

# Universalidad de la computación cuántica geométrica: modelo de tres estados<sup>1</sup>

Andrés Sicard<sup>2</sup> y Mario Elkin Vélez<sup>3</sup>

*Recepción: 23 de febrero de 2004 — Aceptación: 07 de septiembre de 2004*  
*Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

---

## Resumen

El modelo de tres estados es un modelo de computación cuántica geométrica. Se ilustra que éste es un modelo de computación cuántica universal, con base en el trabajo desarrollado por Niskanen, Nakahara y Salomaa [16]. Las universalidades  $U(2)$  y  $U(2^{n \geq 1})$  del modelo se obtienen a partir de la construcción de las compuertas de rotación  $R_x(\alpha)$  y  $R_y(\alpha)$ , y de las compuertas de Hadamard  $H$  y de fase  $B(\eta)$ , respectivamente. Para cada compuerta, se presenta explícitamente el operador de holonomía  $\Gamma_A(\gamma)$  y el ciclo  $\gamma$  sobre el cual es construida.

**Palabras claves:** computación cuántica geométrica, compuertas cuánticas universales, modelo de tres estados.

## Abstract

The three state model is a geometric quantum computation model. We show that this one is an universal quantum computation model, with base in the work developed by Niskanen, Nakahara and Salomaa [16]. The  $U(2)$  and  $U(2^{n \geq 1})$  universalities are obtained from the construction of the rotations gates  $R_x(\alpha)$  and  $R_y(\alpha)$ , and the Hadamard gate  $H$  and the phase gates  $B(\eta)$ , respectively. For every quantum gate, we explicitly show the holonomy operator  $\Gamma_A(\gamma)$  and the loop  $\gamma$  on which this is built.

**Key words:** quantum geometric computation, universal quantum gates, three state model.

---

<sup>1</sup> Artículo financiado por la Universidad EAFIT bajo el proyecto de investigación *Computación Cuántica Geométrica No Abeliانا*, N0. PY0117. Una versión preliminar de los resultados obtenidos en este artículo en [21].

<sup>2</sup> Magister en Ingeniería Informática, asicard@eafit.edu.co, profesor asociado e integrante del grupo en Lógica y Computación, Universidad EAFIT.

<sup>3</sup> Magister en Física, mvelez@eafit.edu.co, profesor asociado e integrante del grupo en Lógica y Computación, Universidad EAFIT.

## 1 Introducción

En la actualidad, la Computación Cuántica Geométrica (CCG) es un área activa de investigación en el contexto de la Computación Cuántica y realiza aportes a ésta última, en las subáreas de modelos de computación y propuestas de implementación, como es evidenciado por las diferentes publicaciones en el área [28, 19, 9, 10, 17, 8, 11, 13, 16]. La CCG está sustentada en varios fenómenos y situaciones físicas observadas experimentalmente (tales como la fase de Berry y la evolución adiabática), en la formulación matemática de las mismas (en la teoría de los haces fibrados principales) y en la posibilidad de “realizar” compuertas cuánticas (compuertas de fase) con el *corpus* físico-matemático anterior. La fase a partir de la cual se construyen las compuertas cuánticas en los modelos de CCG tiene un carácter puramente geométrico, detallado teóricamente por grupos de holonomías adecuadamente formulados.

En la Computación Cuántica Geométrica Abelianiana (CCGA), la conexión o potencial *gauge* toma valores en el álgebra conmutativa de Lie asociada al grupo de Lie  $U(1)$ , de donde se obtienen entonces compuertas cuánticas de fase abelianas [24, 25], mientras que en la Computación Cuántica Geométrica No Abelianiana (CCGNA), la conexión toma valores en el álgebra no conmutativa de Lie asociada al grupo de Lie  $U(2^{n \geq 1})$ , en cuyo caso se obtienen compuertas cuánticas de fase no abelianas [26].

Por otra parte, la universalidad de un modelo de computación cuántica, es decir, su capacidad de realizar cualquier operación que realice una máquina de Turing, se establece por su capacidad de generar un conjunto de compuertas cuánticas  $\mathcal{U}$ , tales que cualquier transformación unitaria  $U(2^{n \geq 1})$ , es decir, cualquier compuerta cuántica que opere sobre  $n$ -qubits, puede ser aproximada con suficiente exactitud por un circuito cuántico que consta únicamente de un número finito de compuertas del conjunto  $\mathcal{U}$  [12].

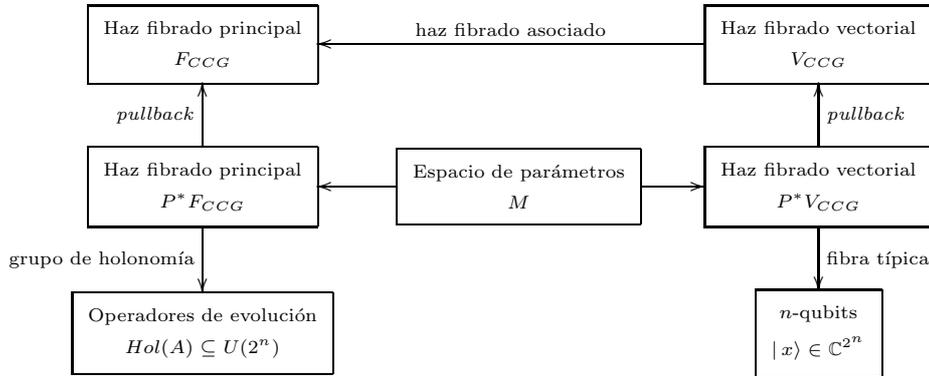
El objetivo del presente artículo es ilustrar explícitamente la universalidad del modelo de CCGNA denominado modelo de tres estados [16, 15, 26, 27]. En principio, para obtener la universalidad de un modelo de computación cuántica sería necesario una demostración por inducción, a partir de la cual se establezca la universalidad para las compuertas cuánticas  $U(2)$  de 1-qubit,  $U(4)$  de 2-qubits,  $U(8)$  de 3-qubits y así sucesivamente, hasta establecer la universalidad de las compuertas  $U(2^n)$  de  $n$ -qubits. Contrario a este procedimiento, con base en el trabajo desarrollado por Niskanen, Nakahara y Salomaa [16] se ilustra en el presente artículo, como establecer la universalidad del modelo de tres estados sólo a partir de la universalidad para  $U(2)$  y para  $U(4)$ , de acuerdo a los resultados actuales relacionados con los conjuntos mínimos de compuertas cuánticas universales [7, 12, 7, 8]. La universalidades  $U(2)$  y  $U(4)$  del modelo se obtienen a partir de la construcción de las compuertas de rotación  $R_x(\alpha)$  y  $R_y(\alpha)$ , y de las compuertas de Hadamard  $H$  y de fase  $B(\eta)$ , respectivamente. Para cada compuerta, se presenta explícitamente el operador de holonomía  $\Gamma_A(\gamma)$  y el ciclo  $\gamma$  sobre el cual es construída.

