Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165
Volumen 2, número 3, páginas 51-64, marzo de 2006

Modelo de producción–inventario con tiempo de espera proporcional al tiempo de producción[1]

Henry Laniado Rodas[2] y Andrés F. García Suaza[3]

Recepción: 04 de noviembre de 2005 — Aceptación: 29 de noviembre de 2005
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En este trabajo se estudia un modelo de producción–inventario con tasas de demanda y producción constantes. Dentro de los supuestos se considera que el tiempo de espera, referido al tiempo en que la unidad de producción está inhabilitada, es proporcional al tiempo de actividad de la misma. El objetivo es desarrollar un modelo matemático y determinar el número óptimo de ciclos que minimice los costos, o bien, maximice la utilidad.

Palabras claves: inventario, producción, demanda, ciclos.

Abstract

In this paper is studied an inventory–production model with demand and production rates constants over time. One hypothesis is that waiting time,

1 Trabajo realizado en el marco del proyecto **Modelos estocásticos y determinísticos en el análisis de optimización y mejoramiento de la confiabilidad de sistemas empresariales**, con el apoyo del Centro de Investigaciones Económicas (CIE) y del departamento de Estadística y Matemáticas, Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Antioquia.

2 Magister en Matemáticas Aplicadas, hlaniado@agustinianos.udea.edu.co, profesor, Universidad de Antioquia.

3 Estudiante de economía, afgarcia@agustinianos.udea.edu.co, asistente de investigación, Universidad de Antioquia.

refereed to the time which the productive unit is off, is proportional to the working time of the same unit. The objective is to develop a mathematical model and to determine optimal number of cycles either minimizing cost or maximizing profit.

Key words: inventory, production, demand, cycles.

1 Introducción

En cuanto a producción e inventario se refiere, se han investigado varios modelos dentro de los cuales se encuentran aquellos cuya tasa de producción es menor que la tasa de demanda, además, el consumo sólo comienza cuando la producción termina. En Goyal [1] y Hariga [2] se examinan con detalle estos modelos desde un punto de vista geométrico, sin embargo en [3], el tratamiento es analítico. En ambos trabajos se considera posible que cada ciclo de producción comience antes de que termine el consumo del ciclo inmediatamente anterior. Es de interés teórico el estudio de los modelos previamente mencionados, sin embargo, desde el punto de vista práctico, y a su vez teórico, el modelo que aquí se examina propone estrategias de optimización que tienen estrecha relación con problemas reales comunes en la industria, puesto que por razones obvias, por ejemplo, mantenimiento, desgaste y refrigeración, es natural considerar el supuesto de que el tiempo de receso de una unidad de producción sea proporcional al tiempo de actividad de la misma.

Inicialmente se analizan tres situaciones que se presentan al comparar la constante de proporcionalidad y el cociente entre tasa de producción y tasa de demanda, obteniendo resultados correspondientes en cada caso al óptimo de ciclos que maximiza la utilidad en un horizonte de planificación dado. Por otra parte, se estudian las condiciones bajo las cuales la sobreproducción es económicamente conveniente. Finalmente, se examina de nuevo el modelo cuando la tasa de producción es menor que la tasa de demanda, considerando posible que las unidades en déficit sean abastecidas por un distribuidor externo.

Este modelo es estudiado bajo los siguientes supuestos:

- La tasa de demanda y la de producción son conocidas y constantes por unidad de tiempo.

- El consumo comienza cuando la producción termina.
- El tiempo de receso de la unidad de producción es proporcional al tiempo de operación.

La notación que se utilizará es la siguiente. Alguna notación adicional será introducida cuando se requiera:

N**:** número de ciclos en el horizonte de planificación

S**:** costo fijo de preparación de cada ciclo

p**:** precio de venta por unidad

r**:** tasa de producción por unidad de tiempo

d**:** tasa de demanda por unidad de tiempo

h**:** costo de mantenimiento de inventario por unidad en el horizonte de planificación

T**:** tiempo por ciclo que la unidad de producción está inhabilitada

m**:** horizonte de planificación

π**:** costo por unidad insatisfecha

k**:** precio de salvamento

α**:** constante de proporcionalidad.

