Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 5, número 9, junio de 2009, páginas 91–122

El problema de π-geografía y el problema de Hurwitz

O problema da π–geografia e o problema de Hurwitz

The π-geography problem and the Hurwitz problem

Carlos A. Cadavid–M.[1] y Juan D. Vélez–C.[2]

Recepción: 10-dic-2008/Modificación: 26-feb-2009/Aceptación: 27-feb-2009
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

Sea $d \geqslant 2$ un entero y π una partición de d. En este artículo se estudia el problema de para qué pares de enteros (a, b) existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ que tenga a valores críticos, $\chi(\Sigma) = -b$, y tal que la monodromía que se obtiene cuando se recorre la frontera de D^2 en sentido positivo pertenece a la clase de conjugancia en el grupo simétrico $\mathcal{S}_d$ determinada por la partición π. Se estudian cuatro variantes de este problema: i) sin requerir conexidad del dominio, ii) requiriendo conexidad del dominio, iii) sin requerir conexidad del dominio, pero exigiendo que el recubrimiento sea semiestable, iv) requiriendo que el dominio sea conexo y que el recubrimiento sea semiestable. Se obtienen soluciones completas de las primeras dos variantes, y se obtiene una solución parcial de las variantes restantes. Además se explica cómo el interés por estos problemas surge del estudio de una pregunta análoga para funciones cuyo dominio es 4-dimensional.

Palabras claves: recubrimiento ramificado, valor crítico, característica de Euler, fórmula de Riemann–Hurwitz, Hurwitz problem, π-geografía, monodromía.

[1] PhD Matemáticas, ccadavid@eafit.edu.co, profesor titular, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[2] PhD Matemáticas, jdvelez@unalmed.edu.co, profesor titular, Universidad Nacional de Colombia, Medellín–Colombia.

Resumo

Seja $d \geqslant 2$ um inteiro e π uma partição de d. Nesse artigo se estuda o problema de para quais pares de inteiros (a, b) existe um recobrimento ramificado $F : \Sigma \to D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ que tenha a valores críticos, $\chi(\Sigma) = -b$, e tal que a monodromia que se obtém quando se recorre a fronteira de D^2 no sentido positivo pertence à classe de conjugância no grupo simétrico S_d determinado pela partição π. Estuda-se quatro variáveis deste problema: i) sem requerer conexidade do domínio; ii) requerendo conexidade do domínio; iii) sem requerer conexidade do domínio, porém exigindo que o recobrimento seja semi-estável; iv) requerendo que o domínio seja conexo e que o recobrimento seja semi-estável. Obtém-se soluções completas das duas primeiras variáveis, e obtém-se uma solução parcial das variáveis restantes. Além disso, explica-se como o interesse por estes problemas surge do estudo de uma pergunta análoga para funções cujo domínio é 4-dimensional.

Palavras chaves: recobrimento ramificado, valor crítico, característica de Euler, fórmula de Riemann–Hurwitz, problema de Hurwitz, π–geografia, monodromia.

Abstract

Let $d \geqslant 2$ be an integer and let π be a partition of d. This article aims to determine for which pairs of integers (a, b) there exists a branched cover $F : \Sigma \to D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ with $\chi(\Sigma) = -b$ and having a critical values, such that the monodromy obtained when traversing the boundary of D^2 once and positively belongs to the conjugacy class in the symmetric group $\mathcal{S}_d$ determined by π. Four variants of this question are studied: i) without requiring the connectedness of the domain, ii) requiring the connectedness of the domain, iii) without requiring the connectedness of the domain but requiring the semistability of the map, iv) requiring the connectedness of the domain and the semistability of the map. Complete solutions are obtained of the first two variants, and partial solutions are obtained of the remaining variants. The article also explains how these questions arise when analogous questions for maps whose domain is four dimensional are studied.

Key words: branched cover, critical value, Euler characteristic, Riemann–Hurwtiz formula, Hurwitz problem, π–geography, monodromy.

1 Introducción

El interés por el problema que es tema de este artículo surgió del estudio de una conjetura de los autores, referente a la relación entre el número de fibras singulares y la característica de Euler del espacio total, de una función localmente holomorfa y relativamente minimal $F : M \to D^2$ donde M es una 4-variedad suave con frontera, que es compacta, orientada y conexa, y $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ es el disco cerrado unitario en el plano complejo. A grandes rasgos, la conjetura mencionada puede ser descrita de la siguiente manera. Sea Σ_g una 2-variedad suave sin frontera, que es compacta, conexa, orientada y de género $g \geqslant 0$, $Dif^+(\Sigma_g)$ el grupo de autodifeomorfismos de Σ_g que preservan orientación, y $\mathcal{M}_g$ el grupo cuyos elementos son las clases de isotopía de elementos de $Dif^+(\Sigma_g)$, y cuya operación es la inducida por la operación de composición de $Dif^+(\Sigma_g)$. Sea π una clase de conjugancia de un elemento de $\mathcal{M}_g$, y denotemos por $\mathcal{C}^c_\pi$ a la colección formada por todas las funciones localmente holomorfas y relativamente minimales $F : M \to D^2$, cuyo dominio es una variedad 4-dimensional (no fija) con las características ya mencionadas, tales que sus fibras no singulares son cada una difeomorfa a Σ_g, y la monodromía que se obtiene cuando se recorre en sentido positivo la frontera de D^2, pertenece a π. Para cada entero χ tal que la colección $\mathcal{C}^c_{\pi,\chi} := \{F : M \to D^2 \in \mathcal{C}^c_\pi : \chi(M) = \chi\}$ es no vacía, se define $k_\pi(\chi)$ como el mínimo de los números de fibras singulares (o, equivalentemente, de valores críticos) de elementos de $\mathcal{C}^c_{\pi,\chi}$.

Conjetura 1.1. La función k_π es no decreciente y $\lim_{\chi\to+\infty} k_\pi(\chi) = +\infty$.

En [1] se prueba un resultado que apunta en la dirección de la conjetura 1.1. Este afirma que para $g \geqslant 1$, si id es la clase de conjugancia del autodifeomorfismo identidad de Σ_g, y $F : M \to D^2 \in \mathcal{C}^c_{id}$ es *semiestable*, es decir, es tal que para cada punto crítico $p \in intM$, existen cartas alrededor de p y de $F(p)$, que van a abiertos de $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}$, respectivamente, y que preservan orientación, respecto a las cuales F toma la forma $(z, w) \to z^2 + w^2$, entonces

$$\frac{\chi(M) - (2 - 2g)}{6g} + 1 \leqslant k\,, \tag{1}$$

donde k es el número de valores críticos de F.

La conjetura 1.1 lleva naturalmente a considerar la siguiente pregunta.

Pregunta 1.1. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe algún elemento de $\mathcal{C}^c_\pi$ que tenga a valores críticos, y que la característica de Euler de su dominio sea b?

Esta pregunta es evidentemente más fina que la conjetura misma, es decir, si se responde la pregunta 1.1, se tiene la confirmación o refutación de la conjetura 1.1.

Una idea para ganar intuición en el estudio de estos problemas, es considerar sus análogos en el caso en que el dominio 4-dimensional de las funciones localmente holomorfas se reemplaza por un dominio 2-dimensional. Las funciones localmente holomorfas en este caso resultan ser recubrimientos ramificados del disco D^2 (ver definición 2.2); el papel de la variedad 2-dimensional Σ_g lo juega ahora una variedad 0-dimensional que consta de d puntos; el grupo $\mathcal{M}_g$ es ahora el grupo simétrico $\mathcal{S}_d$ en d símbolos; π se convierte en la clase de conjugancia de un elemento de $\mathcal{S}_d$, la cual equivale a una partición del entero d; la condición de semiestabilidad se traduce en que los grados locales de los puntos críticos del recubrimiento ramificado sean iguales a dos. El propósito de este artículo es el de estudiar la pregunta 1.1, la conjetura 1.1 y la desigualdad análoga a (1), en esta versión 2-dimensional. Concretamente, en las subsecciones 3.1, 3.2 y 3.3, se estudian las siguientes cuatro variantes de la pregunta 1.1. Sea $d \geqslant 2$ un entero y π una partición de d. Denotamos por $\mathcal{C}_\pi$ a la colección formada por aquellos recubrimientos ramificados $F : \Sigma \to D^2$ cuya monodromía cuando se recorre la frontera de D^2 en sentido positivo está en la clase de conjugancia determinada por π, por $\mathcal{C}_\pi^c$ a la colección formada por los elementos de $\mathcal{C}_\pi$ cuyo dominio es conexo, por $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$ a la colección formada por los elementos semiestables de $\mathcal{C}_\pi^c$, y por $\mathcal{C}_\pi^s$ a la colección formada por los elementos semiestables de $\mathcal{C}_\pi$.

Pregunta 1.2. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe $F : \Sigma \to D^2 \in \mathcal{C}_\pi^c$ que tenga a valores críticos y $-\chi(\Sigma) = b$?

Pregunta 1.3. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe $F : \Sigma \to D^2 \in \mathcal{C}_\pi$ que tenga a valores críticos y $-\chi(\Sigma) = b$?

Pregunta 1.4. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe $F : \Sigma \to D^2 \in \mathcal{C}_\pi^{c,s}$ que tenga a valores críticos y $-\chi(\Sigma) = b$?

Pregunta 1.5. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe $F : \Sigma \to D^2 \in \mathcal{C}_\pi^s$ que tenga a valores críticos y $-\chi(\Sigma) = b$?

La consideración del *negativo* de la característica de Euler se debe a una mera comodidad técnica.

En las subsecciones mencionadas se obtiene una solución completa del problema 1.2 (ver teorema 3.2), una solución completa del problema 1.3 (ver teorema 3.5), y soluciones parciales, aunque significativas, de los problemas 1.4 y 1.5 (ver teorema 3.6). En la sección 4 se observa, como consecuencia inmediata de los otros resultados, que la conjetura 1.1 es válida, y que una desigualdad análoga de la desigualdad (1) se satisface y de manera precisa (esto último al menos parcialmente).

