Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165
Volumen 2, número 4, páginas 163-178, septiembre de 2006

Sistema paraconsistente $LBPc\neg I$

Manuel Sierra A.[1]

Recepción: 12 de mayo de 2006 — Aceptación: 02 de noviembre de 2006
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

El lenguaje del sistema $LBPc\neg I$ extiende el lenguaje de la lógica clásica positiva al incluir un operador de *negación débil* y un operador de *incompatibilidad*, además, permite definir un operador de *negación fuerte*; este último tiene todas las características de la negación clásica. El sistema es caracterizado por una semántica de valuaciones tradicionales con la cual se prueba que, respecto al operador de negación débil, el sistema es paraconsistente. Como es de esperarse, cuando las fórmulas involucradas en un argumento se comportan clásicamente, es decir, son incompatibles con su negación débil, entonces la negación débil se comporta como la negación clásica, pero este requisito no siempre es necesario, la negación débil puede ser puntualmente tan potente como la clásica, aunque las fórmulas involucradas no se comporten clásicamente.

Palabras claves: incompatibilidad, negación débil, sistema deductivo paraconsistente.

Abstract

The language of the $LBPc\neg I$ system extends the language of the classical positive logic when including an operator of *weak negation* and an operator of *incompatibility*, and permit to define an operator of *strong negation*; this last one has all the characteristics of the classical negation. The system is characterized by a traditional semantics with which test that, with respect to the operator of weak negation, the system is paraconsistent. When the formulas

[1] Magíster en Matemáticas, msierra@eafit.edu.co, profesor integrante del grupo de Lógica y Computación, Universidad EAFIT.

involved in an argument behave classically, that is to say, are incompatible with his weak negation, then the weak negation behaves like the classical negation, but this requirement not always is necessary, the weak negation can precise be as powerful as the classical negation although the involved formulas do not behave classically.

Key words: incompatibility, weak negation, paraconsistent deductive system.

1 Presentación

La negación clásica tiene dos características importantes, la primera dice que si se acepta la negación de un enunciado entonces el enunciado no puede ser aceptado, la segunda dice que si no se acepta la negación de un enunciado entonces el enunciado debe ser aceptado. La primera característica prohíbe que un enunciado y su negación sean ambos aceptados, no permite que un enunciado sea *compatible* con su negación. La segunda característica prohibe que un enunciado y su negación sean ambos no aceptados, no permite las *indeterminaciones* respecto a la negación.

Una familia de sistemas deductivos, los cuales soportan las inconsistencias, es presentada en [1]. El operador *negación* de estos sistemas es más débil que el operador *negación clásica*. Se introduce mediante definición un operador de *buen comportamiento*, con el cual se pretende que si una fórmula está débilmente negada y tiene buen comportamiento entonces la fórmula débilmente negada se debe comportar como si estuviera clásicamente negada. Los sistemas son presentados con una sola negación, la débil; el buen comportamiento de una fórmula es definido como la negación débil de la conjunción de la fórmula con su negación débil; la negación clásica es definida en términos de la negación débil y el buen comportamiento. En [2] se estudia con mayor profundidad el operador de buen comportamiento al presentar axiomáticamente un operador de *consistencia*.

El sistema *lógica básica paraconsistente con negación débil e incompatibilidad* $LBPc\neg I$ presentado en este trabajo, resulta ser una generalización de la lógica clásica. El sistema posee un operador de *negación débil* el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación, y por lo tanto es *paraconsistente*. Los teoremas acerca de la negación clásica son recuperados de dos formas: por un lado, definiendo en términos de los operadores negación débil e incompatibilidad, un operador de *negación fuerte*, y por otro, pidiendo a las fórmulas que se encuentran bajo el alcance de la negación, algunos requisitos de incompatibilidad. En el sistema la incompatibilidad respecto a la negación débil de una fórmula puede ser caracterizada como la negación clásica de la conjunción entre la fórmula y su negación débil; esta caracterización hace al operador incompatibilidad esencialmente diferente de los operadores de buen comportamiento y consistencia presentados en [1] y [2].

El sistema es caracterizado con una semántica de valuaciones tradicional, las pruebas de validez y completitud son presentadas de manera detallada.

2 Sistema deductivo $LBPc\neg I$

El lenguaje de la *Lógica Clásica Positiva* (LCP) consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, además de los paréntesis izquierdo y derecho. El *lenguaje del sistema* LBPc¬I se obtiene extendiendo el lenguaje de la lógica clásica positiva con los operadores monádicos $\neg$, I.

El conjunto de *fórmulas de* $LBPc\neg I$ es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

R1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas*.

R2. Si A es una fórmula entonces $\neg(A)$ y $(A)^I$ son fórmulas[1].

R3. Si A y B son fórmulas entonces $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$ y $(A) \leftrightarrow (B)$ son fórmulas.

