Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165
Volumen 1, número 1, páginas 115-129, marzo de 2005

Lógica básica con afirmación alterna[1]

Manuel Sierra A.[2]

Recepción: 26 de agosto de 2004 — Aceptación: 21 de septiembre de 2004
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

El lenguaje del sistema extiende el lenguaje de la lógica clásica al incluir un operador para la noción de *afirmación alterna* (en contraste con la afirmación clásica o *afirmación usual*), y también operadores de *incompatibilidad* y *determinabilidad* entre la pareja de operadores negación versus afirmación alterna. El sistema está caracterizado por una semántica de valuaciones, con la cual se muestra la no equivalencia entre los dos operadores afirmación. Como es de esperarse, el sistema colapsa en la lógica clásica si se pide esta equivalencia. Se generan dos sistemas intermedios cuando se pide por un lado que la afirmación alterna implique la clásica y por otro lado la implicación recíproca.

Palabras claves:: afirmación, afirmación alterna, incompatibilidad, determinabilidad.

Abstract

The language of the system extends language of the classical logic when including an operator for the notion of *alternate affirmation* (in contrast to the classical affirmation or *usual affirmation*), and also operators of *incompatibility* and *determinability* between the pair of operators negation and alternate affirmation. The system is characterized by a semantics of valuations, with which no-equivalence between both operators affirmation is shown. The system collapse in the classical logic if this equivalence is required. They are generated two intermediate systems when it is required by a side that the alternate affirmation imply classical affirmation and the other hand the reciprocal implication.

Key words: affirmation, alternate affirmation, incompatibility, determinability.

1 Presentación

En [3] se proponen diversos sistemas deductivos los cuales soportan las inconsistencias. El operador *negación* de estos sistemas es más débil que el operador *negación clásica*. Da

[1] Este trabajo forma parte de los resultados obtenidos en el proyecto de investigación "Árboles de forzamiento semántico para sistemas deductivos con operador afirmación", el cual es financiado por la Universidad EAFIT.

[2] Magister en Matemáticas, msierra@eafit.edu.co, profesor integrante del grupo en Lógica y Computación, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.

Costa también introduce un operador de *buen comportamiento*, con el cual se pretende que si una fórmula está débilmente negada y tiene buen comportamiento entonces la fórmula débilmente negada se debe comportar como si estuviera clásicamente negada. Los sistemas son presentados con una sola negación, la débil; el buen comportamiento de una fórmula es definido como la negación débil de la conjunción de la fórmula con su negación débil; la negación clásica es definida en términos de la negación débil y el buen comportamiento. En [2] se estudia con mayor profundidad el operador de buen comportamiento.

En [6] se presenta una jerarquía de sistemas deductivos con dos negaciones (negación clásica y *negación alterna*), un operador *de incompatibilidad respecto a la negación alterna* y un operador de *determinabilidad respecto a la negación alterna*, y los sistemas son generalizaciones de la Lógica Clásica. La incompatibilidad respecto a la negación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la negación clásica de la conjunción entre la fórmula y su negación alterna; esta caracterización hace al operador incompatibilidad esencialmente diferente del operador de buen comportamiento de Da Costa. La determinabilidad respecto a la negación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la disyunción de la fórmula con su negación alterna.

En [5] se presentan diversos sistemas de Lógicas Modales, la mayoría de estos sistemas tienen un operador *de necesariedad*, en cierto sentido este operador es una afirmación más fuerte que el operador *afirmación clásica* o afirmación usual. Estos sistemas deductivos no son presentados con operadores de buen comportamiento o similares.

En [7] se presentan un operador de *afirmación alterna*, un operador de *incompatibilidad respecto a la afirmación alterna* y un operador de *determinabilidad respecto a la afirmación alterna*. La incompatibilidad respecto a la afirmación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la negación clásica de la conjunción entre la negación de la fórmula y su afirmación alterna. La determinabilidad respecto a la afirmación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la disyunción entre la negación de la fórmula y su afirmación alterna.