2 Definiciones y algunos hechos básicos

Definición 2.1. Sea n un entero positivo. Una *partición* de n es una tupla $(n_1, \ldots, n_r)$ de enteros no negativos tales que $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_r$, y $n_1 + \cdots + n_r = n$. Si $n_r \geqslant 1$ se dice que la partición es *propia.* A la partición de n, $(1, \ldots, 1)$, que consta de n unos, se le llamará *partición trivial de* n. El número de componentes no nulas de una partición π se llama *longitud* de la partición y se denota por $l(\pi)$. A una matriz cuyas filas son particiones de un mismo n, y en la que al menos una de ellas es propia, se le llamará *matriz de particiones de* n. Si todas las filas de una matriz de particiones de n son no triviales, entonces se dirá que la matriz de particiones es *nunca trivial.*

En lo que sigue es importante tener en cuenta las siguientes definiciones y hechos elementales. Si M y N son variedades suaves con frontera, y $F : M \to N$ es una función suave, entonces la diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ está definida para todo punto $p \in M$, incluso para aquellos que pertenecen a la frontera de M o cuya imagen pertenece a la frontera de N. Un punto $p \in M$ se llama *punto crítico* de F si la diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ no es sobreyectiva. En caso contrario el punto se llama *punto regular* de F. Un punto $q \in N$ se llama *valor crítico* de F si existe algún $p \in M$ tal que $F(p) = q$ y p es punto crítico de F. En caso contrario, el punto se llama *valor regular* de F. Esto hace que si un punto de N no pertenece a la imagen de F, entonces es automáticamente un valor regular de F. Si M y N son variedades suaves con frontera (posiblemente vacía) y de la misma dimensión, una función suave, sobreyectiva, y propia (es decir, tal que la preimagen de cada compacto en N es un compacto en M), que no tiene puntos críticos se llama *recubrimiento* o *recubrimiento no ramificado.* Cuando N es conexa, la cardinalidad de la preimagen de un punto de N no depende del punto. Esta cardinalidad se llama *número de capas* del recubrimiento. Si M es compacto, este número es necesariamente finito.

Definición 2.2. Sean Σ y B variedades suaves de dimensión 2 con frontera (posiblemente vacía), orientadas y compactas, y supongamos que B es conexa. Una función suave $F : \Sigma \to B$ es un *recubrimiento ramificado* si:

1. F es sobreyectiva
2. $F(\partial\Sigma) = \partial B$ y $F(int\Sigma) = intB$
3. Todos los valores críticos de F están en $intB$
4. Para cada $p \in int\Sigma$ existen cartas alrededor de p y $F(p)$ que van a abiertos del plano complejo y que preservan orientación, respecto a las cuales F toma la forma $z \to z^{d_p}$, donde d_p es un entero positivo.

Esta definición tiene las siguientes implicaciones. Los puntos críticos de F están todos en $int\Sigma$ y son aislados. Este hecho combinado con la compacidad de Σ, implica que F tiene un número finito (posiblemente igual a cero) de puntos críticos y, por ende, un número finito (posiblemente igual a cero) de valores críticos. A los valores críticos de F los denotaremos por $q_1, \dots, q_k$. La restricción

$$F|_{\Sigma - F^{-1}(\{q_1,\dots,q_k\})} : \Sigma - F^{-1}(\{q_1, \dots, q_k\}) \to B - F^{-1}(\{q_1, \dots, q_k\}) \qquad (2)$$

es un recubrimiento no ramificado. En particular, la restricción

$$F|_{\partial\Sigma} : \partial\Sigma \to \partial B \qquad (3)$$

es un recubrimiento no ramificado entre variedades compactas unidimensionales. El número de capas del recubrimiento en (2) (o en (3)) se llama *grado* del recubrimiento ramificado F, y se denotará por d. Para cada $p \in int\Sigma$ el entero no negativo $r_p = d_p - 1$ se llama *índice de ramificación de F en p*. La siguiente relación, conocida como *fórmula de Riemann–Hurwitz* se satisface:

$$\chi(\Sigma) = d\chi(B) - \sum_{p \in int\Sigma} r_p\,.$$

Aquí $\chi(\cdot)$ denota la característica de Euler de la variedad en cuestión. Otras maneras alternativas de escribir esta relación son:

$$\chi(\Sigma) = d\chi(B) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{p \in F^{-1}(q_i)} r_p \quad \text{y}$$

$$\chi(\Sigma) = d(\chi(B) - k) + \sum_{i=1}^{k} l_i \, ,$$

donde l_i es igual al número de preimágenes de q_i. Supóngase que F tiene al menos un valor crítico y sea $F^{-1}(q_i) = \{p_{i1}, \ldots, p_{il_i}\}$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Los grados locales alrededor de cada p_{ij}, $d_{ij} = d_{p_{ij}}$, pueden ser re-enumerados de tal manera que $(d_{i1}, \ldots, d_{il_i})$ sea una partición no trivial de d. A la matriz $D = (d_{ij})$ de tamaño $k \times l$ donde $l = \text{máx}\, l_i$ y d_{ij} se define como cero si $j > l_i$, se la llamará *matriz de ramificación de* F. Es importante observar que el orden en que aparecen las filas en la matriz de ramificación es irrelevante dado que depende de la numeración (arbitraria) de los valores críticos. Si F carece de valores críticos, entonces se toma a (0) como su matriz de ramificación. Un recubrimiento ramificado se llama *simple* si carece de valores críticos o si cada fila de su matriz de ramificación es de la forma $2, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0$, y *semiestable* si cada entrada d_{ij} de su matriz de ramificación vale a lo sumo dos.

Además de la matriz de ramificación, al recubrimiento ramificado se le asociará su *matriz de frontera*. Esta se define de la siguiente manera. Si la frontera de $B \neq \emptyset$, se numeran en forma arbitraria las componentes conexas de la frontera de B, $\partial B = (\partial B)_1 \cup \ldots \cup (\partial B)_s$. Cada restricción $F : F^{-1}((\partial B)_u) \to (\partial B)_u$ es un recubrimiento de grado d, el cual induce una partición (posiblemente trivial) $(e_{u1}, \ldots, e_{ur_u})$ de d, formada por los grados de las restricciones de F a cada una de las r_u componentes conexas de $F^{-1}((\partial B)_u)$. Entonces la matriz de frontera de F es la matriz $E = (e_{uv})$ de tamaño $s \times \text{máx}\, r_u$, donde $e_{uv} = 0$, siempre que $v > r_u$. Es importante observar que el orden de la filas en la matriz de frontera es también irrelevante. Si $\partial B = \emptyset$ entonces se toma a (0) como la matriz de frontera.

A un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to B$ se le asocia la 6-tupla

$$(\Sigma, B, k, d, (d_{ij}), (e_{uv}))\, .$$

Ya se sabe que estos datos satisfacen la relación

$$\chi(\Sigma) = d(\chi(B) - k) + \sum_{i=1}^{k} l_i \,.$$

También se cumple que si $\partial\Sigma$ tiene r componentes conexas, y ∂B tiene s componentes conexas, entonces la suma de las longitudes de las filas de E es igual a r. Además si $k = 0$ entonces $D = (0)$ y si $s = 0$ entonces $E = 0$. Es útil introducir la siguiente terminología.

Definición 2.3. Un *dato de ramificación* es una 6-tupla

$$(\Sigma, B, k, d, D = (d_{ij}), E = (e_{uv}))\,,$$

donde:

1. Σ es una 2-variedad suave con frontera, compacta y orientada, cuya frontera tiene $r \geqslant 0$ componentes conexas;

2. B es una 2-variedad suave con frontera, compacta, orientada y conexa, cuya frontera tiene $s \geqslant 0$ componentes conexas;

3. k y d son enteros tales que $k \geqslant 0$ y $d \geqslant 1$;

4. D es una matriz de particiones de d con k filas (si $k = 0$ se entiende que $D = (0)$), que satisface la relación

$$\chi(\Sigma) = d(\chi(B) - k) + \sum_{i=1}^{k} l_i \,,$$

   donde l_i es la longitud de la partición en la fila i;

5. E es una matriz de particiones de d con s filas (si $s = 0$ se entiende que $E = (0)$), tal que la suma de las longitudes de las filas de E es igual a r.

Dos datos de ramificación (Σ, B, k, d, D, E) y $(\Sigma', B', k', d', D', E')$ se considerarán *equivalentes* si Σ es difeomorfo a Σ', B es difeomorfo a B', $k = k'$, $d = d'$, y las matrices D y D', E y E' son iguales excepto por el orden de sus filas.

A continuación se definen dos nociones de equivalencia fundamentales entre recubrimientos ramificados.

Definición 2.4. Sean $F : \Sigma \to B$ y $F' : \Sigma' \to B'$ dos recubrimientos ramificados. Entonces se dice que estos son:

1. *Topológicamente equivalentes* si existen difeomorfismos que preservan orientación $H : \Sigma \to \Sigma'$ y $h : B \to B'$ tales que $F' \circ H = h \circ F$;
2. *Equivalentes* si existe un difeomorfismo que preserva orientación $H : \Sigma \to \Sigma'$, tal que $F' \circ H = F$;

Nota 2.1. Es interesante observar que es posible definir otras relaciones de equivalencia fijando cualquier subgrupo G del grupo de difeomorfismos de B que preservan orientación, y declarando que los recubrimientos ramificados F y F' son equivalentes si existen H y h como arriba, con $h \in G$.

La siguiente proposición es inmediata, pero es importante para entender la manera como se formula el problema de Hurwitz.

Proposición 2.1. Sean $F : \Sigma \to B$ y $F' : \Sigma' \to B'$ dos recubrimientos ramificados. Si estos son topológicamente equivalentes, o equivalentes, entonces sus datos de ramificación son equivalentes.

2.1 El Problema de Hurwitz

El siguiente es el planteamiento del problema estudiado originalmente por Hurwitz.

Problema 2.1.