El *sistema deductivo para* $LBPc\neg I$ es una extensión del cálculo proposicional clásico positivo (LCP), por lo que se toman dos grupos de axiomas.

Axiomas para el cálculo proposicional clásico:

Ax0.1	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax0.2	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Ax0.3	$A \rightarrow (A \vee B)$

[1] $\neg A$ es la negación débil de A. A^I indica que las fórmulas A y $\neg A$ son incompatibles; se lee A es incompatible con su negación débil.

Ax0.4	$B \rightarrow (A \vee B)$
Ax0.5	$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
Ax0.6	$(A \wedge B) \rightarrow A$
Ax0.7	$(A \wedge B) \rightarrow B$
Ax0.8	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$
Ax0.9	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
Ax0.10	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax0.11	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$
Ax0.12	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A.$

Axiomas para los nuevos operadores:

Ax1.1	$(A \wedge \neg A) \vee A^I$
Ax1.2	$A \vee (A^I \wedge \neg A)$
Ax1.3	$(A \wedge \neg A \wedge A^I) \rightarrow B.$

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de A y $A \rightarrow B$ se infiere B, denotado $A,\ A \rightarrow B \vdash B$.

En el sistema se define un operador de *negación fuerte*[2]

$$\sim\!A = A^I \wedge \neg A\,.$$

Se dice que una fórmula A es un *teorema de $LBPc\neg I$*, denotado $\vdash A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de $LBPc\neg I$ a partir de* Γ, denotado $\Gamma \vdash A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

[2]La negación fuerte posee las características de la negación clásica.

Proposición 2.1 (Principio de identidad)**.** $\vdash A \to A$.

Prueba 2.1. Todo sistema deductivo en el cual se tienen como teoremas Ax0.1 y Ax0.2, y utiliza la regla de inferencia MP, tiene como teorema $A \to A$. Para detalles de la prueba ver [3].

Proposición 2.2 (Teorema de deducción)**.** *Sean A y B fórmulas de $LBPc\neg I$ y Γ un conjunto de fórmulas de $LBPc\neg I$. Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ entonces $\Gamma \vdash A \to B$.*

Prueba 2.2. En todo sistema deductivo en el cual se tienen como teoremas Ax0.1 y Ax0.2 y utiliza como única regla de inferencia el MP, vale el teorema de deducción. Para detalles de la prueba ver [4].

Proposición 2.3 (Reglas de inferencia de la LCP)**.**
Se utilizarán $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$ como abreviaturas de "implica" y "si y solo si" respectivamente.

Introducción y eliminación de la conjunción: $\vdash A \wedge B \Leftrightarrow \vdash A$ *y* $\vdash B$

Conmutatividad de la conjunción: $\vdash A \wedge B \Leftrightarrow \vdash B \wedge A$

Conmutatividad de la disyunción: $\vdash A \vee B \Leftrightarrow \vdash B \vee A$

Introducción de la disyunción: $\vdash A \Rightarrow \vdash A \vee B$ *y* $\vdash B \vee A$

Silogismo hipotético: $\vdash A \to B$ *y* $\vdash B \to C \Rightarrow \vdash A \to C$

Eliminación de la disyunción: $\vdash A \vee B$ *y* $\vdash A \to C$ *y* $\vdash B \to C \Rightarrow \vdash C$

Dilema constructivo: $\vdash A \vee B$ *y* $\vdash A \to C$ *y* $\vdash B \to D \Rightarrow \vdash C \vee D$

Exportación: $\vdash A \to (B \to C) \Leftrightarrow \vdash (A \wedge B) \to C$

Disyunción en el antecedente: $\vdash (A \vee B) \to C \Leftrightarrow \vdash A \to C$ *y* $\vdash B \to C$.

Prueba 2.3. Estos son resultados bien conocidos de la LCP. Para detalles de las pruebas ver [3].

Proposición 2.4 (Trivialización con la negación fuerte)**.** $A \to (\sim A \to B)$.

Prueba 2.4. Gracias al teorema de deducción, basta con probar que si se tienen tanto A como $\sim A$ se puede inferir B. Supóngase entonces que se tienen A y $\sim A$. Por la definición de la negación fuerte al tener $\sim A$ resulta $A^I \wedge \neg A$. Utilizando las reglas de introducción de la conjunción y conmutatividad entre este resultado y el primer supuesto se obtiene $A \wedge \neg A \wedge A^I$. Pero, por Ax1.3, $(A \wedge \neg A \wedge A^I) \to B$. Por lo tanto, se infiere B.

Proposición 2.5 (Tercero excluido)**.** $(\sim A \to A) \to A$.