## 2 Estructura matemática de la CCGNA

En el contexto de las compuertas y circuitos cuánticos, la computación cuántica puede ser vista como la aplicación de un operador unitario de evolución  $U \in U(2^n)$  sobre un  $n$ -qubit<sup>1</sup>  $|x\rangle = |x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$ , para producir un nuevo  $n$ -qubit  $|x'\rangle = |x'_1, \dots, x'_n\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$ , es decir

$$U|x\rangle = |x'\rangle. \quad (1)$$

En el contexto de la CCGNA, los operadores de evolución  $U \in U(2^n)$  corresponden al grupo de holonomía  $Hol(A) \subseteq U(2^n)$ , asociado a la conexión  $A$  de un haz fibrado principal y los  $n$ -qubits  $|x\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$  corresponden a elementos de la fibra típica de una haz fibrado vectorial, la cual es isomorfa a  $\mathbb{C}^{2^n}$ . En particular, a partir de un haz fibrado principal  $F_{CCG}$  se construye un haz fibrado vectorial  $V_{CCG}$  asociado. Puesto que los operadores de evolución  $Hol(A)$  surgen de una familia de Hamiltonianos  $\{H_\lambda \mid \lambda \in M\}$  adecuadamente caracterizada por  $M$ , es necesario contar con un espacio de parámetros de control  $M$ . La relación entre este espacio  $M$  y los haces fibrados  $F_{CCG}$  y  $V_{CCG}$  es inducida al construir un nuevo haz fibrado principal  $P^*F_{CCG}$  y un nuevo haz fibrado vectorial  $P^*V_{CCG}$ , denominados los *pullbacks* debido a  $M$ , de los haces fibrados  $F_{CCG}$  y  $V_{CCG}$ , respectivamente. Entonces, los operadores de evolución  $Hol(A)$  se obtienen a partir de la conexión  $A$  asociada al haz fibrado principal  $P^*F_{CCG}$  y éstos operan sobre los  $n$ -qubits  $|x\rangle$  representados por puntos de la fibra típica del haz fibrado vectorial  $P^*V_{CCG}$  [26, 10], tal como es ilustrado por la figura (1).



**Figura 1:** Estructura matemática de la CCGNA

Sea  $M$  el espacio de parámetros de control y sea  $\gamma$  un ciclo en  $\lambda_0 \in M$ , es decir

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow M, \quad \text{tal que } \gamma(0) = \gamma(1) = \lambda_0, \quad (2)$$

<sup>1</sup>Los términos ‘compuerta sobre  $n$ -qubits’ y ‘compuerta u operador  $U(2^n)$ ’ se intercambiarán libremente.

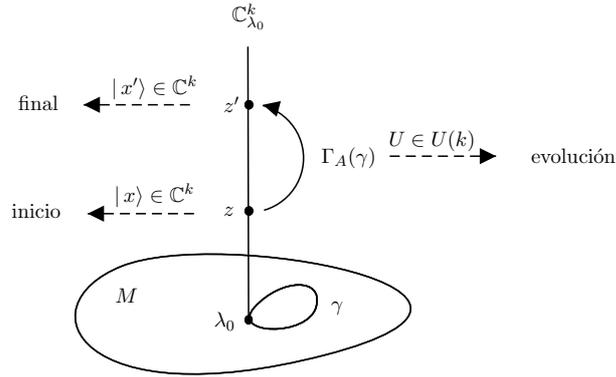
sobre el ciclo  $\gamma$  el operador de holonomía  $\Gamma_A(\gamma)$  está definido por

$$\Gamma_A(\gamma) = \left\{ \mathcal{P} \exp \left( \oint_{\gamma} A \right) \right\} \in U(2^n), \quad (3)$$

donde  $\mathcal{P}$  es el operador camino ordenado y  $A$  es la conexión asociada al haz fibrado  $P^*F_{CCG}$ . El grupo de holonomía  $Hol(A)$  está constituido por todos los operadores de holonomía  $\Gamma_A(\gamma)$ , es decir

$$Hol(A) = \{ \Gamma_A(\gamma) \mid \gamma: \text{trayectoria cerrada sobre } \lambda_0 \in M \} \subseteq U(2^n). \quad (4)$$

La identificación del espacio de los estados cuánticos ( $n$ -qubits) como la fibra típica  $\mathbb{C}^{2^n}$  del haz fibrado vectorial  $P^*V_{CCG}$  generado a partir de los vectores propios del Hamiltoniano  $H_{\lambda_0}$  parametrizado por  $M$ , y la identificación del grupo de operadores de evolución unitarios (compuertas cuánticas) como el grupo de holonomía  $Hol(A)$  compuesto de los operadores de holonomía  $\Gamma_A(\gamma)$ , los cuales son obtenidos a partir de la conexión  $A$  del haz fibrado principal  $P^*F_{CCG}$  y de un ciclo  $\gamma$  sobre el espacio de parámetros de control  $M$ , establecen finalmente, desde una perspectiva computacional, el modelo de la CCGNA [26, 10]. El modelo es ilustrado por la figura (2), donde  $|x\rangle, |x'\rangle$  y  $U$  están relacionados por (1) y  $k = 2^n$ .