1. ¿Para qué datos de ramificación $(\Sigma, S^2, k, d, D, (0))$, donde D es una matriz cuyas filas, con la posible excepción de la primera, es la partición de d,
$$(2, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$
existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to S^2$ cuyo dato de ramificación sea equivalente a $(\Sigma, S^2, k, d, D, (0))$?

2. Para cada dato de ramificación realizado, ¿cómo se clasifican, excepto por equivalencia, sus posibles realizaciones?

Este problema fue resuelto completamente por Hurwitz, usando la teoría de caracteres de los grupos simétricos (ver [2, 3]). Lo que hoy se conoce como *Problema de Hurwitz* es la siguiente generalización inmediata del problema anterior.

Problema 2.2. *Sea B una variedad 2-dimensional fija* sin frontera *y con las características que se han impuesto a lo largo del artículo.*

1. ¿Para qué datos de ramificación $(\Sigma, B, k, d, D, (0))$ con Σ *conexa*, existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to B$ cuyo dato de ramificación sea equivalente a $(\Sigma, B, k, d, D, (0))$?

2. Para cada dato de ramificación realizado, ¿cómo se clasifican, excepto por equivalencia (resp. equivalencia topológica), sus posibles realizaciones?

Este problema ha sido estudiado intermitentemente desde que Hurwitz publicó sus trabajos a finales del siglo XIX y comienzos del XX. Actualmente el Problema de Hurwitz ha adquirido gran importancia debido a su relevancia en teoría de cuerdas (ver [4]).

A continuación se presenta una muestra de los resultados que se han obtenido acerca de la primera parte (referente a existencia) del Problema de Hurwitz. Algunos de ellos, como se verá más adelante, serán fundamentales en la resolución de las preguntas estudiadas en este artículo.

Teorema 2.1. *(Atribuido a Shephardson en [5].) Si en un dato de ramificación $(\Sigma, B, k, d, D, (0))$, con las condiciones impuestas en el planteamiento del problema 2.2, $\chi(B) \leqslant 0$, entonces dicho dato es realizable.*

Es decir, el problema de existencia es "fácil" si la base *no* es una esfera. El siguiente teorema fue primero anunciado (y probado) por René Thom [6], en el caso en que $\Sigma = S^2$, probado nuevamente en [7] y [8], y generalizado a Σ arbitrario en [9].

Teorema 2.2. *Sea* $(\Sigma, S^2, k, d, D, (0))$ *un dato de ramificación que satisface las condiciones del problema 2.2. Si al menos una de las filas de la matriz de ramificación es de la forma* $d, 0, \ldots, 0$, *entonces dicho dato es realizable.*

Otra importante contribución es el siguiente teorema (ver [9]).

Teorema 2.3. *Si un dato de ramificación* $(\Sigma, S^2, k, d, D, (0))$ *satisface, además de las condiciones del problema 2.2, que* $d \neq 4$ *y* $dk - \sum_{i=1}^{k} l_i \geqslant 3(d-1)$, *entonces dicho dato es realizable. Los únicos datos no realizables cuando* $d = 4$ *son aquellos en que la matriz de ramificación tiene exactamente una fila con la partición* $3, 1$, *y el resto de las filas con la partición* $2, 2$.

3 El problema de E-geografía

El problema de E-geografía es el siguiente. Se fija (i) una 2-variedad B que es suave con frontera (la cual consta de $s \geqslant 0$ componentes conexas), compacta, conexa y orientada; (ii) un entero positivo d; (iii) una matriz $E = (e_{uv})$ con s filas, cada una de las cuales es una partición (posiblemente trivial) de d. Se denota por $\mathcal{C}_E$ a la colección formada por todos los recubrimientos ramificados de B cuya matriz de frontera es igual, excepto por el orden de sus filas, a la matriz E; por $\mathcal{C}_E^c$ a la subcolección de $\mathcal{C}_E$ formada por aquellos recubrimientos ramificados *cuyo dominio es conexo*; por $\mathcal{C}_E^s$ a la subcolección de $\mathcal{C}_E$ formada por aquellos recubrimientos ramificados que son *semiestables*; y por $\mathcal{C}_E^{c,s}$ a la subcolección de $\mathcal{C}_E$ formada por aquellos recubrimientos ramificados que son *semiestables y cuyo dominio es conexo*. Entonces se pregunta:

1. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to B$ en $\mathcal{C}_E^c$, tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

2. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to B$ en $\mathcal{C}_E$ tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

3. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to B$ en $\mathcal{C}_E^s$ tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

4. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to B$ en $\mathcal{C}_E^{c,s}$ tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

Este problema se puede considerar como el estudio de un aspecto de la cuestión de existencia de una generalización del problema de Hurwitz a recubrimientos ramificados $F : \Sigma \to B$ con Σ y B posiblemente con frontera, y Σ posiblemente no conexa.

En este artículo sólo se considerarán estas preguntas en el caso $B = D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, dotado de la orientación inducida por la estructura compleja. Con el propósito de facilitar la expresión de los resultados, *se supondrá en el resto del artículo que* $d \geqslant 2$. Como la frontera de D^2 tiene sólo una componente conexa, la matriz E constará de una única fila, la cual es una partición de un entero positivo d. Por esta razón, a la matriz E se la considerará como una partición de d y se denotará genéricamente por π. En consecuencia, se denotará por $\mathcal{C}_\pi$, $\mathcal{C}_\pi^c$, $\mathcal{C}_\pi^s$, y $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$ a las colecciones correspondientes.

En el resto del artículo se estudiarán las siguientes preguntas.

Problema 3.1. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_\pi^c$, tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

Problema 3.2. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_\pi$, tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

Problema 3.3. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_\pi^s$, tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

Problema 3.4. ¿Para qué pares de enteros (a, b) existe un $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$, tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$?

3.1 Problema 3.1

La solución del primer problema hace un uso fuerte del teorema 2.2. Sea $d \geqslant 2$ un entero y $\pi = (d_1, \ldots, d_{l(\pi)})$ una partición de d, que es propia y posiblemente trivial. Sea $F : \Sigma \to D^2$ un elemento de $\mathcal{C}_\pi^c$ y sea

$$(\Sigma, D^2, k, d, (d_{ij}), (d_1 \ \ldots \ d_{l(\pi)})) \tag{4}$$

su dato de ramificación. A continuación se ve que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $k \geqslant 1$. Si $k = 0$, entonces F sería un recubrimiento no ramificado de grado $d \geqslant 2$ del disco. Pero como el disco es simplemente conexo, la teoría de recubrimientos no ramificados muestra que todo recubrimiento no ramificado del disco cuyo espacio recubridor sea conexo, es equivalente a $id : D^2 \to D^2$. Esto implica que existe un difeomorfismo $H : \Sigma \to D^2$ tal que $id \circ H = F$. En particular, F es un difeomorfismo y su grado es entonces 1. Esta contradicción muestra que no existen recubrimientos ramificados $F : \Sigma \to D^2$ con Σ conexo, grado mayor que uno y carentes de valores críticos. Se sabe que el dato de ramificación (4) satisface

$$\chi(\Sigma) - d(1-k) = \sum_{i=1}^{k} l_i \,,$$

donde l_i es la longitud de la partición que hay en la $i-$ésima fila de (d_{ij}). Como cada una de estas particiones es no trivial, entonces $1 \leqslant l_i \leqslant d-1$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Esto implica que $k \leqslant \sum_{i=1}^{k} l_i \leqslant k(d-1)$. Se concluye que

$$k \leqslant \chi(\Sigma) - d(1-k) \leqslant k(d-1)\,.$$

Equivalentemente,

$$k - d \leqslant -\chi(\Sigma) \leqslant (d-1)k - d$$

ó

$$\frac{-\chi(\Sigma) + d}{d-1} \leqslant k \leqslant -\chi(\Sigma) + d\,. \tag{5}$$

Ahora, Σ es una variedad 2-dimensional con frontera, compacta, orientable y conexa, y su frontera consta de $l(\pi)$ círculos. Entonces su característica de Euler es $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - l(\pi)$, con $g \geqslant 0$. Esto implica que los valores posibles de $-\chi(\Sigma)$ son los números $l(\pi) - 2, l(\pi), l(\pi) + 2, l(\pi) + 4, \ldots$, es decir, los números de la forma $l(\pi) + 2j$ con $j \geqslant -1$.

Lema 3.1. Sea (a, b) un par de enteros tal que $a \geqslant 1$ y

$$\frac{b+d}{d-1} \leqslant a \leqslant b + 2\,. \tag{6}$$

Entonces:

1. Existe una colección $\{\pi_1, \ldots, \pi_a\}$ formada por particiones no triviales de d en la que $\pi_1 = (d)$ y $-b + d = d(2-a) + \sum_{i=1}^{a} l(\pi_i)$.

2. Si $(d_1, \ldots, d_r)$ es una partición no trivial de d, existe una colección $\{\pi_1, \ldots, \pi_{a+1}\}$ formada por particiones no triviales de d en la que $\pi_1 = (d_1, \ldots, d_r)$, $\pi_2 = (d)$, y $-b + r = d(2 - (a+1)) + \sum_{i=1}^{a+1} l(\pi_i)$.

Demostración. Para comenzar, se observa que la longitud l de una partición no trivial de d satisface $1 \leqslant l \leqslant d-1$. Además, dado cualquier número natural l con $1 \leqslant l \leqslant d-1$, existe alguna partición no trivial de d cuya longitud es l.

1. Si $a = 1$ entonces no hay nada que probar. Sea ahora $a \geqslant 2$. Para que exista una colección de particiones como la requerida, es necesario y suficiente que existan enteros $l_2, \ldots, l_a \in [1, d-1]$, tales que

$$- b + d - d(2 - a) = 1 + \sum_{i=2}^{a} l_i \,. \tag{7}$$

Ahora, como $\sum_{i=2}^{a} l_i$ puede, escogiendo apropiadamente $a-1$ particiones de d, hacerse tomar cualquier valor entero en el intervalo $[a-1, (a-1)(d-1)]$, entonces (7) se puede lograr si y sólo si

$$a - 1 \leqslant -b + d - d(2-a) - 1 \leqslant (a-1)(d-1)\,.$$

Finalmente, es fácil ver que esta última relación es equivalente a la condición (6) de la hipótesis.