Prueba 2.5. Se supone $\sim A \to A$ y se debe probar A. Utilizando la definición de negación fuerte se tiene $(A^I \wedge \neg A) \to A$. Por otro lado, de Ax0.5 resulta $(A \to A) \to [((A^I \wedge \neg A) \to A) \to [(A \vee (A^I \wedge \neg A)) \to A]]$. Puesto que por la proposición (2.1) se tiene $A \to A$, utilizando modus ponens resulta $((A^I \wedge \neg A) \to A) \to [(A \vee (A^I \wedge \neg A)) \to A]$. Como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $(A \vee (A^I \wedge \neg A)) \to A$. Por Ax1.2 se tiene el antecedente de este último condicional, por lo que se infiere A. Se tiene entonces que de $\sim A \to A$ se infiere A. Por el teorema de deducción resulta que $(\sim A \to A) \to A$.

Proposición 2.6 (La negación fuerte se comporta como la clásica)**.** *Los teoremas del cálculo proposicional clásico que involucren la negación clásica son teoremas del sistema $LBPc\neg I$ cuando se cambia la negación clásica por la negación fuerte.*

Prueba 2.6. Basta notar que el cálculo proposicional clásico puede ser axiomatizado por Ax0.1, …, Ax0.12, proposición (2.4) y proposición (2.5). Para los detalles ver [5].

3 Semántica para $LBPc\neg I$

Una valuación v es una función que interpreta las fórmulas atómicas como elementos del conjunto $\{0, 1\}$. La valuación v se extiende a una función V que interpreta las fórmulas de $LBPc\neg I$ en el conjunto $\{0, 1\}$ de la siguiente manera:

Si p es atómica entonces $V(p) = v(p)$

$V\wedge$	$V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$
$V\vee$	$V(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(B) = 0$
$V\to$	$V(A \to B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$
$V\leftrightarrow$	$V(A \leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = V(B)$
VI	$V(A^I) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$
$V\neg$	$V(\neg A) = 0 \Rightarrow V(A) = 1$.

Se dice que una fórmula A es *válida*, denotado $\vDash A$, si y solamente si para toda valuación v, $V(A) = 1$.

Proposición 3.1 (La negación fuerte es clásica). $V\sim$. $V(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$.

Prueba 3.1. Supóngase que existe una valuación v tal que, $V(\sim A) = 1$ y $V(A) = 1$. Por la definición de negación fuerte se tiene que $V(A^I \wedge \neg A) = 1$, y entonces de acuerdo a $V\wedge$, $V(A^I) = 1$ y $V(\neg A) = 1$. Como $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$, según VI se infiere que $V(A^I) = 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto, si $V(\sim A) = 1$ entonces $V(A) = 0$.
Para probar la recíproca, supóngase que existe una valuación v tal que, $V(A) = 0$ y $V(\sim A) = 0$. Al ser $V(A) = 0$, por $V\neg$ resulta que $V(\neg A) = 1$. Como $V(\sim A) = 0$, por la definición de negación fuerte se tiene que $V(A^I \wedge \neg A) = 0$, y de acuerdo a $V\wedge$ se obtiene $V(A^I) = 0$ ó $V(\neg A) = 0$, pero como $V(\neg A) = 1$, se infiere que $V(A^I) = 0$, y utilizando VI resulta $V(A) = 1$. Como este último resultado es imposible, se concluye que si $V(A) = 0$ entonces $V(\sim A) = 1$.

4 Caracterización semántica de $LBPc\neg I$

Para probar que la semántica presentada caracteriza al sistema deductivo $LBPc\neg I$, se deben garantizar dos puntos, validez y completitud. El primero dice que todos los teoremas del sistema sean válidos, esto se logra con la proposición (4.6). El segundo dice que todos los enunciados válidos sean teoremas, esto se logra con la proposición (4.14). Lo anterior significa que los teoremas del sistema son las fórmulas válidas y solamente ellas.

Proposición 4.1 (Validez de Ax1.1). $\vDash (A \wedge \neg A) \vee A^I$.

Prueba 4.1. Supóngase que $(A \wedge \neg A) \vee A^I$ es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A\wedge\neg A) \vee A^I)=0$, es decir, según $V\vee$, $V(A\wedge\neg A)=0$ y $V(A^I)=0$. Al ser $V(A^I)=0$, por VI, se tiene que $V(A)=1$ y $V(\neg A)=1$, es decir, según $V\wedge$, $V(A \wedge \neg A) = 1$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $(A \wedge \neg A) \vee A^I$ es válido.

Proposición 4.2 (Validez de Ax1.2). $\vDash A \vee (A^I \wedge \neg A)$.

Prueba 4.2. Supóngase que $A \vee (A^I \wedge \neg A)$ es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V(A \vee (A^I \wedge \neg A)) = 0$, por $V\vee$ se tiene $V(A) = 0$

y $V(A^I \wedge \neg A) = 0$. Como $V(A) = 0$ por $V\neg$ resulta que $V(\neg A) = 1$. Como $V(A^I \wedge \neg A) = 0$ según $V\wedge$ resulta que $V(A^I) = 0$ ó $V(\neg A) = 0$, pero al ser $V(\neg A) = 1$ se infiere que $V(A^I) = 0$. Este resultado, según VI indica que $V(A) = 1$, lo cual contradice el que $V(A) = 0$. Por lo tanto, $A \vee (A^I \wedge \neg A)$ es válido.