**Figura 2:** Computación en el modelo de la CCGNA

### 3 Computación universal para la CCGNA

En la actualidad se conocen varios conjuntos de compuertas cuánticas universales, tales como, la compuerta  $U(8)$  *controlled-controlled rotation* [6], compuertas de 2-qubits con parámetros irracionales [2], el conjunto formado por las compuertas de Hadamard,  $\pi/8$  y CNOT [3, 4], o el conjunto formado por las compuertas de Hadamard y Toffoli [1, 20]<sup>2</sup>. De

<sup>2</sup>Usualmente la compuerta de Toffoli representada por el circuito cuántico

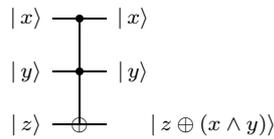
hecho, se ha demostrado que “casi” todas las compuertas  $U(4)$  son universales [7, 12] y se ha demostrado que no es posible obtener universalidad sólo a partir de compuertas  $U(2)$  [7]. Los resultados anteriores indican que para obtener la universalidad para  $U(2^{n \geq 1})$  sólo es necesario contar con algunas compuertas  $U(2)$ , las cuales generan la universalidad sobre los 1-qubits, y con algunas compuertas  $U(4)$ , las cuales generan la universalidad sobre los  $n$ -qubits.

Por otra parte, la universalidad o no de un modelo de CCG está determinada por el grupo de holonomía  $Hol(A)$  asociado a su conexión  $A$ , de manera tal que mientras que los modelos de la CCGNA son universales [18, 16, 22], los modelos de la CCGA no lo son [26]. Hasta hace poco existían algunos malos entendidos respecto a la universalidad de la CCGNA para el caso de  $U(4)$ , puesto que algunos autores afirmaban que era necesario que la conexión  $A$  fuera irreducible, es decir,  $Hol(A) = U(2^n)$  [28, p. 97], mientras que otros autores demostraban que la conexión para  $U(4)$  no era irreducible [10, p. 81]. Hoy en día se sabe que la condición de irreducibilidad de la conexión  $A$  para  $U(4)$  es una condición suficiente, pero no necesaria para obtener la universalidad [13]. Cuando la conexión no es irreducible, la universalidad para  $U(4)$  se obtiene demostrando que el modelo puede construir al menos una compuerta de 2-qubits “no local” o “no trivial”, es decir, una compuerta que no sea de la forma  $SU(2) \times \mathbb{I}_2$  o de la forma  $\mathbb{I}_2 \times SU(2)$  [14]. Dicho en otros términos, un modelo de CCGNA es universal para  $U(4)$ , si éste tiene una conexión irreducible, o si éste es capaz de producir al menos una compuerta  $U(4)$  que genere estados enredados a partir de los elementos de la base canónica para un 2-qubit.

A continuación se presentan dos conjuntos de compuertas que son universales para  $U(2)$  y para  $U(2^{n \geq 1})$ . Sean  $R_x(\theta)$ ,  $R_y(\theta)$  y  $R_z(\theta)$  las compuertas de rotación dadas por

$$R_k(\theta) = e^{-i\theta\Gamma_k/2}, \text{ para } k \in \{x, y, z\},$$

donde  $\Gamma_k$  son las matrices de Pauli, y sean  $B(\eta)$  las compuertas de fase controlada de 2-qubit dadas por



es considerada una compuerta universal. Sin embargo, la universalidad de la compuerta de Toffoli se refiere a una “universalidad clásica”, es decir, es posible construir cualquier circuito clásico con un número finito de compuertas de Toffoli. Este hecho está sustentado en que la compuerta de Toffoli implementa un conjunto completo de operadores para la lógica clásica (tales como los operadores  $\wedge$  y  $\neg$ ) como es señalado por

$$z \oplus (x \wedge y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{si } z = 0 \text{ (compuerta } \textit{and}), \\ x \oplus z & \text{si } y = 1 \text{ (compuerta } \textit{xor}), \\ \neg z & \text{si } x = y = 1 \text{ (compuerta } \textit{not}), \\ z & \text{si } x = 0; y = 1 \text{ (compuerta } \textit{identidad}). \end{cases}$$

$$B(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\eta} \end{pmatrix}.$$

**Teorema 3.1 (Universalidad  $U(2)$ ).** *Sea  $U$  cualquier operador unitario que opere sobre un 1-qubit. Entonces existen números reales  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  tales que [5, p. 176]*

$$U = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta). \quad (5)$$

**Ejemplo 3.1.** Para la compuerta de Hadamard  $H$  dada por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

de acuerdo al teorema (3.1) corresponde la descomposición

$$H = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta), \text{ donde } \alpha = -\frac{\pi}{2}, \beta = -\pi, \gamma = \frac{\pi}{2}, \delta = 0. \quad (6)$$

**Teorema 3.2 (Universalidad  $U(2^{n \geq 1})$ ).** *La compuerta de Hadamard y las compuertas de fase controladas de 2-qubits  $B(\eta)$  son un conjunto de compuertas universales para  $U(2^{n \geq 1})$  [8, p. 2503].*