2. Si $a = 1$ entonces no hay nada que probar. Sea ahora $a \geqslant 2$. Para que exista una colección de particiones como la requerida, es necesario y suficiente que existan enteros $l_3, \ldots, l_{a+1} \in [1, d-1]$ tales que

$$-b + r = d(2 - (a+1)) + r + 1 + \sum_{i=3}^{a+1} l_i$$

o que

$$- b - d(1-a) - 1 = \sum_{i=3}^{a+1} l_i \,. \tag{8}$$

Ahora, escogiendo apropiadamente $a-1$ particiones de d puede hacerse que $\sum_{i=3}^{a+1} l_i$ tome cualquier valor entero en el intervalo $[a-1, (a-1)(d-1)]$. Por tanto (8) se puede lograr si y sólo si

$$a - 1 \leqslant -b - d(1-a) - 1 \leqslant (a-1)(d-1)\,.$$

Finalmente, es fácil ver que esta última relación es equivalente a la condición (6) de la hipótesis, lo que concluye la prueba. □

Aplicando ahora el teorema 2.2 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sea $d \geqslant 2$ y π una partición propia de d. Sea (a, b) un par de enteros que además de las condiciones del lema 3.1, satisface $b = l(\pi) + 2j$, para algún $j \geqslant -1$. Entonces existe $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}^c_\pi$, tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$.*

Demostración. Supóngase en primer lugar que π es trivial. Se sabe que existe una colección $\{\pi_1, \ldots, \pi_a\}$ formada por particiones no triviales de d en la que $\pi_1 = (d)$ y

$$-b + d = d(2 - a) + \sum_{i=1}^{a} l(\pi_i)\,.$$

Esto significa que una 6-tupla $(\Sigma', S^2, a, d, (d_{ij}), (0))$, donde Σ' es una 2-variedad cerrada, orientada y conexa, con $\chi(\Sigma') = -b + d$, y (d_{ij}) es la matriz con a filas y cuya fila i-ésima es π_i, es un dato de ramificación. Este dato satisface las condiciones del teorema 2.2, y por tanto es realizable. Es decir, existe un recubrimiento ramificado $F' : \Sigma' \to S^2$ con dato de ramificación $(\Sigma', S^2, a, d, (d_{ij}), (0))$. Sea $\mathcal{D}'$ un disco cerrado embebido en S^2, que no contiene ningún valor crítico de F' y sea $\Sigma = \Sigma' - F'^{-1}(int\mathcal{D}')$ y $\mathcal{D} = S^2 - int\mathcal{D}'$. Sea $\phi : \mathcal{D} \to D^2$ cualquier difeomorfismo que preserve orientación y $F := \phi \circ (F'|_\Sigma) : \Sigma \to D^2$. El dato de ramificación de esta restricción es la 6-tupla $(\Sigma, D^2, a, d, (d_{ij}), (1\ \ldots\ 1))$. Se puede entonces concluir que existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to D^2$ cuyo dato de ramificación es $(\Sigma, D^2, a, d, (d_{ij}), (1\ \ldots\ 1))$. Ahora, $F'^{-1}(int\mathcal{D}')$ consta de d discos abiertos embebidos en Σ', cuyas clausuras son disjuntas a pares. Entonces

$$\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma') - \chi(F'^{-1}(int\mathcal{D}')) = \chi(\Sigma') - d = (-b + d) - d = -b\,,$$

y obviamente el número de valores críticos de F es a. Finalmente, se observa que F efectivamente pertenece a $\mathcal{C}^c_{(1\ldots1)}$ ya que Σ es conexo, y la matriz de frontera es $(1\ \ldots\ 1)$.

Supóngase ahora que $\pi = (d_1, \ldots, d_{l(\pi)})$ no es trivial. La parte 2 del lema 3.1 dice que existe una colección $\{\pi_1, \ldots, \pi_{a+1}\}$ formada por particiones no triviales de d, tal que $\pi_1 = (d_1, \ldots, d_{l(\pi)})$, $\pi_2 = (d)$ y

$$-b + l(\pi) = d(2 - (a+1)) + \sum_{i=1}^{a+1} l(\pi_i)\,.$$

Esto significa que la 6-tupla $(\Sigma', S^2, a+1, d, (d_{ij}), (0))$, donde Σ' es una 2-variedad suave cerrada, orientada y conexa, con $\chi(\Sigma') = -b + l(\pi)$, y (d_{ij}) es la matriz con $a+1$ filas, cuya i-ésima fila es π_i, es un dato de ramificación. Este dato satisface las condiciones del teorema 2.2, y por tanto es realizable. Esto significa que existe un recubrimiento ramificado $F' : \Sigma' \to S^2$ cuyo dato de ramificación es $(\Sigma', S^2, a+1, d, (d_{ij}), (0))$. Sea $\mathcal{D}'$ un disco cerrado embebido en S^2, tal que $q_1 \in int\mathcal{D}'$ y $\mathcal{D}' \cap \{q_2, \ldots, q_{a+1}\} = \emptyset$. Sea $\Sigma = \Sigma' - F'^{-1}(int\mathcal{D}')$, $\mathcal{D} = S^2 - int\mathcal{D}'$, $\phi : \mathcal{D} \to D^2$ un difeomorfismo que preserve orientación, y $F := \phi \circ (F'|_\Sigma) : \Sigma \to D^2$. El dato de ramificación de F es la 6-tupla $(\Sigma, D^2, a, d, (d'_{ij}), (d_1 \ \ldots \ d_{l(\pi)}))$ donde (d'_{ij}) es la matriz que se obtiene suprimiendo la primera fila de la matriz (d_{ij}). Se puede concluir que existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to D^2$ cuyo dato de ramificación es $(\Sigma, D^2, a, d, (d'_{ij}), (d_1 \ \ldots \ d_{l(\pi)})$. Como $F'^{-1}(int\mathcal{D}')$ consta de $l(\pi)$ discos en Σ' cuyas clausuras son disjuntas a pares, entonces

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma) &= \chi(\Sigma') - \chi(\Phi'^{-1}(int\mathcal{D}'))\\ &= \chi(\Sigma') - l(\pi)\\ &= (-b + l(\pi)) - l(\pi) = -b\,.\end{aligned}$$

Además, F tiene a valores críticos. Finalmente, $F \in \mathcal{C}^c_\pi$ ya que Σ es conexa y su matriz de frontera es $(d_1 \ \ldots \ d_{l(\pi)})$. □

Los siguientes lemas permitirán completar la solución del problema.

Lema 3.2. Dados reales $0 < a < b < 1$, tales que $b - a > 3/4$, existe una función suave $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $\rho(x) = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant a$, $\rho(x) = 0$ si $x \geqslant b$, y $0 \leqslant \rho(x) \leqslant 1$ y $-4 < \rho'(x) \leqslant 0$, si $a \leqslant x \leqslant b$.

Demostración. Sea $h(x) = e^{-1/x}$, si $x > 0$ y $h(x) = 0$, si $x \leqslant 0$, y sea $b(x) = h(4 - x^2)/(h(4 - x^2) + h(x^2 - 1))$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Es rutinario verificar que la función h es suave, y que la función b es también suave, debido a que su numerador y denominador son suaves, y este último nunca se anula. Además, $b(x) = 1$ si $x \leqslant 1$, $0 \leqslant b(x) \leqslant 1$ si $1 \leqslant x \leqslant 2$, y $b(x) = 0$ si $2 < x$. Un cómputo muestra que $-3 < b'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, si $l(x) = 1 + (x - a)/(b - a)$ es la función lineal que envía a a y b en 1 y 2, respectivamente, entonces $\rho(x) = b(l(x))$ es una función que satisface $\rho(x) = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant a$, $\rho(x) = 0$ si $x \geqslant b$ y $0 \leqslant \rho(x) \leqslant 1$ si $a \leqslant x \leqslant b$. Además, como $\rho'(x) = b'(x)\frac{1}{(b-a)}$, se deduce que $-4 < \rho'(x) \leqslant 0$. □

Lema 3.3. Es posible escoger números reales $0 < a < b < 1$ tales que para cada $n \geqslant 3$ y $0 \leqslant t \leqslant 1$ la función $f_t : D^2 \to \mathbb{C}$ definida por $f_t(z) = z^n - nta/2(n-1)\rho(|z|)z^{n-1}$ es un recubrimiento ramificado de D^2 con exactamente dos puntos críticos, $z = 0$ y $z = ta/2$.

Demostración. Sea b cualquier real que satisfaga $3/4 < b < (4/7)^{\frac{1}{n-1}}$ y sea a un real tal que $0 < a < b$ y $b - a > 3/4$. Estos reales existen ya que si $n \geqslant 3$ entonces $4/7 > (3/4)^2 \geqslant (3/4)^{n-1}$.

El resto de la demostración se dividirá en tres afirmaciones y sus respectivas verificaciones.

Primera afirmación: $f_t(D^2) \subset D^2$, es decir, que para todo $z \in D^2$

$$\left| z^n - \frac{nta}{2(n-1)}\rho(|z|)z^{n-1} \right| \leqslant 1\,. \tag{9}$$

La desigualdad (9) se cumple para todo $|z| > b$, ya que fuera del disco de radio b, $\rho(|z|) = 0$ y en consecuencia $f_t(z) = z^n$. Por otro lado, si $|z| \leqslant b$, como $n/(2(n-1)) \leqslant 3/4$, se cumple que

$$\left| z^n - \frac{nta}{2(n-1)}\rho(|z|)z^{n-1} \right| \leqslant b^{n-1}(b + 3/4) < 1\,,$$

donde esta última desigualdad se garantiza por la forma como se ha escogido b.

Segunda afirmación: cada f_t carece de valores críticos por fuera del disco $|z| < a$.