Proposición 4.3 (Validez de Ax1.3)**.** $\models (A \wedge \neg A \wedge A^I) \rightarrow B$.

Prueba 4.3. Supóngase que $(A \wedge \neg A \wedge A^I) \rightarrow B$ es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A \wedge \neg A \wedge A^I) \rightarrow B) = 0$, es decir, según $V\rightarrow$, $V((A \wedge \neg A \wedge A^I) = 1$. Se tiene entonces por $V\wedge$ que $V(A) = 1$, $V(\neg A) = 1$ y $V(A^I) = 1$. Pero de acuerdo a VI, $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$ implica que $V(A^I) = 0$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $(A \wedge \neg A \wedge A^I) \rightarrow B$ es válido.

Proposición 4.4 (Validez de los axiomas positivos)**.** *Los axiomas Ax0.1, …, Ax0.12 son válidos.*

Prueba 4.4. Estos son resultados bien conocidos de la LCP. Para detalles de las pruebas ver [6].

Proposición 4.5 (Modus Ponens preserva validez)**.** *Sean A y B fórmulas de $LBPc\neg I$. Si A y $A \rightarrow B$ son válidas entonces B también es válida.*

Prueba 4.5. Es un resultado muy conocido. Para detalles de la prueba ver [4] o [6].

Proposición 4.6 (Validez)**.** *Todo teorema de $LBPc\neg I$ es válido.*

Prueba 4.6. Se procede como es habitual en las pruebas de validez, es decir, una prueba por inducción sobre la longitud de la demostración del teorema. Para garantizar el resultado basta que los axiomas sean válidos y que las reglas de inferencia del sistema preserven validez. Puesto que esto se ha garantizado con las proposiciones (4.1) a (4.5), la proposición queda probada. Para detalles de la prueba ver [4] o [6].

Para la prueba de completitud se siguen las directrices dadas por Henkin para probar la completitud de la lógica de primer orden en [7].

Las pruebas de las proposiciones (4.7) a (4.9) y (4.12) se encuentran en [4] y [6].

Una *extensión* de un sistema deductivo se obtiene alterando o ampliando el conjunto de axiomas de manera que todos los teoremas del sistema sigan siendo teoremas. Mientras no se diga lo contrario, se trabajará con extensiones de $LBPc\neg I$ pero el conjunto de fórmulas no se cambiará, por lo que se dirá simplemente fórmulas o fórmulas de $LBPc\neg I$ cuando se quiera hacer referencia a las fórmulas de una extensión de $LBPc\neg I$.

Una extensión es *consistente* si no existe ninguna fórmula A tal que tanto A como $\sim A$ sean teoremas de la extensión. Si la extensión no es consistente, se dice que es *inconsistente*. Una extensión es *completa* si para toda fórmula A, o bien A o bien $\sim A$ es teorema de la extensión.

Proposición 4.7 (Consistencia). *$LBPc\neg I$ es consistente.*

Proposición 4.8 (Extensión consistente). *Sea E una extensión de $LBPc\neg I$ y sea A una fórmula que no sea teorema de E. Entonces E^* es también consistente, siendo E^* la extensión de $LBPc\neg I$ obtenida añadiendo $\sim A$ como nuevo axioma a E.*

En la proposición (4.9) se presentan algunas reglas derivadas que se requieren para la prueba de completitud. Todas ellas son resultados bien conocidos de la lógica clásica, y se tienen como consecuencia de la proposición (2.6). Para detalles de las pruebas ver [3] y [4].

Proposición 4.9 (Reglas de inferencia para la negación fuerte).

Silogismo disyuntivo: $\vdash A \vee B$ *y* $\vdash \sim A \Rightarrow \vdash B$

Demostración indirecta: $\vdash A \rightarrow (B\wedge \sim B) \Rightarrow \vdash \sim A$. $\vdash \sim A \rightarrow (B\wedge \sim B) \Rightarrow \vdash A$

Doble negación: $\vdash A \Leftrightarrow \vdash \sim\sim A$

Negación de la disyunción: $\vdash \sim(A \vee B) \Leftrightarrow \vdash \sim A\wedge \sim B$

Negación de la conjunción: $\vdash \sim(A \wedge B) \Leftrightarrow \vdash \sim A\vee \sim B$

Negación del condicional: $\vdash \sim(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \vdash A\wedge \sim B$

Transposición: $\vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \vdash \sim B \rightarrow \sim A$

Modus Tollens MT: $\vdash A \rightarrow B$ *y* $\vdash \sim B \Rightarrow \vdash \sim A$

Implicación material: $\vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \vdash \sim A \vee B$

Equivalencia material: $\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash (A \wedge B) \vee (\sim A\wedge \sim B)$

Transposición en la equivalencia: $\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash \sim A \leftrightarrow \sim B$.