## 4 El modelo de tres estados

El modelo de tres estados es un modelo de CCGNA construido por [16]. Para la construcción del modelo para el caso de 1-qubit se define un hamiltoniano  $H_0$  representado en su forma diagonal por

$$H_0 = \epsilon |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

donde  $|2\rangle = (1 \ 0 \ 0)^T$ . El hamiltoniano (7) presenta una degeneración de orden 2 para el autovalor de energía  $E = 0$  y un autovalor  $\epsilon$  diferente de cero del cual deriva un estado no degenerado. Los autovectores correspondientes al autovalor de energía  $E = 0$  son los qubits  $|0\rangle, |1\rangle$  y éstos están representados por la segunda y tercera columna de (7). El espacio computacional de la computación cuántica sobre un qubit, en el presente modelo, es precisamente el espacio de autovectores degenerados asociados al autovalor  $E = 0$ . La primera columna de (7) corresponde al autovector asociado al autovalor de energía  $\epsilon \neq 0$ , este último autovector es denominado estado auxiliar.

Para el caso del hamiltoniano (7) la transformación isoespectral que deja invariante el subespacio de estados degenerados está dada por [26]

$$H(\lambda_i, \mu_i) = g(\lambda_i, \mu_i)H_0g^\dagger(\lambda_i, \mu_i), \quad (8)$$

donde  $g(\lambda_i, \mu_i) \in SU(2)$ , los parámetros  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$  son los parámetros de control que definen el espacio paramétrico  $M$  e  $i \in \{1, 2\}$ .

La estructura topológica de la construcción geométrica que se deriva a través de los subespacios bidimensionales formados por los autoestados degenerados del hamiltoniano paramétrico (8), permite definir una conexión  $A$  no abeliana, la cual determina el modo de realizar el transporte paralelo de estados degenerados, conducidos a lo largo de los caminos cerrados (2) mediante la evolución adiabática. La conexión  $A$  de la estructura topológica es antihermítica  $A = -A^\dagger$  y está definida por

$$A = A_{\lambda_i}d\lambda_i + A_{\mu_i}d\mu_i - A_{\lambda_i}^\dagger d\bar{\lambda}_i - A_{\mu_i}^\dagger d\bar{\mu}_i \quad \text{donde } i \in \{1, 2\}.$$

Las componentes de la conexión  $A$  se calculan mediante la expresión

$$A_{\sigma_i}^{\alpha\beta} = \langle \alpha | g^\dagger \frac{\partial}{\partial \sigma_i} g | \beta \rangle,$$

donde  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$  rotulan los estados degenerados de  $H_0$  y  $\sigma_i \in \{\lambda_i, \mu_i\}$  pertenece al espacio de parámetros de control  $M$ . Bajo una adecuada selección de los parámetros de control las componentes de la conexión  $A$  toman la forma [26]

$$\begin{aligned} A_{\phi_1} &= \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen}^2 \theta_1 & -i \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 e^{ia} \\ -i \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 e^{ia} & i \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \end{pmatrix}, \\ A_{\theta_1} &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \psi_1)} \operatorname{sen} \theta_2 \\ -e^{-ia} \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{\phi_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \operatorname{sen}^2 \theta_2 \end{pmatrix}, \\ A_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $a = \phi_1 - \phi_2 - \psi_1$  y  $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1 \in \mathbb{R}$ . Con el conjunto de conexiones (9) es posible construir todas las compuertas cuánticas que actúan sobre un 1-qubit.

Como fue mencionado, un modelo de computación cuántica universal exige la construcción de transformaciones no locales que actúan sobre un 2-qubit. Para obtener estas compuertas en el modelo de tres estados se define el hamiltoniano

$$H_0^{2q} = H_0^a \otimes \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_3 \otimes H_0^b, \quad (10)$$

donde  $H_0^{2q}$  es el hamiltoniano inicial y  $H_0^a, H_0^b$  son hamiltonianos (7) asociados a los subsistemas de 1-qubit  $a$  y  $b$ . El conjunto de autovectores del hamiltoniano  $H_0^{2q}$  correspondientes al autovalor  $E = 0$  están dados por

$$\{|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}. \quad (11)$$

El espacio generado por el conjunto de vectores base definido en (11) es el espacio sobre el cual actúan las transformaciones de 2-qubit en el presente modelo. Los operadores que transforman los estados generados por la base (11) están dados por el producto de dos operadores definidos de acuerdo a

$$g(\xi, \lambda_i^a, \mu_i^a, \lambda_i^b, \mu_i^b) = g^{2q}(\xi)(g^a(\lambda_i^a, \mu_i^a) \otimes g^b(\lambda_i^b, \mu_i^b)),$$

donde  $g^{2q}(\xi)$  representa las transformaciones que no admiten una descomposición como un producto tensorial de transformaciones de 1-qubit y  $g^a(\lambda_i^a, \mu_i^a)$  y  $g^b(\lambda_i^b, \mu_i^b)$  con  $i \in \{0,1\}$ , representan las transformaciones de 1-qubit asociadas a los subsistemas  $a$  y  $b$ , las cuales se pueden componer mediante el producto tensorial de transformaciones de 1-qubit [16]. La transformación isoespectral que deja invariante el espacio de estados degenerados del Hamiltoniano (10) está dada por

$$H^{2q}(\xi, \lambda_i^a, \mu_i^a, \lambda_i^b, \mu_i^b) = g^{2q}(g^a \otimes g^b)H_0^{2q}(g^a \otimes g^b)^\dagger g^{2q\dagger}.$$