Si f_t se escribe en coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$, un cálculo muestra que

$$\frac{\partial f_t}{\partial \theta} = niz^{n-1}[z - \frac{ta}{2}\rho(|z|)]$$

$$\frac{\partial f_t}{\partial r} = \frac{n}{r} z^{n-1} [z - \frac{ta}{2}\rho(|z|) - \frac{ta}{2(n-1)} \, |z| \, \rho'(|z|)] \, .$$

Luego $z \neq 0$ es un punto crítico si y sólo si existe un real λ con $\partial f_t / \partial\theta = \lambda \partial f_t / \partial r$ ó $\lambda \partial f_t / \partial\theta = \partial f_t / \partial r$ lo cual equivale a

$$i[z - \frac{ta}{2}\rho(|z|)] = \frac{\lambda}{r}[z - \frac{ta}{2}\rho(|z|) - \frac{ta}{2(n-1)} \, |z| \, \rho'(|z|)]$$

ó

$$\lambda i[z - \frac{ta}{2}\rho(|z|)] = r[z - \frac{ta}{2}\rho(|z|) - \frac{ta}{2(n-1)} \, |z| \, \rho'(|z|)] \, .$$

Esto equivale a que los vectores

$$z - \frac{ta}{2}\rho(|z|) \quad \text{y} \quad z - \frac{ta}{2}\rho(|z|) - \frac{ta}{2(n-1)} \, |z| \, \rho'(|z|)$$

sean ortogonales. Sean $A(z) = \frac{ta}{2(n-1)} \, |z| \, \rho'(|z|)$, $B(z) = \frac{ta}{2}\rho(|z|)$ y $\omega(z) = z - B(z)$. Se observa que $A(z) \leqslant 0$ y $0 \leqslant B(z) \leqslant a/2$. Se desea que $\omega(z)$ sea ortogonal a $\omega(z) - A(z)$. Como $A(z)$ es un número real, esto equivale a afirmar que $|\omega(z)|^2 - A(z)\,\mathrm{Re}(\omega(z)) = 0$. Sea $C_r(0)$ un círculo fijo centrado en el origen y de radio $r \geqslant a$. Como sobre este círculo las funciones $A(z)$ y $B(z)$ son constantes, estas se denotarán simplemente por A y B. El locus de la ecuación $|\omega|^2 - A\,\mathrm{Re}(\omega) = 0$ es un círculo de centro $A/2$ y radio $|A|/2$. Por tanto el locus de la ecuación $|z - B|^2 - A\,\mathrm{Re}(z - B) = 0$ es un círculo, $C_{(A/2)+B}(|A|/2)$, de centro $(A/2) + B$ y radio $|A|/2$. De aquí que cualquier punto crítico de f_t en $C_r(0)$ deberá estar en la intersección de $C_r(0)$ y $C_{(A/2)+B}(|A|/2)$. Para ver que dicha intersección es vacía, se verifica a continuación que los puntos de intersección de $C_{(A/2)+B}(|A|/2)$ con el eje real están en el intervalo $(-a, a)$ y por lo tanto este círculo está contenido en el interior del disco cuya frontera es C_r. $C_{(A/2)+B}(|A|/2)$ corta el eje real en los puntos B y $A + B$. Ahora, $B = \frac{ta}{2}\rho(r) < \frac{a}{2} < a$. Por otro lado, la desigualdad

$$A + B = \frac{at\rho'(r)r}{2(n-1)} + \frac{at\rho(r)}{2} > -a$$

equivale a la desigualdad

$$\frac{t\rho'(r)r}{2(n-1)} + \frac{t\rho(r)}{2} + 1 > 0 \, .$$

Si $t = 0$ esta desigualdad es inmediatamente cierta. Si $t \neq 0$ esta desigualdad es equivalente a que

$$-\frac{\rho'(r)r}{2(n-1)} < \frac{1}{t} + \frac{\rho(r)}{2}\,.$$

Como $\rho'(r) \leqslant 0$, el término de la izquierda es precisamente $\frac{r}{2(n-1)}\left|\rho'(r)\right|$. Como $|\rho'(r)| < 4$, $\rho(r) \geqslant 0, r < 1$ y $n \geqslant 3$, entonces

$$\frac{r\left|\rho'(r)\right|}{2(n-1)} < \frac{(4+2\rho(r))}{2(n-1)} \leqslant \frac{4+2\rho(r)}{4} = 1 + \frac{\rho(r)}{2} \leqslant \frac{1}{t} + \frac{\rho(r)}{2},\ t \neq 0\,,$$

lo cual demuestra que $-a < A + B$. Finalmente, como $A \leqslant 0$ se tiene que $A + B \leqslant B < a$ y en consecuencia que

$$-a < A + B \leqslant B < a\,.$$

Ahora, en el disco $|z| < a$ la función $\rho(|z|)$ toma el valor constante 1 y en consecuencia $f_t(z) = z^n - nta/2(n-1)z^{n-1}$ tiene un punto crítico en un z en dicho disco si y sólo si

$$nz^{n-1} - \frac{nta}{2}z^{n-2} = nz^{n-2}(z - ta/2) = 0\,.$$

Las soluciones de esta ecuación que satisfacen $|z| < a$ son $z = 0$ y $z = ta/2$.

Tercera y última afirmación: $f_t : D^2 \to D^2$ es un recubrimiento ramificado. Nótese en primer lugar que f_t, vista como función del espacio topológico D^2 en sí mismo, es una función abierta, es decir que envía abiertos relativos en abiertos relativos. Basta verificar que para cada $z \in D^2$ y cada vecindad abierta relativa $U \subset D^2$ de z, la imagen $f_t(U)$ contiene una vecindad abierta relativa $V \subset D^2$ de $f_t(z)$. Para esto se escoge un real c tal que $0 < c < a$, y se consideran tres casos. Si $|z| < a$ entonces se satisface la condición puesto que la restricción de f_t a este disco abierto es una función holomorfa y por tanto abierta. Si $c < |z| < 1$ entonces la condición se satisface puesto que en este anillo abierto la función f_t no tiene valores críticos por lo que es un difeomorfismo local y por tanto es abierta. Si $|z| = 1$ entonces se puede ver directamente, usando el hecho de que en la región $\{w : b < |w|\}$ la función f_t coincide con la función z^n, que también se cumple la condición. Ahora, como D^2 es compacto y f_t continua, $f_t(D^2)$ es un subconjunto compacto de D^2, que además es un abierto relativo de D^2, por ser la imagen del abierto relativo D^2. Como D^2 es Hausdorff, $f_t(D^2)$ es cerrado. Como $f_t(D^2)$ no es vacío, entonces $f_t(D^2) = D^2$ por la conexidad de D^2. Esto muestra que $f_t : D^2 \to D^2$ es sobreyectiva, y por tanto f_t es un recubrimiento ramificado. □

El lema anterior proporciona una deformación entre $f_0(z) = z^n$ y $f_1(z) = z^n - \frac{na}{2(n-1)}\rho(|z|)z^{n-1}$, un recubrimiento ramificado de D^2 con dos puntos críticos $z = 0$ y $z = a/2$. Es importante observar que los valores críticos correspondientes $f_1(0) = 0$ y $f_1(a/2) = (a/2)^n(1 - \frac{n}{n-1})$ son distintos.

Lema 3.4. Es posible escoger números reales $0 < a < b < 1$ tales que para cada $n \geqslant 2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ y cualquier real z_0 que satisfaga $0 < z_0 < a^{n-1}$, la función $f_t : D^2 \to D^2$ definida por $f_t(z) = z^n + \frac{ta}{2}\rho(|z|)z_0$ es un recubrimiento ramificado con exactamente un valor crítico, $z = taz_0/2$, el cual es distinto de cero.

Demostración. Sea b cualquier real que satisfaga $3/4 < b < 7/8$ y $a > 0$ un real tal que $b - a > 3/4$. Es fácil ver que estas condiciones implican que $b < (1 - \frac{z_0}{2})^{\frac{1}{n}}$, para cada $n \geqslant 2$ y $0 < z_0 < a^{n-1}$.

El resto de la prueba se dividirá en afirmaciones seguidas de sus correspondientes verificaciones.

Primera afirmación: $f_t(D^2) \subset D^2$, es decir, para todo $z \in D^2$ se cumple que

$$\left| z^n + \frac{ta}{2}\rho(|z|)z_0 \right| \leqslant 1 \,.$$

La desigualdad anterior se cumple para todo z que satisface $|z| > b$, ya que fuera del disco de radio b, $\rho(|z|) = 0$ y en consecuencia $f_t(z) = z^n$. Por otro lado, si $|z| \leqslant b$, se cumple que

$$\left| z^n + \frac{ta}{2}\rho(|z|)z_0 \right| \leqslant b^n + \frac{z_0}{2} < 1 \,,$$

donde esta última desigualdad se garantiza ya que $b < (1 - \frac{z_0}{2})^{1/n}$.

Segunda afirmación: cada f_t carece de puntos críticos por fuera del disco $|z| < a$. Si f_t se escribe en coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$, un cálculo muestra que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_t}{\partial \theta} &= niz^n \\ \frac{\partial f_t}{\partial r} &= \frac{n}{r}z^n + \frac{atz_0}{2}\rho'(|z|)\,.\end{aligned}$$

Luego $z \neq 0$ es un punto crítico de f_t si y sólo si existe un real λ con $\partial f_t/\partial\theta = \lambda\partial f_t/\partial r$ ó $\lambda\partial f_t/\partial\theta = \partial f_t/\partial r$ y esto a su vez equivale a que los vectores $\omega(z) = z^n$ y $\omega(z) - A(z)$, donde $A(z) = -\frac{atz_0}{2n}|z|\,\rho'(|z|)$, sean ortogonales. A continuación se ve que esto nunca ocurre para z en un círculo $C_r(0)$ de radio $r \geqslant a$ y centrado en el origen. Para los puntos de este círculo $A(z)$ es una constante no positiva que se denotará simplemente por A. Como en la prueba del lema anterior, el conjunto de todos los z para los cuales $\omega(z) = z^n$ y $\omega(z) - A$ son ortogonales es exactamente el conjunto de aquellos $z \in C_r(0)$ tales que z^n esté contenido en el círculo $C_{|A|/2}(A/2)$, con centro $A/2$ y radio $|A|/2$. Pero como $z_0 < a^{n-1}, |\rho'(|z|)| < 4$ y $n \geqslant 2$, se tiene que $|A| \leqslant az_0 < a^n \leqslant r^n$ y en consecuencia dicho círculo está contenido en el interior del disco de radio r^n y centrado en el origen, y por tanto $C_{r^n}(0) \cap C_{|A|/2}(A/2) = \emptyset$, lo que demuestra la afirmación.