2 Descripción del modelo

De acuerdo con la notación anterior, la expresión $(m - TN)$ representa el tiempo en el horizonte de planificación durante el cual la unidad de producción está habilitada. Luego, el número de unidades producidas en dicho horizonte es $r(m - TN)$; en particular, considerando que hay N ciclos, la producción por ciclo está dada por

$$\frac{r}{N}(m - TN)\,.$$

Claramente, $\left(\frac{m}{N} - T\right)$ representa el tiempo por ciclo que la unidad de producción está habilitada; bajo el supuesto de que el tiempo de receso es proporcional al tiempo de operación, se verifica entonces que $T = \alpha\left(\frac{m}{N} - T\right)$, de donde se deduce que $T = \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N}$, luego el tiempo de operación por cada ciclo de la unidad de producción se expresa

$$T' = \frac{m}{(\alpha+1)N}\,.$$

La producción por ciclo está dada por

$$Q = r\frac{m}{(\alpha+1)N}\,.$$

En este estudio se considerarán tres casos. Una primera situación es cuando el cociente entre la tasa de producción y la tasa de demanda es menor que la constante de proporcionalidad, es decir, $\frac{r}{d} < \alpha$. Posteriormente se analizarán $\alpha \le \frac{r}{d} \le \alpha + 1$ y $\frac{r}{d} > \alpha + 1$.

Definición 2.1 (Nivel de inventario)**.** *El nivel de inventario $I(t)$ es una función del tiempo que representa la cantidad almacenada en cualquier instante t.*

El nivel de inventario para un instante $t \in \left[0, \frac{m}{n}\right]$ se expresa (figura 1)

$$I(t) \;=\; \begin{cases} \frac{rm}{(\alpha+1)N} - dt & \text{si } 0 \le t \le \frac{rm}{d(\alpha+1)N} \\ 0 & \text{si } \frac{rm}{d(\alpha+1)N} < t < \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} \\ rt - \frac{r\alpha m}{(\alpha+1)N} & \text{si } \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} \le t \le \frac{m}{N}\,. \end{cases}$$

Una posible segunda situación podría ser, por ejemplo, $\alpha \le \frac{r}{d} \le \alpha + 1$. En este caso el nivel de inventario para cualquier instante $t \in [0, \frac{m}{N}]$ se expresa (figura 2)

$$I(t) \;=\; \begin{cases} \frac{rm}{(\alpha+1)N} - dt & \text{si } 0 \le t \le \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} \\ \frac{rm(1-\alpha)}{(\alpha+1)N} - (d-r)t & \text{si } \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} < t < \frac{rm}{d(\alpha+1)N} \\ rt - \frac{r\alpha m}{(\alpha+1)N} & \text{si } \frac{rm}{d(\alpha+1)N} \le t \le \frac{m}{N}\,. \end{cases}$$

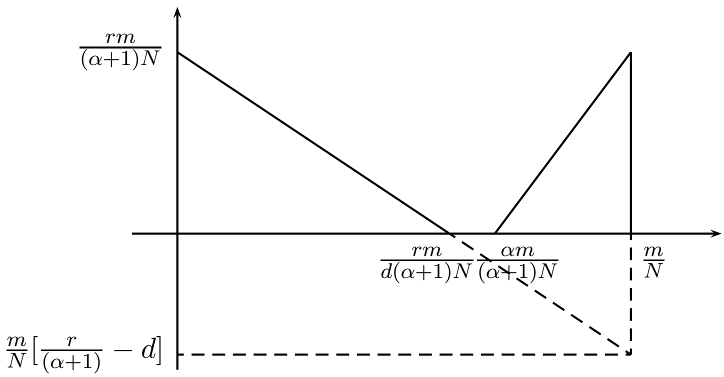

Figura 1: Nivel de inventario para $\frac{r}{d} < \alpha$

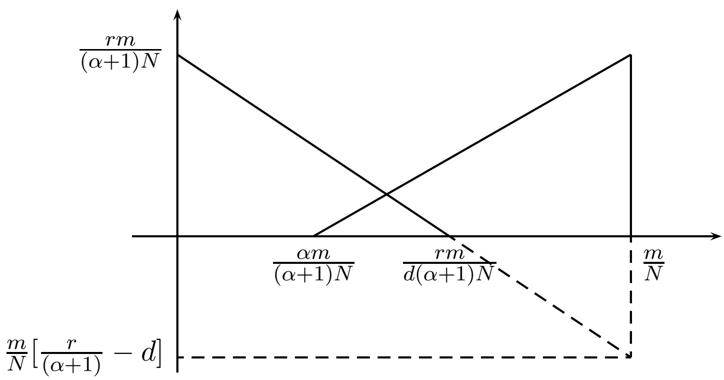

Figura 2: Nivel de inventario para $\alpha \leq \frac{r}{d} \leq \alpha + 1$

En los dos casos nombrados, el inventario promedio está dado por

$$\frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = \frac{mr(d+r)}{2dN(\alpha+1)^2}\,.$$