La conexión de la estructura topológica que se origina a partir de las transformaciones de 2-qubits es antihermítica  $A = -A^\dagger$ , como en el caso de las transformaciones de un 1-qubit. Las componentes de la conexión para el modelo de tres estados en el caso de 2-qubit están dadas por

$$A_{\sigma_i}^{\alpha\beta} = \left\langle \alpha \left| (g^a \otimes g^b)^\dagger g^{2q\dagger} \frac{\partial}{\partial \sigma_i} g^{2q}(g^a \otimes g^b) \right| \beta \right\rangle,$$

donde  $\sigma_i \in \{\xi, \lambda_i^a, \mu_i^a, \lambda_i^b, \mu_i^b\}$  pertenece al espacio de parámetros de control  $M$  y  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  pertenecen al conjunto (11) de autovectores del hamiltoniano  $H_0^{2q}$ . Estas componentes de la conexión bajo una adecuada selección de parámetros  $\xi, \theta_2^a, \theta_2^b \in \mathbb{R}$ , toman la forma [26]

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \cos^2 \theta_2^a \cos^2 \theta_2^b \end{pmatrix}, \quad A_{\theta_2^a} = A_{\theta_2^b} \otimes A_{\theta_2^b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Con el conjunto de conexiones de 2-qubits (12) y el conjunto de las conexiones de 1-qubit (9), es posible obtener la universalidad  $U(2^{n \geq 1})$  del modelo de tres estados.

## 5 Universalidad $U(2)$ para el modelo de tres estados

A partir de las componentes de la conexión (9), el operador de holonomía (3) y el grupo de holonomía (4), asociados al modelo de tres estados, para el caso de 1-qubit, toman la forma

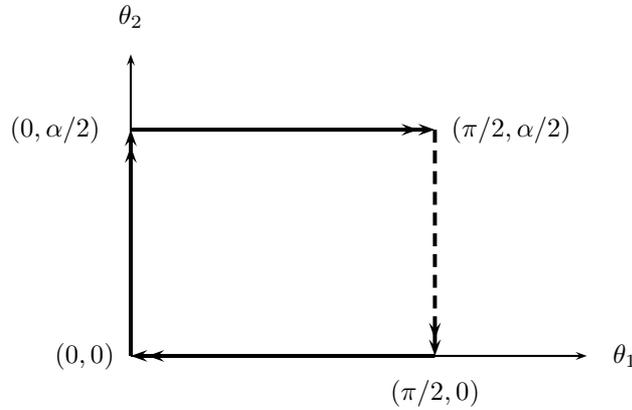
$$\Gamma_A(\gamma) = \left\{ \mathcal{P} \exp \left( - \oint_{\gamma} A_{\phi_1} d\phi_1 + A_{\theta_1} d\theta_1 + A_{\phi_2} d\phi_2 + A_{\theta_2} d\theta_2 \right) \right\} \in U(2), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Hol(A) &= \{ \Gamma_A(\gamma) \mid \gamma: \text{trayectoria cerrada sobre } \lambda_0 \in M(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2) \} \\ &= U(2). \end{aligned}$$

Puesto que el operador de holonomía (13) representa las compuertas cuánticas  $U(2)$  posibles de realizar en el modelo de tres estados, la idea entonces es construir ciclos sobre una variedad  $M$  parametrizada por  $\{\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2\}$ , de forma tal que las compuertas asociadas a estos ciclos, constituyan un conjunto de compuertas universales para  $U(2)$ . De acuerdo al teorema (3.1), salvo un factor de fase  $e^{i\alpha}$  expresado en (5), es necesario construir compuertas que produzcan las rotaciones  $R_x(\beta)$  y  $R_y(\gamma)$ , para obtener la universalidad de la compuertas que operen sobre un 1-qubit.

La construcción de la compuerta  $R_y(\alpha)$  se realiza sobre el plano  $(\theta_2, \theta_1)$  fijando a cero los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Sobre este plano se construye el ciclo  $\gamma_{R_y}$  representado por la figura (3), dado por

$$\gamma_{R_y}(\alpha): (0, 0) \rightarrow \left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow (0, 0).$$



**Figura 3:** Ciclo  $\gamma_{R_y}(\alpha)$  para la compuerta  $R_y(\alpha)$

Para el ciclo  $\gamma_{R_y}$ , sobre el plano  $(\theta_2, \theta_1)$ , la ecuación (13) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \Gamma_A(\gamma_{R_y}(\alpha)) &= \exp\left(-\oint_{\gamma_{R_y}(\alpha)} A_{\theta_2} d\theta_2 + A_{\theta_1} d\theta_1\right) \\
 &= \exp\left(-\int_{\alpha/2}^0 \left(A_{\theta_1}|_{\theta_2=\pi/2, \phi_1=\phi_2=0}\right) d\theta_1\right) \\
 &= \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & \alpha/2 \\ -\alpha/2 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
 &= R_y(\alpha).
 \end{aligned} \tag{14}$$

De acuerdo al cálculo anterior, la línea punteada de la figura (3) indica cual es la parte del ciclo  $\gamma_{R_y}$  y cual es la componente de la conexión que realmente contribuye a la formación de la compuerta  $R_y(\alpha)$ , puesto que en las otras partes del ciclo, las componentes de la conexión se anulan.