Ahora, en el disco $|z| < a$ la función f_t es igual a $z^n + \frac{ta}{2}z_0$, que es holomorfa y tiene como puntos críticos aquellos valores para los cuales $nz^{n-1} = 0$, es decir, solamente el valor $z = 0$. Como $f_t(0) = ta/2z_0$ se deprende que éste es el único valor crítico de f_t.

Finalmente, f_t es un recubrimiento ramificado por la misma razón que en el lema anterior. $\square$

Lema 3.5. Sea $F : \Sigma \to D^2$ un recubrimiento ramificado en $\mathcal{C}_\pi$ y que no es simple. Entonces existe otro recubrimiento ramificado $F' : \Sigma \to D^2$ también en $\mathcal{C}_\pi$ cuyo número de valores críticos excede en exactamente 1 al número de valores críticos de F.

Demostración. Si se supone que $F : \Sigma \to D^2$ no es simple, entonces existe un punto crítico cuyo grado local es $n \geqslant 3$ ó existen dos puntos críticos cuyas imágenes coinciden.

Supóngase que existe un punto crítico $p \in int\Sigma$ cuyo grado local es $n \geqslant 3$. Existen entonces embebimientos que preservan orientación $f : D^2 \to int\Sigma$ y

$g : D^2 \to intD^2$, con $f(0) = p$ y $g(0) = F(p)$, y tales que $F(p)$ es el único valor crítico de F contenido en $g(D^2)$, y $g \circ F_n = F \circ f$, donde $F_n : D^2 \to D^2$ es el recubrimiento estándar definido por $F_n(z) = z^n$. Sea

$$F'(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \notin Im(f) \\ \\ g \circ f_1 \circ f^{-1}(x) & \text{si } x \in Im(f) \end{cases}$$

donde f_1 es la función construida en el lema 3.3. Esta función $F' : \Sigma \to D^2$ es claramente un recubrimiento ramificado en $\mathcal{C}_\pi$, el cual tiene exactamente un valor crítico más que el recubrimiento ramificado original F.

Supóngase ahora que F tiene dos puntos críticos p_1 y p_2 tales que $F(p_1) = F(p_2)$. Existen embebimientos $f : D^2 \to int\Sigma$ y $g : D^2 \to D$ que preservan orientación, con $f(0) = p_1$ y $g(0) = \Phi(p_1)$, y tales que $F(p_1)$ es el único valor crítico de F contenido en $g(D^2)$ y $g \circ F_m = F \circ f$, para un cierto $m \geqslant 2$. Tomando $n = m$, sean a, b, z_0 escogidos como en el lema 3.4. Sea

$$F'(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \notin im(f) \\ \\ g \circ f_1 \circ f^{-1}(x) & \text{si } x \in im(f) \end{cases}$$

donde f_1 es la función construida en el lema 3.4. Resulta inmediato verificar que la función $F' : \Sigma \to D^2$ es un recubrimiento ramificado en $\mathcal{C}_\pi$, que tiene exactamente un valor crítico más que F. □

El siguiente teorema contiene la solución completa del problema que se está considerando.

Teorema 3.2. *Sea $d \geqslant 2$ y π una partición de d que es propia. Sea (a, b) un par de enteros que satisface las condiciones*

$$\frac{b+d}{d-1} \leqslant a \leqslant b + d\,,$$

y

$$b = l(\pi) + 2j, \quad j \geqslant -1\,.$$

Entonces existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}^c_\pi$ tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$.

Demostración. Ya se sabe que el teorema es cierto para todo par (a,b) que satisface las condiciones $\frac{b+d}{d-1} \leqslant a \leqslant b+2$ y $b = l(\pi)+2j$ con $j \geqslant -1$. Se observa que un elemento $G : Y \to D^2$ de $\mathcal{C}_\pi^c$ es simple si y sólo si $-\chi(Y) = k - d$. Sea (a_0, b_0) un par de enteros fijos que satisfagan la hipótesis y que además satisfagan $b_0 + 2 < a_0 \leqslant b_0 + d$. Sea $F' : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_\pi^c$ tal que $-\chi(\Sigma) = b_0$ y $\frac{d+b_0}{d-1} \leqslant k' \leqslant b_0+2$, donde k' es el número de valores críticos de F'. Si se aplica $a_0 - k'$ veces el proceso descrito en el lema 3.3, se obtiene un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_\pi^c$ con a_0 valores críticos. El hecho de que el proceso del lema 3.3 se pueda aplicar $a_0 - k'$ veces, se debe a que todos los recubrimientos $F^{(i)}$ obtenidos en el proceso (con la posible excepción del último) son tales que ningún par $(k^{(i)}, -\chi(\Sigma))$ satisface la igualdad $-\chi(\Sigma) = k^{(i)} - d$, donde $k^{(i)}$ denota el número de valores críticos de $F^{(i)}$, lo que hace que no sean simples. □

3.2 Problema 3.2

Al igual que en el problema anterior, la solución se basa esencialmente en el teorema 2.2. Sea $d \geqslant 2$ un entero y $\pi = (d_1, \ldots, d_{l(\pi)})$ una partición de d. En lo que sigue se usará el siguiente lema.

Lema 3.6.

1. Si $F : \Sigma \to D^2$ es un elemento de $\mathcal{C}_\pi^c$ tal que $k = 0$, entonces F es un difeomorfismo y π es trivial.

2. Si $F : \Sigma \to D^2$ es un elemento de $\mathcal{C}_\pi^c$ tal que $k = 1$, entonces $l(\pi) = 1$, $\chi(\Sigma) = 1$ y (por tanto) Σ es difeomorfo a D^2.

3. Si $F : \Sigma \to D^2$ es un elemento de $\mathcal{C}_\pi$ tal que $k = 1$, entonces $\chi(\Sigma) = l(\pi)$ y Σ es difeomorfo a la unión disjunta de $l(\pi)$ copias de D^2. Además, los grados de las restricciones de F a cada disco forman la partición π.

Demostración.

1. El que F no tenga valores críticos implica que $F : \Sigma \to D^2$ es un recubrimiento conexo de D^2. Pero al ser D^2 simplemente conexo, F debe ser un difeomorfismo. Esto implica que Σ es difeomorfo a D^2 y que π es trivial.

2. Como Σ es conexo, entonces $-\chi(\Sigma) \geqslant l(\pi) - 2$. Además se debe cumplir que
$$-\chi(\Sigma) \leqslant (d-1)k - d = (d-1) - d = -1\,.$$
Entonces $l(\pi) - 2 \leqslant -1$ ó $l(\pi) \leqslant 1$. Esto implica que $l(\pi) = 1$, y que $-1 \leqslant -\chi(\Sigma) \leqslant -1$.

3. Sea $\Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_r \cup \Sigma_{r+1} \cup \ldots \cup \Sigma_{r+s}$ la descomposición en componentes conexas de Σ, y supóngase que la restricción de F a cada Σ_i con $1 \leqslant i \leqslant r$ tiene cero valores críticos y que la restricción de F a cada Σ_i con $r+1 \leqslant i \leqslant r+s$ tiene un solo valor crítico. Por los numerales 1 y 2, cada Σ_i con $1 \leqslant i \leqslant r+s$ es difeomorfa a un disco y por tanto su frontera consta de un solo círculo. Como $F : \Sigma \to D^2$ pertenece a $\mathcal{C}_\pi$, la frontera de Σ consta de $l(\pi)$ círculos. Esto implica que Σ es difeomorfa a la unión disjunta de $l(\pi)$ discos. El hecho de que los grados de las restricciones de F a cada uno de los $l(\pi)$ discos formen la partición π de d, se debe a que $F \in \mathcal{C}_\pi$ y a que el grado de un recubrimiento ramificado $G : Y \to D^2$ coincide con el grado de su restricción $G : \partial Y \to \partial D^2$. $\square$

Sea $(\Sigma, D^2, k, d, (d_{ij}), (d_1 \ \ldots \ d_{l(\pi)}))$ un dato de ramificación con Σ no necesariamente conexo. Resulta inmediato verificar que en este caso también se satisface la relación (5). Ahora, como Σ es una 2-variedad suave con frontera, orientada y compacta, y su frontera consta de $l(\pi)$ círculos, su característica de Euler tiene la forma $\chi(\Sigma) = \sum_{i=1}^{r}(2-2g_i) - l(\pi)$, donde r es el número de componentes conexas de Σ y g_i es el género de la i-ésima componente. Como cada componente conexa de Σ contiene al menos una componente conexa de la frontera de Σ, entonces $r \leqslant l(\pi)$. En consecuencia
$$-\chi(\Sigma) = -l(\pi) + 2\left[(l(\pi) - r) + \sum_{i=1}^{r} g_i\right],$$
y por tanto $-\chi(\Sigma) = -l(\pi) + 2j$, con $j \geqslant 0$. En la sección anterior se vio que para todo par de enteros (a, b) tal que $a \geqslant 1$,
$$\frac{b+d}{d-1} \leqslant a \leqslant b+d \tag{10}$$
y $b = l(\pi) + 2j$ con $j \geqslant -1$, existe un $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}^c_\pi$ tal que $k = a$ y $-\chi(\Sigma) = b$. Esto significa que para resolver el problema 3.2 basta estudiar

qué pares de enteros (a, b) que satisfacen la desigualdad (10) y $b = -l(\pi) + 2j$ donde $0 \leqslant j \leqslant l(\pi) - 2$ son realizados por elementos de $\mathcal{C}_\pi$.

