147–160 (1950). Referenciado en 113
- [30] Alian Poli and Llorenç Hugué. *Error Correcting Codes: Theory and Applications*, ISBN–10 0132848945. Prentice Hall, Paris, 1992. Referenciado en 113
- [31] John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis. *Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, ISBN–10 002396815X. Macmillan, New York, 1992. Referenciado en 113
- [32] Ferrel G. Stremmer. *Introduction to Communication Systems*, 2nd edition, ISBN 968–500009–3. Addison–Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts, 1982. Referenciado en 113

- [33] Roberto Togneri and Christopher J. S. deSilva. *Fundamentals of Information Theory and Coding Design*, ISBN-10 1584883103. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003. Referenciado en 113
- [34] C. E. Shannon. *A mathematical theory of communication*. The Bell System Technical Journal, **27**, 379–423, 623–656 (1948). Referenciado en 113
- [35] Donald B. Percival and Andrew T. Walden. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, ISBN-10 0521640687, Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Referenciado en 113, 114
- [36] M. Unser and T. Blu. *Mathematical Properties of the JPEG2000 Wavelet Filters*. IEEE Transactions on Image Processing, ISSN 1057-7149, **12**(9), 1080–1090 (September 2003). Referenciado en 113
- [37] M. A. Pinsky. *Introduction to Fourier Analysis and wavelet*, Brooks/Cole, NJ, 2001. Referenciado en 114, 116
- [38] Gerald B. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, ISBN-13 978-0-471-31716-6. John Wiley & Sons, 1999. Referenciado en 114, 123
- [39] Gilbert G. Walter and Xiaoping Shen. *Wavelets and Other Orthogonal Systems*, 2nd edition, ISBN-13 9781584882275. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000. Referenciado en 114, 124
- [40] Denis Gabor. *Theory of communications*. J. Inst. Elect. Eng, London, **93**(III), 429–457 (1946). Referenciado en 114
- [41] C. Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath and Haitao Guo. *Introduction to wavelets and wavelet transforms, A Primer*, ISBN 0-13-489600-9. Prentice Hall, New Jersey, 1998. Referenciado en 114
- [42] Ingrid Daubechies. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*. IEEE Transactions on Information Theory, ISSN 0018-9448, **36**(5), 961–1005 (1990). Referenciado en 114
- [43] Gilbert Strang and Truong Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*, ISBN-13 978-0961408879. Wellesley-Cambridge Press, Cambridge, MA, 1996. Referenciado en 116
- [44] Stephane G. Mallat. *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **11**(7), 674–693 (1989). Referenciado en 117

- [45] Wenchang Sun and Xingwei Zhou. *Sampling theorem for wavelet subspaces: error estimate and irregular sampling*. IEEE Transactions on Signal Processing, ISSN 1053-587X, **48**(1), 223–226 (2000). Referenciado en 118
- [46] Hans Triebel. *Fourier Analysis and Function Spaces*. Teubner-Texte Math. 7, Leipzig: Teubner, 1977. Referenciado en 118
- [47] Yves Meyer. *Wavelets and functions with bounded variation from image processing to pure mathematics*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., 77–105 (2000). Referenciado en 119, 127
- [48] E. Quak and N. Weyrich. *Decomposition and reconstruction algorithms for spline wavelets on a bounded interval*. Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA), I(3), 217–231 (1994). Referenciado en 120
- [49] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden. *B-spline processing I: Theory and II: Efficient design and application*. IEEE Transactions on Signal Processing, ISSN 1053-587X, **41**(2), 821–848 (1993). Referenciado en 120
- [50] R. A. DeVore, B. Jawerth and V. Popov. *Compression of wavelet decomposition*. American Journal of Mathematics, ISSN 0002-9327, **114**, 737–785 (1992). Referenciado en 124
- [51] S. Mallat. *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbb{R}^d)$* . Transactions of the American Mathematical Society, ISSN 0002-9947, **315**, 69–87 (1989). Referenciado en 127