A diferencia de la compuerta  $R_y(\alpha)$  que es construida sobre un plano bidimensional, la compuerta  $R_x(\alpha)$  se construye sobre el plano tridimensional  $(\phi_2, \theta_2, \theta_1)$  fijando a cero el parámetro  $\phi_1$ , en cual el ciclo  $\gamma_{R_x}$  está dado por

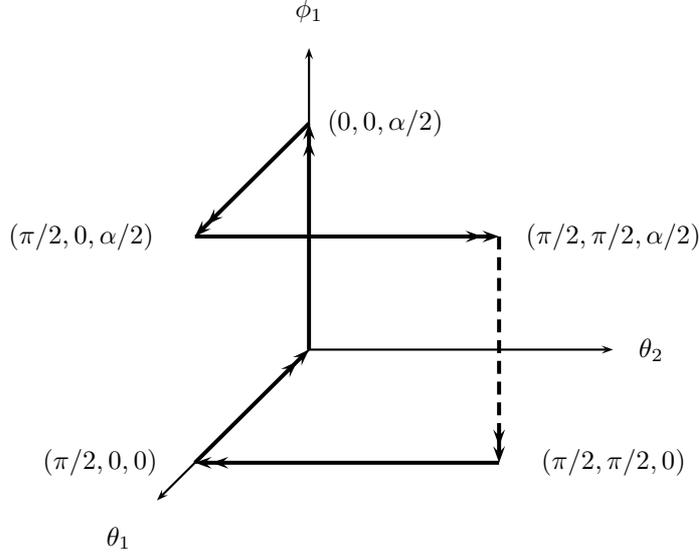
$$\gamma_{R_x}(\alpha): \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right).$$

En este caso, la ecuación (13) para el ciclo  $\gamma_{R_x}$ , sobre el plano  $(\phi_2, \theta_2, \theta_1)$ , toma la forma

$$\begin{aligned}
 \Gamma_A(\gamma_{R_x}(\alpha)) &= \exp\left(-\oint_{\gamma_{R_x}(\alpha)} A_{\phi_2} d\phi_2 + A_{\theta_2} d\theta_2 + A_{\theta_1} d\theta_1\right) \\
 &= \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & i\alpha/2 \\ i\alpha/2 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
 &= R_x(\alpha).
 \end{aligned} \tag{15}$$

De acuerdo al teorema (3.1), es posible obtener la universalidad para  $U(2)$  sin necesidad de la rotación  $R_z(\alpha)$ . Sin embargo, esta rotación será necesaria para construir una composición de caminos para obtener la compuerta de Hadamard, la cual a su vez es necesaria para obtener la universalidad para  $U(4)$  en el modelo de tres estados. Similar a la compuerta  $R_x(\alpha)$ , la compuerta  $R_z(\alpha)$  se construye sobre un plano tridimensional  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1)$  fijando a cero el parámetro  $\phi_2$ , en cual el ciclo  $\gamma_{R_z}$ , representado por la figura (4), está dado por [15, 16]

$$\begin{aligned}
 \gamma_{R_z}(\alpha): (0, 0, 0) &\rightarrow \left(0, 0, \frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \\
 &\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \rightarrow (0, 0, 0).
 \end{aligned}$$



**Figura 4:** Ciclo  $\gamma_{R_z}(\alpha)$  para la compuerta  $R_z(\alpha)$

La ecuación (13) para el ciclo  $\gamma_{R_z}$ , sobre el plano  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1)$ , toma la forma

$$\begin{aligned}
 \Gamma_A(\gamma_{R_z}(\alpha)) &= \exp \left( - \oint_{\gamma_{R_z}(\alpha)} A_{\theta_2} d\theta_2 + A_{\theta_1} d\theta_1 + A_{\phi_2} d\phi_2 \right) \\
 &= \exp \left[ - \begin{pmatrix} i\alpha/2 & 0 \\ 0 & -i\alpha/2 \end{pmatrix} \right] \\
 &= R_z(\alpha).
 \end{aligned} \tag{16}$$

## 6 Universalidad $U(2^{n \geq 1})$ para el modelo de tres estados

De acuerdo al teorema (3.2), la universalidad para la compuertas que operan sobre un  $n$ -qubit se obtiene a partir de la compuerta de Hadamard y las compuertas de fase controladas de 2-qubits  $B(\eta)$ .

Una vez obtenida la universalidad  $U(2)$  sobre el modelo de tres estados, es posible construir cualquier compuerta que opere sobre un 1-qubit, en particular, es posible construir la compuerta de Hadamard. Con base en (14), (15) y (16) se definen las matrices  $C_x(\alpha)$ ,  $C_y(\alpha)$  y  $C_z(\alpha)$  dadas por

$$\begin{aligned}
 R_x(\alpha) &= \exp[-C_x(\alpha)] = \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & i\alpha/2 \\ i\alpha/2 & 0 \end{pmatrix}\right], \\
 R_y(\alpha) &= \exp[-C_y(\alpha)] = \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & \alpha/2 \\ -\alpha/2 & 0 \end{pmatrix}\right], \\
 R_z(\alpha) &= \exp[-C_z(\alpha)] = \exp\left[-\begin{pmatrix} i\alpha/2 & 0 \\ 0 & -i\alpha/2 \end{pmatrix}\right].
 \end{aligned}$$

De acuerdo a (6), salvo el factor de fase  $e^{-i\pi/2}$ , la construcción de la compuerta de Hadamard se lleva a cabo realizando la rotación

$$\begin{aligned}
 H' &= R_x(-\pi)R_y(\pi/2)R_x(0) \\
 &= \exp[C_x(-\pi)]\exp[C_y(\pi/2)].
 \end{aligned}$$