Proposición 4.10 (Disyunción en las extensiones completas). *Si J es una extensión consistente y completa de $LBPc\neg I$, entonces $\vdash_J A \vee B$ si y sólo si $\vdash_J A$ ó $\vdash_J B$.*

Prueba 4.10. Supóngase que $\vdash_J A \vee B$ pero no $\vdash_J A$ y no $\vdash_J B$, entonces se tendría que $\vdash_J \sim A$ al ser J completa. Al tener $\vdash_J A \vee B$ y $\vdash_J \sim A$, por silogismo disyuntivo, se infiere $\vdash_J B$, pero se supuso que no. Por lo tanto, si $\vdash_J A \vee B$ entonces $\vdash_J A$ ó $\vdash_J B$. La recíproca es aplicación inmediata de la introducción de la disyunción.

Proposición 4.11 (Equivalencia externa). *$\vdash_J A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J B)$, cuando J es una extensión consistente y completa de $LBPc\neg I$.*

Prueba 4.11. Supóngase que $A \leftrightarrow B$ es un teorema de J, por Ax0.9 y Ax0.10 también lo son $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$. Si A fuese teorema de J entonces por MP también lo sería B, es decir, $\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B$. De igual forma se prueba que $\vdash_J B \Rightarrow \vdash_J A$.
Supóngase que $\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J B$, por lo que $\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B$, y supóngase que no se tiene $\vdash_J A \rightarrow B$. Al ser J completa resulta que $\vdash_J \sim(A \rightarrow B)$, lo cual por negación del condicional significa que $\vdash_J A \wedge \sim B$ y por eliminación de la conjunción $\vdash_J A$ y $\vdash_J \sim B$. Al tener $\vdash_J A$ y $\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B$, se infiere $\vdash_J B$, lo cual es imposible ya que $\sim B$ es un teorema de J y J es consistente. De igual forma se prueba $\vdash_J B \rightarrow A$ y por Ax0.11 se tiene $\vdash_J A \leftrightarrow B$.

Proposición 4.12 (Extensión consistente y completa). *Sea E una extensión consistente de $LBPc\neg I$. Entonces existe una extensión consistente y completa de E.*

Proposición 4.13 (Valuación asociada a una extensión). *Si E es una extensión consistente de $LBPc\neg I$, entonces existe una valuación en la cual todo teorema de E toma el valor 1.*

Prueba 4.13. Se define v sobre fórmulas de $LBPc\neg I$ haciendo $V(A) = 1$ si $\vdash_J A$, y $V(A) = 0$ si $\vdash_J \sim A$, siendo J una extensión consistente y completa de E, como la dada en la proposición (4.12). Nótese que v está definida sobre todas las fórmulas, por ser J completa. Ahora bien, $V(A) = 1 \Leftrightarrow V(\sim A) = 0$ para toda fórmula A, ya que J es consistente.
Para el caso del condicional, utilizando la negación del condicional, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow$

$\vdash_J \sim(A \to B) \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge \sim B \Leftrightarrow \vdash_J A$ y $\vdash_J \sim B \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$, por lo que se satisface la definición $V{\to}$.
Para el caso de la conjunción, utilizando la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge B \Leftrightarrow \vdash_J A$ y $\vdash_J B \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$, por lo que se satisface la definición $V\wedge$.
Para el caso de la disyunción, utilizando la proposición (4.10), disyunción en las extensiones completas, se tiene que $V(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J A \vee B \Leftrightarrow (\vdash_J A$ ó $\vdash_J B) \Leftrightarrow (V(A) = 1$ ó $V(B) = 1)$, por lo que se satisface la definición $V\vee$.
Para el caso de bicondicional, utilizando la proposición (4.11), equivalencia externa, se tiene que $V(A{\leftrightarrow}B){=}1{\Leftrightarrow} \vdash_J A \leftrightarrow B {\Leftrightarrow} (\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J B) \Leftrightarrow (V(A) = 1 \Leftrightarrow V(B) = 1) \Leftrightarrow V(A) = V(B)$, por lo que se satisface la definición $V{\leftrightarrow}$.
Para el caso de la incompatibilidad. Supóngase que $V(A^I) = 0$, por la definición de v resulta $\vdash_J \sim A^I$, y por Ax1.1 se tiene $\vdash_J (A \wedge \neg A) \vee A^I$, por silogismo disyuntivo se infiere entonces $\vdash_J (A \wedge \neg A)$, por eliminación de la conjunción se obtiene $\vdash_J A$ y $\vdash_J \neg A$, finalmente por la definición de v se tiene $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$. Se ha probado que $V(A^I) = 0 \Rightarrow V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$.
Para probar la recíproca supóngase que $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$ pero que $V(A^I) = 1$. Por la definición de v resulta $\vdash_J A$, $\vdash_J \neg A$ y $\vdash_J A^I$, y por introducción de la conjunción se tiene $\vdash_J A \wedge \neg A \wedge A^I$. Por Ax1.3 se tiene $\vdash_J (A \wedge \neg A \wedge A^I) \to \sim A$. De estos resultados se infiere que $\vdash_J \sim A$, lo cual es imposible ya que J es consistente y $\vdash_J A$. Por lo tanto, $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(A^I) = 0$.
Se ha probado entonces que $V(A^I) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$, por lo que se satisface la definición VI.
Para el caso de la negación débil, supóngase que $V(A) = 0$. Por la definición de v resulta $\vdash_J \sim A$, y por Ax1.2 se tiene $\vdash_J A \vee (A^I \wedge \neg A)$. Utilizando silogismo disyuntivo resulta $\vdash_J A^I \wedge \neg A$, y por eliminación de la conjunción se infiere $\vdash_J \neg A$. Por la definición de v resulta $V(\neg A) = 1$. Se tiene entonces que $V(A) = 0 \Rightarrow V(\neg A) = 1$, por lo que se satisface la definición $V\neg$.
Con base en el análisis anterior se concluye finalmente que v es una valuación.
Sea ahora A un teorema de E. Entonces $\vdash_J A$, donde J es una extensión consistente y completa de E. Por lo tanto, $V(A) = 1$.