Luego, el costo de mantenimiento de inventario en todo el horizonte es

$$h\frac{mr(d+r)}{2dN(\alpha+1)^2}\,.$$

El número de unidades no satisfechas durante el horizonte de planificación es

$$m\left[d-\frac{r}{(\alpha+1)}\right], \tag{1}$$

que generan un costo por déficit de

$$\pi m\left[d-\frac{r}{(\alpha+1)}\right].$$

De acuerdo con lo anterior, la utilidad en ambos casos se expresa

$$U(N)=[p-c]\frac{rm}{\alpha+1}-\frac{hmr(d+r)}{2dN(\alpha+1)^2}-\pi m\left[d-\frac{r}{(\alpha+1)}\right]-NS\,. \tag{2}$$

Proposición 2.1. *Si* $\frac{r}{d}\leq\alpha+1$ *entonces el número óptimo de ciclos que maximiza* U *es*

$$N^*=\left[\frac{hmr(d+r)}{2dS(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Ejemplo 2.1. *Considerando la siguiente información:*

Demanda anual=10.000, $d=40/$*día,* $r=36/$*día,* $m=250$ *días,*
$S=\$200/$*setup,* $p=\$40/$*unidad,* $c=\$30/$*unidad,* $\pi=\$5/$*unidad,*
$h=20\,\%$ *de* c*,* $\alpha=1{,}5$.

Se verifica que $\frac{r}{d}<\alpha+1$*; luego, de la proposición* (2.1)*, el número óptimo de ciclos es*

$$N^*=\left[\frac{hmr(d+r)}{2dS(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=6,4\,.$$

La producción óptima por ciclo es $Q^*=\frac{rm}{(\alpha+1)N^*}=561{,}95$ *unidades; luego la producción total en el horizonte de planificación es 3.600 unidades. De* (1) *la demanda no satisfecha en el horizonte es 6.400 unidades. Y de* (2) *la utilidad máxima en el horizonte de planificación es* \$1437,50122.

3 Caso para el cual $\frac{r}{d} > \alpha + 1$

El nivel de inventario para cualquier instante $t \in \left[0, \frac{m}{N}\right]$, se expresa (figura 3)

$$I(t) = \begin{cases} \frac{rm}{(\alpha+1)N} - dt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} \\ \frac{rm(1-\alpha)}{(\alpha+1)N} - (d-r)t & \text{si } \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} < t \leq \frac{m}{N}\,. \end{cases}$$

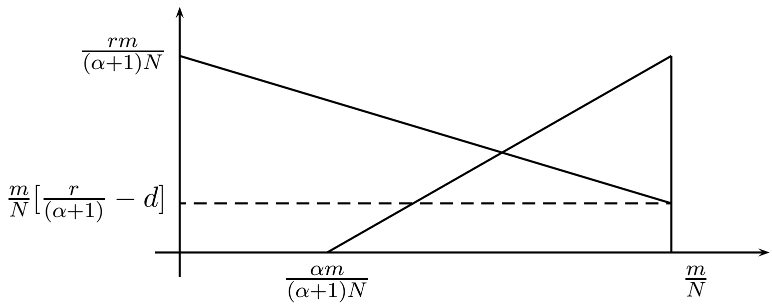

Figura 3: Nivel de inventario para $\frac{r}{d} > \alpha + 1$

En esta situación se tendrá exceso de producción y no habrá costo generado por la penalidad debido a unidades insatisfechas, al contrario, se tendrá un precio de salvamento k por cada unidad que hubiese sido sobreproducida.