Intuitivamente, los ciclos  $\gamma_{R_x}(-\pi)$  y  $\gamma_{R_y}(\pi/2)$  se pueden componer para obtener la rotación  $H'$ . Sin embargo, puesto que las matrices  $C_x(-\pi)$  y  $C_y(\pi/2)$  no conmutan, es necesario recurrir a la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff para expresar el producto de dos exponenciales de matrices como una “suma de exponenciales”, y de esta forma obtener la composición deseada. Para matrices  $A_1$  y  $A_2$ , la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff, a quinto orden, está dada por [23]

$$\begin{aligned}
 \exp(A_1)\exp(A_2) &\approx \\
 \exp\left[ &(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}A_{12} + \frac{1}{12}(A_{112} + A_{221}) + \frac{1}{24}A_{1221} \right. \\
 &\left. - \frac{1}{720}(A_{11112} - 2A_{21112} - 6A_{11221} - 6A_{22112} - 2A_{12221} + A_{22221}) \right], \tag{17}
 \end{aligned}$$

donde,

$$A_{kl\dots mn} = [A_k, [A_l, \dots [A_m, A_n] \dots]].$$

Sea  $NC(A_1, A_2)$  el término adicionado a (17) por la no conmutatividad de  $A_1$  y  $A_2$ , entonces la composición de caminos para obtener la rotación  $H'$  está dada por

$$\begin{aligned}
 H' &= \exp[-C_x(\pi)]\exp[-C_y(\pi/2)] \\
 &\approx \exp[-[C_y(\pi/2) + C_x(\pi) + NC(C_y(\pi/2), C_x(\pi))]] \\
 &\approx \exp[-[C_y(-0,05) + C_x(4,02) + C_z(-2,4)]].
 \end{aligned}$$

Una vez expresada la rotación  $H'$  como una suma de caminos, es posible componer los caminos  $\gamma_{R_y}$ ,  $\gamma_{R_x}$  y  $\gamma_z$ . La composición de estos caminos es un camino  $\gamma_{H'}(a, b, c)$  en el plano  $(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2)$  dado por

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{H'}(a, b, c): \\
 & \left. \begin{aligned}
 & (0, 0, 0, 0) \rightarrow \left(0, 0, 0, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \left(0, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \\
 & \left(0, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow (0, 0, 0, 0) \rightarrow
 \end{aligned} \right\} \text{camino } \gamma_{R_y}(a) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \left(0, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{b}{2}\right) \rightarrow \\
 & \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{b}{2}\right) \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \rightarrow (0, 0, 0, 0) \rightarrow
 \end{aligned} \right\} \text{camino } \gamma_{R_x}(b) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \left(\frac{c}{2}, 0, 0, 0\right) \rightarrow \left(\frac{c}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{c}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \\
 & \left(0, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left(0, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow (0, 0, 0, 0)
 \end{aligned} \right\} \text{camino } \gamma_{R_z}(c)
 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (13) para el ciclo  $\gamma_{H'}(a, b, c)$ , sobre el plano  $(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2)$ , donde  $a = -0,05$ ,  $b = 4,02$ , y  $c = -2,4$ , toma la forma

$$\begin{aligned}
 \Gamma_A(\gamma_{H'}(a, b, c)) &= \exp \left( - \oint_{\gamma_{H'}(a, b, c)} A_{\phi_1} d\phi_1 + A_{\phi_2} d\phi_2 + A_{\theta_1} d\theta_1 + A_{\theta_2} d\theta_2 \right) \\
 &= \exp [-(C_y(a) + C_x(b) + C_z(c))] \\
 &\approx H'.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, las compuertas de fase controlada  $B(\eta)$  son las únicas compuertas de 2-qubits que se requieren para demostrar la universalidad  $U(4)$  del modelo de tres estados, y por lo tanto, la universalidad  $U(2^{n \geq 1})$  en dicho modelo. El espacio de parámetros  $\{\xi, \theta_2^a, \theta_2^b\}$  es quien parametriza los componentes (12) de la conexión para el caso de 2-qubits. A partir de estas componentes, el operador de holonomía (3) y el grupo de holonomía (4), asociados al modelo de tres estados, para el caso de 2-qubit, toman la forma

$$\Gamma_A(\gamma) = \left\{ \mathcal{P} \exp \left( - \oint_{\gamma} (A_{\xi} d\xi + A_{\theta_2^a} d\theta_2^a) \right) \right\} \in U(4), \quad (18)$$

$$\text{Hol}(A) = \{ \Gamma_A(\gamma) \mid \gamma: \text{trayectoria cerrada sobre } \lambda_0 \in M(\xi, \theta_2^a, \theta_2^b) \} \\ \subset U(4).$$

Para la obtener la compuerta  $B(\eta)$ , se construye un ciclo  $\gamma_B$  en el plano  $(\theta_2^a, \xi)$ , fijando a cero el parámetro  $\theta_2^b$ , dado por [15, 16]

$$\gamma_B(\eta): (0, 0) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \eta\right) \rightarrow (0, \eta) \rightarrow (0, 0).$$

Para el ciclo  $\gamma_B$ , sobre el plano  $(\theta_2^a, \xi)$ , la ecuación (18) toma la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_A(\gamma_B(\eta)) &= \exp \left( - \oint_{\gamma_B(\eta)} (A_\xi d\xi + A_{\theta_2^a} d\theta_2^a) \right) \\ &= \exp \left[ - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\eta \end{pmatrix} \right] \\ &= B(\eta). \end{aligned}$$

## 7 Conclusiones

La universalidad de un modelo de Computación Cuántica se obtiene a partir de las posibilidades que ofrece el modelo para la construcción de un conjunto de compuertas cuánticas tales que cualquier transformación unitaria  $U(2^{n \geq 1})$  pueda ser aproximada con suficiente exactitud por un circuito cuántico que consta únicamente de un número finito de compuertas de dicho conjunto. Por lo general, estas compuertas cuánticas son algunas compuertas  $U(2)$ , es decir, compuertas sobre un 1-qubit y algunas compuertas  $U(4)$ , es decir, compuertas sobre un 2-qubit.

En el contexto de la Computación Cuántica Geométrica, uno de los modelos que presenta características de universalidad, es el modelo de tres estados, el cual se obtiene a partir de un Hamiltoniano degenerado en el valor de energía  $E = 0$ . Para este modelo, las compuertas se obtienen como operadores de holonomía  $\Gamma_A(\gamma)$  construidos con base en una conexión  $A$  y en un ciclo  $\gamma$  sobre un espacio paramétrico  $M$ . En particular, la universalidad  $U(2)$  del modelo se obtuvo al construir las compuertas de rotación  $R_x(\alpha)$  y  $R_y(\alpha)$ . La universalidad  $U(4)$  y por lo tanto la universalidad  $U(2^{n \geq 1})$  del modelo, se obtuvo al construir la compuerta de Hadamard  $H$  y las compuertas de fase  $B(\eta)$ .