Proposición 4.14 (Completitud). *Sea A una fórmula de LBPc$\neg I$, si A es válida entonces A es un teorema.*

Prueba 4.14. Sea A una fórmula válida, y supóngase que A no es un teorema. Entonces la extensión E, obtenida añadiendo $\sim A$ como nuevo axioma, es consistente, por la proposición (4.8). Así pues, según la proposición (4.13), existe una valuación v que da a todo teorema de E el valor 1. En particular, $V(\sim A) = 1$. Pero $V(A) = 1$, ya que A es una fórmula válida, y se llega a una contradicción. Por lo tanto, si A es válida entonces A es un teorema.

Proposición 4.15 (Caracterización semántica). *Sea A una fórmula de $LBPc\neg I$, A es válida si y solamente si A es un teorema.*

Prueba 4.15. Consecuencia de las proposiciones (4.6) y (4.14).

5 Características del sistema

Se dice que un sistema deductivo es *paraconsistente respecto al operador de negación* $\neg$ si permite que de algún conjunto de fórmulas se tengan como consecuencia alguna fórmula A y su negación $\neg A$ y que exista al menos una fórmula B que no sea consecuencia de dicho conjunto de fórmulas. Para probar que un sistema es *paraconsistente respecto al operador* $\neg$ basta probar que no tiene como teorema la fórmula $A \to (\neg A \to B)$.

Proposición 5.1 (Paraconsistencia de $LBPc\neg I$). *El sistema $LBPc\neg I$ es* paraconsistente respecto al operador $\neg$.

Prueba 5.1. La valuación v tal que $V(A) = V(\neg A) = 1$ y $V(B) = 0$, hace que $V(A \to (\neg A \to B)) = 0$. Por lo que, $A \to (\neg A \to B)$ no es válida, y por lo tanto no es teorema.

Proposición 5.2 (Caracterización de I).

a. $A^I \leftrightarrow (\neg A \to \sim A)$ *es un teorema*

b. $\sim A \to \neg A$ *es un teorema*

c. $\neg A \to \sim A$ *no es un teorema.*

Prueba 5.2. Para la parte a., supóngase A^I y $\neg A$. Por introducción de la conjunción resulta $A^I \wedge \neg A$, aplicando la definición de negación fuerte,

se tiene $\sim A$. Aplicando dos veces el teorema de deducción se concluye $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$.
Para la recíproca, supóngase $\neg A \rightarrow \sim A$ y $\sim A^I$. Por Ax1.1 se tiene $(A \wedge \neg A) \vee A^I$, y al tener $\sim A^I$, por conmutatividad y silogismo disyuntivo resulta $A \wedge \neg A$. Por eliminación de la conjunción resultan A y $\neg A$. De $\neg A$ y $\neg A \rightarrow \sim A$ se infiere $\sim A$. Por la introducción de la conjunción se tiene $A \wedge \sim A$. Por lo que, según el teorema de deducción de $\neg A \rightarrow \sim A$ se sigue $\sim A^I \rightarrow (A \wedge \sim A)$. Por lo tanto, gracias a la proposición (4.9), demostración indirecta, se ha probado que bajo el supuesto $\neg A \rightarrow \sim A$ se infiere A^I. Utilizando el teorema de deducción se obtiene $(\neg A \rightarrow \sim A) \rightarrow A^I$.
En resumen, se tienen $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$ y $(\neg A \rightarrow \sim A) \rightarrow A^I$. Utilizando Ax0.11 se infiere $A^I \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$.
Para la parte b., supóngase $\sim A$. Por la definición de negación fuerte, se tiene $A^I \wedge \neg A$, por conmutatividad y eliminación de la conjunción resulta $\neg A$. Utilizando el teorema de deducción, se tiene $\sim A \rightarrow \neg A$.
Para la parte c., la valuación v tal que $V(A) = V(\neg A) = 1$, hace que $V(\neg A \rightarrow \sim A) = 0$. Por lo que, $\neg A \rightarrow \sim A$ no es válida, y por lo tanto no es teorema.