El número de unidades sobreproducidas en todo el horizonte, está dado por

$$-\,m\left[d - \frac{r}{(\alpha+1)}\right]. \tag{3}$$

El inventario promedio es

$$\frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = -\frac{m[\alpha^2 d + 2\alpha(d-r) + d - 3r]}{2N(\alpha+1)^2}\,.$$

El costo de mantenimiento de inventario es

$$-h\frac{m[\alpha^2 d + 2\alpha(d-r) + d - 3r]}{2N(\alpha+1)^2}\,.$$

Luego, la utilidad en el horizonte de planificación se expresa

$$U(N) = [p-c]\frac{rm}{\alpha+1} + h\frac{m[\alpha^2 d + 2\alpha(d-r) + d - 3r]}{2N(\alpha+1)^2} + km\left[\frac{r}{(\alpha+1)} - d\right] - NS\,. \tag{4}$$

Lema 3.1. *Si* $\alpha, x, y \in \Re^+$ *entonces*

$$A(x,y) = \alpha^2 y + 2\alpha(y-x) + y - 3x$$

es decreciente en x.

Proposición 3.1. *Si* $\frac{r}{d} > \alpha + 1$ *entonces el número óptimo de ciclos que maximiza* U *es*

$$N^* = \left[\frac{-hm[\alpha^2 + 2\alpha(d-r) + d - 3r]}{2S(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración 1. *Si* $\frac{r}{d} > \alpha + 1$*, la función de utilidad está dada por* (4)*. Al resolver para* N *la ecuación* $\frac{dU}{dN} = 0$*, se obtiene*

$$N^* = \left[\frac{-hm[\alpha^2 + 2\alpha(d-r) + d - 3r]}{2S(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Es fácil verificar que

$$\frac{d^2U}{dN^2} = \frac{m[\alpha^2 d + 2\alpha(d-r) + d - 3r]}{N^3(\alpha+1)^2},$$

de la hipótesis $\frac{r}{d} > \alpha + 1$ *y por el lema* (3.1) *se verifica que*

$$A(r,d) < A(d\alpha + d, d) = -\alpha^2 d - 2d - 3d\alpha < 0\,.$$

En efecto

$$\frac{d^2U}{dN^2} = m\frac{A(r,d)}{N^3(\alpha+1)^2} < 0\,,$$

luego N^* *maximiza* U.

Ejemplo 3.1. *Suponiendo la siguiente información:*

Demanda anual =7.500, $d = 30/$*día,* $r = 40/$*día,* $m = 250$ *días,*
$S = \$200/$*setup,* $p = \$40/$*unidad,* $c = \$30/$*unidad,* $k = \$5/$*unidad,*
$h = 20\,\%$*, de* c*,* $\alpha = 0{,}3$.

Se verifica que $\frac{r}{d} > \alpha + 1$.

De la proposición (3.1)*, el número óptimo de ciclos es*

$$N^* = \left[\frac{-hm[\alpha^2 + 2\alpha(d-r) + d - 3r]}{2S(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 14{,}38\,.$$

La producción óptima por ciclo es $Q^* = \frac{rm}{(\alpha+1)N^*} = 534{,}617$ *unidades, luego la producción anual es 7.692,3 unidades. De* (3) *el número de unidades en sobreproducción durante el horizonte completo es* 192,3 *unidades. Y de* (4) *la utilidad máxima es \$64.436,9 .*

4 El problema de la sobreproducción

Intuitivamente, es fácil concluir que la sobreproducción es económicamente conveniente si el precio de salvamento k es tal que

$$c < k < p\,,$$

es decir, el precio de salvamento permite la recuperación total de los costos de producción por unidad. En caso contrario, que desde la lógica de la teoría económica sólo es posible $k < c$, es necesario actuar sobre el tiempo de trabajo y/o el tiempo de producción, de tal manera que ciclo a ciclo se agote el inventario, es decir, se debe encontrar un α que produzca una situación como la siguiente.

$$I\left(\frac{m}{N}\right) = 0\,.$$

Entonces, la constante de proporcionalidad se convierte en

$$\alpha' = \frac{r}{d} - 1\,.$$

Desde el supuesto inicial, se nota que $\alpha' > \alpha$, lo cual indica que con α' el tiempo en el cual la unidad de producción está inhabilitada es mayor, lo cual es fácilmente demostrable, pues T es creciente en α y T' es decreciente en α. Es también pertinente anotar que la variación de la constante de proporcionalidad no distorciona el modelo, pues se debe respetar un mínimo receso, el cual para este caso se está ampliando. Así, los nuevos tiempos vienen dados por