En este trabajo se presentan tres sistemas deductivos. El primer sistema *Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta* $LBPco(+\sim)$ es una generalización de la Lógica Clásica, tiene una afirmación alterna y operadores de *incompatibilidad* y de *determinabilidad* respecto a la pareja de operadores afirmación alterna y negación clásica. El segundo sistema *Lógica Básica Paracompleta* $LBPo(+\sim)$ se obtiene del primer sistema pidiendo en el primer sistema "buen comportamiento" respecto a la incompatibilidad. El tercer sistema *Lógica Básica Paraconsistente* $LBPc(+\sim)$ se obtiene del primer sistema pidiendo en el primer sistema "buen comportamiento" respecto a la determinabilidad. Los sistemas son caracterizados semánticamente y las pruebas de validez y completitud son presentadas de manera detallada.

2 Sistema $LBPco(+\sim)$

Definición 2.1. *El lenguaje de la Lógica Clásica CL consta de los operadores binarios* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *y* $\leftrightarrow$ *y del operador monádico* $\sim$*, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El* lenguaje del sistema $LBPco(+\sim)$ *se obtiene extendiendo el lenguaje de la lógica clásica con los operadores monádicos* $+$, $I+\sim$, $C+\sim$.

El conjunto de *fórmulas de* $LBPco(+\sim)$ es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas*.
2. Si A es una fórmula entonces $\sim(A)$, $+(A)$, $(A)^{I+\sim}$, $(A)^{C+\sim}$ son fórmulas [1].
3. Si A y B son fórmulas entonces $(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\rightarrow(B)$ *y* $(A)\leftrightarrow(B)$ son fórmulas.

Como es habitual, se escribirán las fórmulas con el menor número posible de paréntesis.

Al unir al conjunto de las fórmulas atómicas las fórmulas de la forma $+A$, se obtienen las *fórmulas cuasi-atómicas*.

Definición 2.2. *El* sistema deductivo para $LBPco(+\sim)$ *es una extensión del cálculo proposicional clásico CL, por lo que se toman dos grupos de axiomas.*

Axiomas para el cálculo proposicional clásico:

$$
\begin{array}{rl}
Ax\,0.1 & A\rightarrow(B\rightarrow A)\\
Ax\,0.2 & (A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))\\
Ax\,0.3 & A\rightarrow(A\vee B)\\
Ax\,0.4 & B\rightarrow(A\vee B)\\
Ax\,0.5 & (A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C))\\
Ax\,0.6 & (A\wedge B)\rightarrow A\\
Ax\,0.7 & (A\wedge B)\rightarrow B\\
Ax\,0.8 & (A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\wedge C)))\\
Ax\,0.9 & \sim A\rightarrow(A\rightarrow B)\\
Ax\,0.10 & A\vee\sim A\\
Ax\,0.11 & (A\leftrightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B)
\end{array}
$$

[1] $+(A)$ se lee: la afirmación alterna de A. $(A)^{I+\sim}$ se lee: $+(A)$ y $\sim(A)$ son incompatibles, o también, A es incompatible con respecto a la afirmación alterna y la negación clásica. $(A)^{C+\sim}$ se lee: $+(A)$ y $\sim(A)$ son determinables, o también, $+(A)$ y $\sim(A)$ son completos, o también, A es determinable con respecto a la afirmación alterna y la negación clásica.

$$Ax\,0.12 \qquad (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$
$$Ax\,0.13 \qquad (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))\,.$$

Axiomas para los nuevos operadores[2]:

$$Ax\ I{+}\sim. \qquad (A)^{I+\sim} \leftrightarrow (+A \rightarrow A)^3$$
$$Ax\ C{+}\sim. \qquad (A)^{C+\sim} \leftrightarrow (A \rightarrow +A)^4.$$

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens MP*: de A y $A \rightarrow B$ se infiere B, denotado $A,\ A \rightarrow B \vdash_{LB} B$.