En la siguiente tabla se presenta un paralelo entre algunas de las principales reglas de inferencia que involucran la negación clásica, con las correspondientes reglas en $LBPc\neg I$.

<table>
<tr><td rowspan="5">Negación de la conjunción</td><td rowspan="2">De $\sim(A \wedge B)$ se infiere $\sim A \vee \sim B$</td><td>De $\neg(A \wedge B)$ no se infiere $\neg A \vee \neg B$</td></tr>
<tr><td>De $(A \wedge B)^I$ y $\neg(A \wedge B)$ se infiere $\neg A \vee \neg B$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De $\sim A \vee \sim B$ se infiere $\sim(A \wedge B)$</td><td>De $\neg A \vee \neg B$ no se infiere $\neg(A \wedge B)$</td></tr>
<tr><td>De A^I, B^I y $\neg A \vee \neg B$ se infiere $\neg(A \wedge B)$</td></tr>
<tr><td>$\sim(A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$</td><td>De $(A \wedge B)^I$, A^I y B^I se infiere $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="5">Negación de la disyunción</td><td rowspan="2">De $\sim(A \vee B)$ se infiere $\sim A \wedge \sim B$</td><td>De $\neg(A \vee B)$ no se infiere $\neg A \wedge \neg B$</td></tr>
<tr><td>De $(A \vee B)^I$ y $\neg(A \vee B)$ se infiere $\neg A \wedge \neg B$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De $\sim A \wedge \sim B$ se infiere $\sim(A \vee B)$</td><td>De $\neg A \wedge \neg B$ no se infiere $\neg(A \vee B)$</td></tr>
<tr><td>De A^I, B^I y $\neg A \wedge \neg B$ se infiere $\neg(A \vee B)$</td></tr>
<tr><td>$\sim(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$</td><td>De $(A \vee B)^I$, A^I y B^I se infiere $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$</td></tr>
</table>

Negación del condicional	De $\sim(A\to B)$ se infiere $A\wedge \sim B$	De $\neg(A \to B)$ no se infiere $A \wedge \neg B$
		De $(A \to B)^I$ y $\neg(A \to B)$ se infiere $A\wedge\neg B$
	De $A\wedge\sim B$ se infiere $\sim(A \to B)$	De $A \wedge \neg B$ no se infiere $\neg(A \to B)$
		De B^I y $A \wedge \neg B$ se infiere $\neg(A \to B)$
	$\sim(A\to B) \leftrightarrow (A\wedge\sim B)$	De $(A \to B)^I$ y B^I se infiere $\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

Negación de la negación	De $\sim\sim A$ se infiere A	De $\neg\neg A$ no se infiere A
		De $(\neg A)^I$ y $\neg\neg A$ se infiere A
	De A se infiere $\sim\sim A$	De A no se infiere $\neg\neg A$
		De A^I y A se infiere $\neg\neg A$
	$\sim\sim A \leftrightarrow A$	De $(\neg A)^I$ y A^I se infiere $\neg\neg A \leftrightarrow A$

Silogismo disyuntivo	De $A \vee B$ y $\sim A$ se infiere B	De $A \vee B$ y $\neg A$ no se infiere B
		De A^I, $A \vee B$ y $\neg A$ se infiere B
	De $\sim A\to B$ se infiere $A \vee B$	De $\neg A \to B$ se infiere $A \vee B$
	$(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A\to B)$	De A^I se infiere $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A\to B)$

Modus Tollens	De $A \to B$ y $\sim B$ se infiere $\sim A$	De $A \to B$ y $\neg B$ no se infiere $\neg A$
		De B^I, $A \to B$ y $\neg B$ se infiere $\neg A$
	De $\sim B\to \sim A$ y A se infiere B	De $\neg B \to \neg A$ y A no se infiere B
		De A^I, $\neg B \to \neg A$ y A se infiere B
	$(A\to B)\leftrightarrow(\sim B\to\sim A)$	De B^I, A^I se infiere $(A\to B) \leftrightarrow (\neg B\to\neg A)$
	$(A\leftrightarrow B)\to(\sim B\leftrightarrow\sim A)$	De B^I, A^I se infiere $(A\leftrightarrow B) \to (\neg B\leftrightarrow\neg A)$
	$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(\sim B\leftrightarrow\sim A)$	De B^I, A^I se infiere $(A\leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg B\leftrightarrow\neg A)$