$$T = \frac{m(r-d)}{rN}\,, \qquad T' = \frac{md}{rN}\,.$$

De esta manera, con un tiempo de descanso más amplio y un tiempo de trabajo más corto, el número de unidades producidas en un ciclo, que es menor que en la propuesta original, está dado por

$$Q = \frac{md}{N}\,.$$

De la misma manera que en los casos anteriores, el nivel de inventario $I(t)$ es una función del tiempo que representa la cantidad almacenada en cualquier instante t. Luego el nivel de inventario para un $t \in \left[0, \frac{m}{N}\right]$ se expresa

$$I(t) \quad = \quad \begin{cases} \frac{md}{N} - dt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{m(r-d)}{rN} \\ \frac{m}{N}(2d-r) - (d-r)t & \text{si } \frac{m(r-d)}{rN} < t \leq \frac{m}{N}\,. \end{cases}$$

El inventario promedio es

$$\frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = \frac{md(d+r)}{2rN}\,.$$

El costo de mantenimiento del inventario en el horizonte de planificación es, entonces

$$h\frac{md(d+r)}{2rN}\,.$$

Luego, la utilidad viene dada por

$$U(N) = (p-c)dm - h\frac{md(d+r)}{2rN} - NS\,,$$

por tanto, el número óptimo de ciclos que maximiza la utilidad es

$$N^* = \left[\frac{hmd(d+r)}{2rS}\right]^{\frac{1}{2}}\,.$$

5 Modelo de producción limitada y orden externa

Se analiza un modelo de producción–inventario semejante al modelo anterior. Considerando el caso para el cual $\dfrac{r}{d} < \alpha + 1$, la demanda insatisfecha puede traer problemas de *goodwill* y pérdida de la buena voluntad de los clientes;

por tal motivo se considera posible que el faltante de unidades necesarias para satisfacer la demanda sea abastecido por un distribuidor externo, a quien se le comprarán dichas unidades en déficit; como consecuencia no habrá demanda insatisfecha. El tratamiento es similar a la técnica utilizada en [2].

El número de unidades solicitadas en cada ciclo al distribuidor externo, es el número de unidades faltantes en el modelo anterior, para el caso que $\dfrac{r}{d} \leq \alpha + 1$, y está dado por

$$Q_0 = \frac{m}{N}\left[d - \frac{r}{\alpha+1}\right]. \tag{5}$$

Los supuestos adicionales que se consideran son:

- No hay agotamiento de existencias.
- La obtención de la orden externa no modifica el tiempo de producción de la orden interna.
- La orden externa es recibida y se ubica en el lote de producción.

La notación adicional para el modelo:

v**:** costo por unidad solicitada al distribuidor externo

Q_0**:** cantidad solicitada al distribuidor externo

O**:** costo fijo de cada orden externa, independiente del volumen.

El nivel de inventario para cualquier instante $t \in [0, \frac{m}{N}]$, se expresa (figura 4)

$$I(t) \quad = \quad \begin{cases} \frac{dm}{N} - dt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} \\ \frac{dm}{N} - \frac{r\alpha m}{(\alpha+1)N} - (d-r)t & \text{si } \frac{\alpha m}{(\alpha+1)N} < t \leq \frac{m}{N}\,. \end{cases}$$

El inventario promedio en el horizonte está dado por

$$\frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = \frac{m(\alpha^2 d + 2\alpha d + d + r)}{2N(\alpha+1)^2}\,.$$

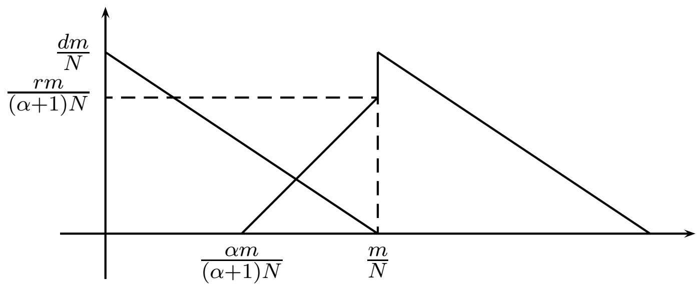

Figura 4: Modelo de producción limitada y orden externa

El costo de mantenimiento de inventario es

$$h\frac{m(\alpha^2 d + 2\alpha d + d + r)}{2N(\alpha+1)^2}\,.$$

La demanda de unidades en cada ciclo de longitud $\frac{m}{N}$ es de $d\frac{m}{N}$. Luego la demanda total en todo el horizonte es dm unidades. Puesto que no hay déficit de unidades se tiene un ingreso de pdm. La utilidad en todo el horizonte se expresa como

$$U(N) = pdm - vm\left[d - \frac{r}{(\alpha+1)}\right] - c\frac{rm}{(\alpha+1)} - h\frac{m(\alpha^2 d + 2\alpha d + d + r)}{2N(\alpha+1)^2} - N(S+O)\,. \quad (6)$$