Supóngase en primer lugar que π es trivial. El par $(0, -d)$ es realizado por el elemento de $\mathcal{C}_{(1,\ldots,1)}$ cuyo dominio es la unión disjunta de d copias de D^2 y que se define como la función identidad en cada una de dichas copias. Además, ningún par con $a = 1$ puede ser realizado por un elemento de $\mathcal{C}_{(1,\ldots,1)}$. En efecto, según el lema 3.6 su dominio estaría formado por d discos, y el grado de su restricción a cada uno de estos discos sería 1. Pero esto implica que cada una de estas restricciones carecería de valores críticos, lo cual contradice la suposición que se ha hecho. Ahora, todos los pares de la forma $(a = 2, b)$ donde $b = -d + 2j$ con $1 \leqslant j \leqslant d - 2$, satisfacen la desigualdad (10). A continuación se ve que todos estos pares son realizados.

Teorema 3.3. *Sea (a, b) un par de enteros con $a = 2$ y $b = -d + 2j$ con $1 \leqslant j \leqslant d - 2$. Entonces existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_{(1,\ldots,1)}$ tal que $k = 2$ y $-\chi(\Sigma) = b$.*

Demostración. En primer lugar se observa que, por el teorema 3.2, todo par de la forma $(2, d - 2)$ con $d \geqslant 2$ es realizado por un elemento de $\mathcal{C}^c_{(1,\ldots,1)}$. Para cada $d \geqslant 2$ sea $F_d : \Sigma_d \to D^2$ uno de estos elementos cuyos valores críticos sean 0 y 1/2 (Σ_d es difeomorfa a una esfera con d huecos). Sea F_1 el difeomorfismo identidad de D^2 en sí mismo, y $\Sigma_1 = D^2$. Sea $(d_1, \ldots, d_{d-j})$ una partición de d, de longitud $d - j$. El número de sumandos satisface $2 \leqslant d - j \leqslant d - 1$ y por tanto al menos uno de los sumandos es distinto de 1. Sea

$$F : \Sigma := \Sigma_{d_1} \cup \ldots \cup \Sigma_{d_{d-j}} \to D^2$$

el recubrimiento ramificado cuya restricción a Σ_{d_i} es F_{d_i}. Entonces F realiza al par $(2, -d + 2j)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma) &= \sum_{i=1}^{d-j} \chi(\Sigma_{d_i}) = \sum_{i=1}^{d-j} (-d_i + 2) \\ &= -d + 2(d - j) = d - 2j \,, \end{aligned}$$

y $k = 2$, ya que al menos uno de los F_{d_i} tiene dos valores críticos, F_1 no tiene valores críticos, y se ha supuesto que todos los F_d con $d \neq 1$ tienen los mismos dos valores críticos 0 y 1/2. $\square$

Supóngase ahora que π no trivial. En primer lugar, se tiene que como el único par de la forma $(a = 0, b)$ que satisface (10) es el par $(0, -d)$, y $-l(\pi) > -d$, todo par (a, b) realizado por un elemento de $\mathcal{C}_\pi$ debe satisfacer $a \geqslant 1$. En segundo lugar, el par $(1, -l(\pi))$ es realizado por el elemento de $\mathcal{C}_\pi$ definido de la siguiente manera. Para cada $n \geqslant 1$, sea $F_n : \overline{D} \to D^2$ el recubrimiento ramificado general $F_n(z) = z^n$. Sea $F : \Sigma \to D^2$ el recubrimiento ramificado cuyo dominio es la unión disjunta de $l(\pi)$ copias de D^2, y cuya restricción al i-ésimo disco coincide con F_{d_i}. Claramente $\chi(\Sigma) = l(\pi)$, y $k = 1$, ya que no todos los d_i son unos. Ahora, ningún par de la forma $(a = 1, b)$ donde $b = -l(\pi) + 2j$ con $1 \leqslant j \leqslant l(\pi) - 2$ puede ser realizado. En efecto, sea $F : \Sigma \to D^2$ un elemento de $\mathcal{C}_\pi$ que lo realizara. Según el lema 3.6, Σ constaría de $l(\pi)$ discos, y por tanto $b = -\chi(\Sigma) = -l(\pi)$. Nótese que todo par $(a = 2, b)$ donde $b = -l(\pi) + 2j$ con $1 \leqslant j \leqslant l(\pi) - 1$ satisface la desigualdad (10). A continuación se ve que todos estos pares se pueden realizar.

Teorema 3.4. *Sea (a, b) un par de enteros con $a = 2$ y $b = -l(\pi) + 2j$ con $1 \leqslant j \leqslant l(\pi) - 2$. Entonces existe un recubrimiento ramificado $F : \Sigma \to D^2$ en $\mathcal{C}_\pi$ tal que $k = 2$ y $-\chi(\Sigma) = b$.*

Demostración. La prueba comienza con la introducción de los bloques de construcción de los elementos de $\mathcal{C}_\pi$ que se pide exhibir. Por el resultado de la sección anterior, se sabe que si $e \geqslant 2$ y τ es una partición de e, entonces el par de enteros $(2, l(\tau) - 2)$ es realizado por un elemento de $\mathcal{C}^c_\tau$ excepto si $e = 2$ y $l(\tau) = 1$. Sea $F_{e,\tau} : \Sigma_{e,\tau} \to D^2$ una realización cuyos valores críticos sean 0 y 1/2. $\Sigma_{e,\tau}$ es difeomorfo a una esfera con $l(\tau)$ huecos. Para cada $n \geqslant 1$, sea F_n el recubrimiento ramificado definido en el párrafo anterior. F_1 realiza al par $(0, -1)$, y F_n realiza al par $(1, -1)$ si $n \geqslant 2$.

Sea $\pi = (d_1, \ldots, d_{l(\pi)})$,

$$i_0 = 1 < i_1 < \cdots < i_{l(\pi)-j-1} < i_{l(\pi)-j} = l(\pi)$$

una secuencia de índices y $\pi_k := (d_{i_{k-1}}, \ldots, d_{i_k - 1})$ para cada $1 \leqslant k \leqslant l(\pi) - j - 1$, y $\pi_{l(\pi)-j} := (d_{i_{l(\pi)-j-1}}, \ldots, d_{i_{l(\pi)-j}})$. Cada π_k es una partición de un número natural, el cual se denotará por e_k. Sea $F : \Sigma \to D^2$ un recubrimiento ramificado, donde Σ tiene $l(\pi) - j$ componentes conexas $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{l(\pi)-j}$, de la siguiente manera. La restricción de F a Σ_k es igual a i) F_{e_k,τ_k} si $e_k \neq 2$ ó $l(\tau_k) \geqslant 2$; ii) F_2 si $e_k = 2$ y $l(\tau_k) = 1$; iii) F_1 si $e_k = 1$. Resulta inmediato verificar que F pertenece a $\mathcal{C}_\pi$, y $-\chi(\Sigma) = -l(\pi) + 2j = b$. Ahora, F tiene $k = 2$ valores críticos. En efecto, como $l(\pi) - j \leqslant l(\pi) - 2$, debe haber alguna partición π_k con $l(\pi_k) \geqslant 2$. Esto hace que $l(\tau_k) \geqslant 2$, y que por tanto la restricción de F a Σ_k tenga dos valores críticos 0 y 1/2. Cada una de las otras restricciones de F a componentes conexas de Σ tienen ó estos mismos valores críticos, ó el 0 como único valor crítico, ó ningún valor crítico. Esto concluye la demostración. $\square$

Ya es posible enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.5. *Sea $d \geqslant 2$ y π una partición de d. Entonces*

1. *Si π es trivial, un par de enteros (a, b) es realizado por un elemento de $\mathcal{C}_{(1,\dots,1)}$ si y sólo si*

   (a) $a \geqslant 2$, $\frac{b+d}{d-1} \leqslant a \leqslant b + d$, $b = -d + 2j$ *con* $j \geqslant 1$, *ó*

   (b) $(a, b) = (0, -d)$.

2. *Si π no es trivial, un par de enteros (a, b) es realizado por un elemento de $\mathcal{C}_\pi$ si y sólo si*

   (a) $a \geqslant 2$, $\frac{b+d}{d-1} \leqslant a \leqslant b + d$, $b = -l(\pi) + 2j$ *con* $j \geqslant 1$, *ó*

   (b) $(a, b) = (1, -l(\pi))$.

Demostración. La demostración se obtiene inmediatamente aplicando el lema 3.3. $\square$

3.3 Problemas 3.3 y 3.4

Aunque los resultados obtenidos en este caso son parciales, éstos resultan ser muy significativos para el propósito general de esta investigación, explicada en la Introducción.

Sea $d \geqslant 2$ y $\pi = (d_1, \dots, d_{l(\pi)})$ una partición de d. Sea $F : \Sigma \to D^2$ un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$ con dato de ramificación $(\Sigma, D^2, k, d, (d_{ij}), (d_1 \ \dots \ d_{l(\pi)}))$, donde cada $d_{ij} \leqslant 2$. Se tiene que $\chi(\Sigma) = d(1 - k) + \sum_{i=1}^{k} l_i$, donde l_i es la longitud de la partición de d que ocupa la i-ésima fila de la matriz de ramificación. Supóngase que d es par. En este caso $d/2 \leqslant l_i \leqslant d-1$ y por tanto

$$\left(\frac{d}{2}\right) k \leqslant \chi(\Sigma) - d(1-k) \leqslant k(d-1)$$

ó

$$\frac{-\chi(\Sigma)+d}{d/2} \leqslant k \leqslant -\chi(\Sigma)+d\,.$$

Si d es impar entonces $(d+1)/2 \leqslant l_i \leqslant d-1$, y por tanto

$$\left(\frac{d+1}{2}\right) k \leqslant \chi(\Sigma) - d(1-k) \leqslant k(d-1)$$

ó

$$\frac{-\chi(\Sigma)+d}{((d-1)/2)} \leqslant k \leqslant -\chi(\Sigma)+d\,.$$

Por otra parte, $-\chi(\Sigma)$ es de la forma $l(\pi)+2j$ donde $j \geqslant -1$. Entonces, si d es par,

$$\frac{b+d}{d/2} \leqslant a \leqslant b+d, \quad b = l(\pi)+2j \text{ donde } j \geqslant -1 \tag{11}$$

son condiciones necesarias para que un par (a,b) sea realizado por un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$, y si d es impar,

$$\frac{b+d}{((d-1)/2)} \leqslant a \leqslant b+d, \quad b = l(\pi)+2j \text{ donde } j \geqslant -1 \tag{12}$$

son condiciones necesarias para que un par (a,b) sea realizado por un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$.