## Agradecimientos

Los autores agradecen a Dennis Lucarelli por las aclaraciones realizadas y a tres evaluadores anónimos por sus acertadas observaciones y sugerencias.

## Referencias

- [1] Dorit Aharonov, *A simple proof that Toffoli and Hadamard are quantum universal*, [arXiv.org/abs/quant-ph/0301040](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0301040), 2003.
- [2] Adriano Barenco, *A Universal two-bit gate for quantum computation*, Proc. R. Soc. Lond. A, 449, 679–683 (1995).
- [3] Adriano Barenco et al, *Elementary gates for quantum computation*, Phys. Rev. A, 52, 3457–3467 (1995).
- [4] P. Oscar Boykin et al, *A new universal and fault-tolerant quantum basis*, Information Processing Letters, **75**(3), 101–107 (2000).
- [5] Isaac L. Chuang y Michael A. Nielsen, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [6] David Deutsch, *Quantum computational networks*, Proc. R. Soc. Lond. A, 425, 73–90 (1989).
- [7] David Deutsch, Adriano Barenco y Artur Ekert, *Universality in quantum computation*, Proc. R. Soc. Lond. A, 449, 669–677 (1995).
- [8] Artur Ekert et al, *Geometric quantum computation*, J. Mod. Optic., **47**(14/15), 2501–2513 (2000).
- [9] Kazuyuki Fujii, *Note on coherent states and adiabatic connections, curvatures*, J. Math. Phys., 41, 4406–4412 (2000).
- [10] ———, *Mathematical foundations of holonomic quantum computer*, Reports on Mathematical Physics, **48**(1/2), 75–82 (2001).
- [11] Jonathan Jones et al, *Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance*, Nature, 403, 869–871 (2000).
- [12] Seth Lloyd, *Almost any quantum logic gate is universal*, Phys. Rev. Lett., **75**(2), 346–349 (1995).
- [13] Dennis Lucarelli, *Chow’s theorem and universal holonomic quantum computation*, J. Phys. A: Math. Gen., 35, 5107–5114 (2002).
- [14] ———, *Comunicación personal*, 2003.
- [15] Antti Niskanen, *Holonomic quantum computation*, Master’s thesis, Helsinki University of Technology, [focus.hut.fi/projects/materials/pubps/holonomic.ps.gz](https://focus.hut.fi/projects/materials/pubps/holonomic.ps.gz), 2002.
- [16] Antti Niskanen, Mikio Nakahara, y Martti Salomaa, *Realization of arbitrary gates in holonomic quantum computation*, Phys. Rev. A, 67, 012319 (2003).
- [17] Jiannis Pachos y Spiros Chountasis, *Optical holonomic quantum computer*, Phys. Rev. A, 62, 052318 (2000).

- [18] Jiannis Pachos y Paolo Zanardi, *Quantum holonomies for quantum computing*, Int. J. Mod. Phys. B, **15**(9), 1257–1285 (2001).
- [19] Jiannis Pachos, Paolo Zanardi, y Mario Rasetti, *Non-abelian Berry connections for quantum computation*, Phys. Rev. A, **61**, 010305 (1999).
- [20] Yaoyun Shi, *Both Toffoli and Controlled-NOT need little help to do universal quantum computation*, [arXiv.org/abs/quant-ph/0205115](http://arXiv.org/abs/quant-ph/0205115), 2002.
- [21] Andrés Sicard, *Universalidad para el modelo de 3 estados de la computación cuántica geométrica*, Memorias IX Encuentro ERM, Universidad Surcolombiana, Neiva, <http://sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/archivos/universalidad3estadosERM-slides.ps.gz>, septiembre 15 al 19 de 2003.
- [22] Andrés Sicard y Mario Vélez, *Universalidad de la computación cuántica geométrica: modelo del medio Kerr*, Revista Colombiana de Física, **36**(1), 230–234, (2004). *Memorias XX Congreso Nacional de Física*, Universidad del Quindío, <http://sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/archivos/universalidadMedioKerr.tar.gz>, septiembre 1 al 5 de 2003.
- [23] A. T. Sornborger y E. D. Stewart, *Higher-order methods for quantum simulations*, Phys. Rev. A, **60**(3), 1956–1965 (1999).
- [24] Mario Vélez y Andrés Sicard, *El formalismo de la teoría gauge en la computación cuántica*, Revista Colombia de Física, **33**(2), 80–84 (2001). *Memorias IXX Congreso Nacional de Física*, Universidad Nacional, seccional Manizales, <http://sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/archivos/cch.tar.gz>, septiembre 24 al 28 de 2001.
- [25] ———, *Computación cuántica geométrica*, Tech. report, Universidad EAFIT, <http://sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/archivos/proyectoCCG.tar.gz>, 2002.
- [26] ———, *Computación cuántica geométrica no abeliana*, Tech. report, Universidad EAFIT, <http://sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/archivos/proyectoCCGNA.tar.gz>, 2003.
- [27] ———, *Computación cuántica geométrica: modelo de tres estados*, Revista Colombiana de Física, **36**(1), 226–229 (2004). *Memorias XX Congreso Nacional de Física*, Universidad del Quindío, <http://sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/archivos/modelo3estados.tar.gz>, septiembre 1 al 5 de 2003.
- [28] Paolo Zanardi y Mario Rasetti, *Holonomic quantum computation*, Phys. Lett. A, **264**, 94–99 (1999).