De (6) se obtiene que

$$\frac{d^2U}{dN^2} = -\frac{hm(\alpha^2 d + 2\alpha d + d + r)}{2N^3(\alpha+1)^2} < 0\,,$$

luego el número de ciclos N^* que maximiza la utilidad es

$$N^* = \left[\frac{hm(\alpha^2 d + 2\alpha d + d + r)}{2(\alpha+1)^2(S+O)}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Ejemplo 5.1. *Considerando la siguiente información:*

Demanda anual $= 10000$, $d = 40/$*día*, $r = 36/$*día*, $m = 250$ *días*,
$S = \$200/$*setup*, $p = \$40/$*unidad*, $c = \$30/$*unidad*, $v = \$42/$*unidad*,
$h = 20\,\%$ *de* c, $\alpha = 1{,}5$, $O = 100$.

Se verifica que $\frac{r}{d} < \alpha + 1$*; luego de* (7)*, el número óptimo de ciclos es*

$$N^* = \left[\frac{hm(\alpha^2 d + 2\alpha d + d + r)}{2(\alpha+1)^2(S+O)}\right]^{\frac{1}{2}} = 11,72\,.$$

La producción óptima por ciclo es $Q^* = \frac{rm}{(\alpha+1)N^*} = 307{,}16$ *unidades, luego la producción en todo el horizonte es de 3.600 unidades. De* (5)*, la cantidad de unidades solicitadas por cada ciclo al distribuidor externo es* 546,075*; para el horizonte completo sería entonces 6.400 unidades. Y de* (6)*, la utilidad máxima es $16.755,68.*

6 Conclusiones

En éste, como en todo proceso de optimización de la empresa, el punto de partida es la función de utilidad y, para el caso en consideración, la variable a optimizar es el número de ciclos que maximiza dicha función, cuyo valor depende del inventario promedio y los costos fijos de preparación por ciclo, ya que en el horizonte de planificación los demás componentes de la función de utilidad son propios de cada ciclo y no presentan intemporalidad para ser determinantes del número óptimo de ciclos.

Por otra parte, la sobreproducción se presenta como un problema adicional, ya que producir unidades que no se venden genera un doble costo; por un lado el costo de producirlo y, sumado a ello, el costo de mantener dichas unidades en el inventario. Por tanto se establecen dos alternativas a dicho problema:

- La recuperación de los costos unitarios de producción, es decir, $c < k < p$.
- Efectuar cambios sobre la constante de proporcionalidad, tal que no ocurra la sobreproducción.

Una extensión de este trabajo sería considerar el modelo para tasas de demanda y producción no constantes, problema de interés para investigaciones futuras.

7 Agradecimiento

Los autores agradecen al CODI la financiación del proyecto; a Jairo Villegas Gutiérrez por las aclaraciones realizadas; a dos evaluadores anónimos por las pertinentes observaciones; al Centro de Investigaciones Económicas (CIE) y al departamento de Estadística y Matemáticas de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Antioquia, por los medios necesarios y excelente ambiente de trabajo, y por último, y no por eso en menor grado, a los estudiantes Juliana Moreno, Juan David Porras, Diego Alejandro Castañeda y al docente Jamer Carmona López por la compañía académica en el proceso.

Referencias

[1] S. K. Goyal, M. Gopalakrishnan. Production lot sizing model With insufficient production capacity. *Production planing control*, 7, 222-224 (1996).

[2] M. A. Hariga. Economic production-ordering quantity models with limited production capacity. *Production Planing Control*, **9**(7), 671-674, (1998).

[3] H. Laniado. *Modelo de inventario determinista con tasa de demanda creciente*, Tesis de Maestría, Universidad EAFIT, 2003.