Reducción al absurdo	De $A \to B$ y $A \to \sim B$ se infiere $\sim A$	De $A \to B$ y $A \to \neg B$ no se infiere $\neg A$
		De B^I, $A \to B$ y $A \to \neg B$ se infiere $\neg A$
	De $\sim A\to B$ y $\sim A\to \sim B$ se infiere A	De $\neg A \to B$ y $\neg A \to \neg B$ no se infiere A
		De B^I, $\neg A \to B$ y $\neg A \to \neg B$ se infiere A

Trivialización con las contradicciones	De A y $\sim A$ se infiere B	De A y $\neg A$ no se infiere B
		De A^I, A y $\neg A$ se infiere B

Trivialización con indeterminaciones	De $\sim\sim A$ y $\sim A$ se infiere B	De $\sim A$ y $\sim\neg A$ se infiere B

La forma como se prueban estas reglas se ilustra con la prueba de *negación débil de la conjunción.*

Proposición 5.3 (Negación débil de la conjunción)**.**

a. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ *no es un teorema*

b. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$ *no es un teorema*

c. $[(A \wedge B)^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ *es un teorema*

d. $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$ *es un teorema*

e. $[(A \wedge B)^I \wedge A^I \wedge B^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ *es un teorema.*

Prueba 5.3. Para probar que $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(\neg(A \wedge B)) = 1$, $V(\neg A) = 0$ y $V(\neg B) = 0$. Para probar que $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(\neg(A \wedge B)) = 0$, $V(\neg A) = 1$ y $V(\neg B) = 1$.
Para probar $[(A \wedge B)^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$, gracias al teorema de deducción basta con probar que, de $(A \wedge B)^I$ y $\neg(A \wedge B)$ se infiere $\neg A \vee \neg B$. De $(A \wedge B)^I$ por la proposición (5.2) resulta $\neg(A \wedge B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$, como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\sim(A \wedge B)$. Por negación de la conjunción se tiene $\sim A \vee \sim B$. De la proposición (5.2) se tienen $\sim A \rightarrow \neg A$ y $\sim B \rightarrow \neg B$. Utilizando dilema constructivo en los tres últimos resultados se obtiene $\neg A \vee \neg B$.
Para probar $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$, gracias al teorema de deducción y a las reglas de conmutatividad y de eliminación de la conjunción basta con probar que, de A^I, B^I y $\neg A \vee \neg B$ se infiere $\neg(A \wedge B)$. De A^I y B^I por la proposición (5.2) resultan $\neg A \rightarrow \sim A$ y $\neg B \rightarrow \sim B$, y como se tiene $\neg A \vee \neg B$, por dilema constructivo se infiere $\sim A \vee \sim B$. Por negación de la conjunción se tiene $\sim(A \wedge B)$. De la proposición (5.2) se tiene $\sim(A \wedge B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$, como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\neg(A \wedge B)$.
La prueba de $[(A \wedge B)^I \wedge A^I \wedge B^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ es consecuencia inmediata de las dos pruebas anteriores.

6 Conclusiones

En el sistema $LBPc\neg I$, gracias a la definición del operador de negación fuerte, se recuperan todos los teoremas del cálculo proposicional clásico. Pero además, permite probar estos mismos resultados con la negación débil, haciendo explícitos los requisitos mínimos de incompatibilidad de las fórmulas involucradas en el resultado clásico. Es interesante observar que cuando se analizan estos requisitos, no siempre se requiere un comportamiento clásico, por ejemplo para inferir $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$, se requiere que $A \wedge B$ sea incompatible, pero no se requiere que A sea incompatible, ni que B sea incompatible. Lo anterior muestra que el análisis respecto a la negación, en $LBPc\neg I$ es más fino que en la lógica clásica. Lo anterior también permite la construcción de sistemas intermedios entre $LBPc\neg I$ y la lógica clásica.

Referencias

[1] N. Da Costa. *Inconsistent Formal Systems*. Curitiba: Editora UFPR, 1993.

[2] W. Carnielli and J. Marcos. *A Taxonomy of C-Systems*. En Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, New York: Ed. Marcel Dekker, **228**, 2002.

[3] X. Caicedo. *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Universidad de los Andes, 1990.

[4] A. Hamilton. *Lógica para matemáticos*. Madrid: Paraninfo S.A., 1981.

[5] A. Tarski. *Logic, semantics and metamathematics*. Second edition, Indianapolis: Hackett Publ., 1983.

[6] M. Sierra. *Lógica básica con afirmación alterna*. Ingeniería y Ciencia, **1**(1), 2005.

[7] L. Henkin. *The completeness of the first order functional calculus*. The journal of symbolic logic, **14**(3), 1949.