Teorema 3.6. *Sea (a,b) un par de enteros tal que $b \geqslant l(\pi)+d-3$. Entonces*

1. *Si d es par y distinto de 4, y (a,b) satisface las condiciones (11), entonces (a,b) es realizable por un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$, y por tanto por un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{s}$.*

2. *Si d es impar y (a,b) satisface las condiciones (12), entonces (a,b) es realizable por un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$, y por tanto por un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{s}$.*

Demostración.

1. Supóngase que π no es trivial. Entonces existe un dato de ramificación $(\Sigma', S^2, a+1, d, (d_{ij}), (0))$ tal que i) $\chi(\Sigma') = -b + l(\pi)$, ii) $d_{1j} = d_j$ para cada $1 \leqslant j \leqslant l(\pi)$, iii) $d_{ij} \leqslant 2$ siempre que $i \geqslant 2$, y iv) $(a+1)d - \sum_{i=1}^{a+1} l_i \geqslant 3(d-1)$. En efecto, como b es de la forma $l(\pi) + 2j$ con $j \geqslant -1$ (de hecho, con $j \geqslant (d-3)/2$), entonces existe Σ' *conexa y sin frontera*, tal que $\chi(\Sigma') = -b + l(\pi)$. Ahora, para que exista un dato de ramificación $(\Sigma', S^2, a+1, d, (d_{ij}), (0))$ que satisfaga ii) y iii), es necesario y suficiente que $a(d/2) \leqslant -b - d(1-a) \leqslant a(d-1)$. Pero esta última condición es consecuencia inmediata de la hipótesis. Ahora, el dato de ramificación $(\Sigma', S^2, a+1, d, (d_{ij}), (0))$ también satisface la condición iv). La condición iv) equivale a

   $$(a+1)d - (\chi(\Sigma') - d(2 - (a+1))) \geqslant 3(d-1)\,,$$

   la cual a su vez equivale a la condición $b \geqslant l(\pi) + d - 3$. Esta última condición es parte de la hipótesis.

   Por el teorema 2.3, el dato $(\Sigma', S^2, a+1, d, (d_{ij}), (0))$ es realizable. Sea $F' : \Sigma' \to S^2$ una realización de este dato, y sea $\mathcal{D}'$ un disco cerrado embebido en S^2 tal que el valor crítico $q_1 \in int\mathcal{D}'$, y $\{q_2, \ldots, q_{a+1}\} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. Sea $\Sigma := \Sigma' - F'^{-1}(int\mathcal{D}')$ y $\mathcal{D} := S^2 - int\mathcal{D}'$. Sea $\phi : \mathcal{D} \to D^2$ cualquier difeomorfismo que preserve orientación, y sea $F : \Sigma \to \mathcal{D}$ la composición $\phi \circ (F'|_\Sigma)$. F es una realización del dato $(\Sigma, D^2, a, d, (d'_{ij}), (d_1 \ \ldots \ d_{l(\pi)}))$, donde (d'_{ij}) es la matriz que se obtiene suprimiendo la primera fila de la matriz (d_{ij}). Finalmente,

   $$\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma') - l(\pi) = (-b + l(\pi)) - l(\pi) = -b$$

   y $F \in \mathcal{C}_\pi^{c,s}$. Se concluye que (a, b) es realizado por un elemento de $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$.

2. Supóngase ahora que π es trivial. La demostración en este caso es muy similar a la anterior, sólo que empieza con la verificación de que existe un dato de ramificación $(\Sigma', S^2, a, d, (d_{ij}), (0))$ que satisface i) $-\chi(\Sigma') = -b + d$, ii) cada $d_{ij} \leqslant 2$, y iii) $ad - \sum_{i=1}^{a} l_i \geqslant 3(d-1)$, la cual es esencialmente igual a la verificación análoga del numeral 1. $\square$

4 Conclusión

A continuación se definen dos funciones análogas a la función k_π presentada en la Introducción. Para cada entero χ sea

$$\mathcal{C}_{\pi,\chi} := \{F : \Sigma \to D^2 \in \mathcal{C}_\pi : -\chi(\Sigma) = -\chi\},$$

y

$$\mathcal{C}^c_{\pi,\chi} := \{F : \Sigma \to D^2 \in \mathcal{C}^c_\pi : -\chi(\Sigma) = -\chi\}.$$

Para aquellos valores de χ para los que $\mathcal{C}_{\pi,\chi}$ no es vacía, sea $k_\pi(-\chi)$ como el mínimo de los números de valores crt́icos de los elementos de $\mathcal{C}_{\pi,\chi}$. De la misma manera, para aquellos valores de χ para los que $\mathcal{C}^c_{\pi,\chi}$ es no vacía, se define $k^c_\pi(-\chi)$ como el mínimo de los números de valores críticos de los elementos de $\mathcal{C}^c_{\pi,\chi}$. Como consecuencia inmediata del teorema 3.2 y del teorema 3.5, el dominio de la función k^c_π está formado por los enteros de la forma $l(\pi) + 2j$, con $j \geqslant -1$, y $k^c_\pi(-\chi)$ es el menor entero mayor o igual al número $\frac{-\chi+d}{d-1}$; el dominio de la función k_π está formado por los enteros de la forma $-l(\pi) + 2j$ con $j \geqslant 0$ y $k_\pi(-\chi)$ es el menor entero mayor o igual al número $\frac{-\chi+d}{d-1}$. Esto muestra la validez del siguiente resultado.

Teorema 4.1. *Las funciones k^c_π y k_π son no decrecientes. Además*

$$\lim_{-\chi\to+\infty} k^c_\pi(-\chi) = +\infty \quad y \quad \lim_{-\chi\to+\infty} k_\pi(-\chi) = +\infty\,.$$

Entonces, la versión 2-dimensional de la conjetura 1.1 es cierta.

Considérese ahora la desigualdad análoga a (1) en la Introducción. Para d par, esta desigualdad es

$$\frac{-\chi(\Sigma) + d}{d/2} \leqslant k\,,$$

y para d impar

$$\frac{-\chi(\Sigma) + d}{((d-1)/2)} \leqslant k\,.$$

El teorema 3.6 indica que es muy posible que estas desigualdades sean precisas, es decir, que para cada valor χ de la característica de Euler realizado por algún elemento de $\mathcal{C}^{c,s}_\pi$, existe algún elemento $F : \Sigma \to D^2$ de esta colección, tal que $\chi(\Sigma) = \chi$ y cuyo número de valores críticos es el menor entero mayor o igual a $\frac{-\chi(\Sigma)+d}{d/2}$ si d es par, y a $\frac{-\chi(\Sigma)+d}{((d-1)/2)}$ si d es impar. Es posible concluir que en general, las conjeturas propuestas son esencialmente ciertas en la versión 2-dimensional estudiada en este artículo, como consecuencia de que las únicas restricciones para que un par de enteros (a, b) sea realizado como el número de valores críticos y el negativo de la característica de Euler de algún elemento de $\mathcal{C}_\pi$, $\mathcal{C}_\pi^c$, $\mathcal{C}_\pi^s$ ó $\mathcal{C}_\pi^{c,s}$ son las más fundamentales, provenientes de la relación de Riemann–Hurwitz y de la realizabilidad de un número como la característica de Euler de alguna variedad 2-dimensional.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo brindado por la Universidad EAFIT y por la Universidad Nacional de Colombia para el desarrollo de la investigación que condujo a estos resultados.

Referencias

[1] V. Braungardt and D. Kotschick. *Clustering of critical points in Lefschetz fibrations and the symplectic Szpiro inequality* (electronic). Transactions of the American Mathematical Society, ISSN 1088–6850, **355**(8), 3217–3226 (2003). Referenciado en 93

[2] A. Hurwitz. *Über Riemann'sche Flächen mit gegeben Verzweigungspunkten*. Mathematische Annalen, ISSN 0025–5831, **39**(1), 1–61 (1891). Referenciado en 100

[3] A. Hurwitz. *Über die Anzahl der Riemann'schen Flächen mit gegeben Verzweigungspunkten*. Mathematische Annalen, ISSN 0025–5831, **55**(1), 53–66 (1901). Referenciado en 100

[4] Stefano Monni, Jun S. Song and Yun S. Song. *The Hurwitz enumeration problem of branched covers and Hodge integrals*. Journal of Geometry and Physics, ISSN 0393–0440, **50**(1–4), 223–256 (2004). Referenciado en 100

[5] C. L. Ezell. *Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces.* Transactions of the American Mathematical Society, ISSN 0002–9947, 243, 122–133 (1978). Referenciado en 100

[6] R. Thom. *L'equivalence d'une fonction différentiable et d'un polinome*. Topology 3 suppl. 2, 297–307 (1965). Referenciado en 100

[7] A. G. Khovanskii and S. Zdravkovska. *Branched covers of S^2 and braid groups*. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, ISSN 0218–2165, **5**(1), 55–75 (1996). Referenciado en 100

[8] K. Baranski. *On realizability of branched coverings of the sphere*. Topology and its Applications, ISSN 0166–8641, **116**(3), 279–291 (2001). Referenciado en 100

[9] Allan L. Edmonds, Ravi S. Kulkarni and Robert E. Stong. *Realizability of branched coverings of surfaces*. Transactions of the American Mathematical Society, ISSN 0002–9947, **282**(2), 773–790 (1984). Referenciado en 100, 101