Definición 2.3. *Se dice que una fórmula A es un* teorema de $LBPco(+\sim)$ *($LBPco(+\sim)$-teorema), denotado $\vdash_{LB} A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.*

Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de LBPco(+ ∼) a partir de* Γ (*LBPco(+ ∼)-teorema en* Γ), denotado $\Gamma \vdash_{LB} A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Proposición 2.1 (*Principio de identidad*). $\vdash_{LB} A \rightarrow A$

Prueba 2.1. *Todo sistema deductivo en el cual se tienen como teoremas Ax 0.1 y Ax 0.2 tiene como teorema el principio de identidad. Para detalles de la prueba ver [1].*

Proposición 2.2 (*Teorema de deducción*). *Sean A y B fórmulas de $LBPco(+\sim)$ y Γ un conjunto de fórmulas de $LBPco(+\sim)$. Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{LB} B$ entonces $\Gamma \vdash_{LB} A \rightarrow B$.*

Prueba 2.2. *Todo sistema deductivo en el cual se tienen como teoremas Ax 0.1 y Ax 0.2 y en el cual la única regla de inferencia primitiva es MP, satisface el teorema de deducción. Para detalles de la prueba ver [4].*

2.1 Semántica para $LBPco(+\sim)$

Definición 2.4. *Una $LBPco(+\sim)$*-valuación *v es una función que interpreta las fórmulas atómicas como elementos del conjunto $\{0,1\}$. La $LBPco(+\sim)$-valuación v se extiende a una función V que interpreta las fórmulas de $LBPco(+\sim)$ en el conjunto $\{0,1\}$ de la siguiente manera:*

[2] Podría pensarse que los operadores de incompatibilidad y de determinabilidad pueden ser introducidos vía definición, y que el sistema resultante es equivalente al sistema aquí presentado, lo cual no es el caso. Esto se debe a que en el sistema presentado no vale sustitución por equivalencia.

[3] $AxI{+}\sim$ se lee: axioma de incompatibilidad entre los operadores afirmación alterna y negación clásica.

[4] $AxC{+}\sim$ se lee: axioma de determinabilidad (completez) entre los operadores afirmación alterna y negación clásica.

$$
\begin{array}{rl}
& \text{Si } p \text{ es atómica entonces } V(p) = v(p) \\
V \sim . & V(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0 \\
V \wedge . & V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 1 \text{ } y \text{ } V(B) = 1 \\
V \vee . & V(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0 \text{ } y \text{ } V(B) = 0 \\
V \rightarrow . & V(A \rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1 \text{ } y \text{ } V(B) = 0 \\
V \leftrightarrow . & V(A \leftrightarrow B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = V(B) \\
V\, I{+}\sim . & V(A^{I+\sim}) = 1 \Leftrightarrow V(+A) = 1 \text{ } y \text{ } V(A) = 0 \\
V\, C{+}\sim . & V(A^{C+\sim}) = 1 \Leftrightarrow V(+A) = 0 \text{ } y \text{ } V(A) = 1 \,.
\end{array}
$$

Observar que una $LBPco(+\sim)$-valuación v se extiende a una función V, en lo que respecta a las fórmulas de la forma $+A$, de una manera arbitraria, no hay restricciones. Por esta razón, las $LBPco(+\sim)$-valuaciones pueden ser definidas como funciones v del conjunto de *fórmulas cuasi-atómicas* en $\{0, 1\}$, es decir, considerando la afirmación fuerte de una fórmula arbitraria como si fuese una fórmula atómica, y al extender al conjunto de todas las fórmulas, se cambia la primera cláusula de la definición por: si p es *cuasi-atómica* entonces $V(p) = v(p)$.

Definición 2.5. *Se dice que una fórmula A es $LBPco(+\sim)$-*válida*, denotado $\models_{LB} A$, si y solamente si para toda LB-valuación v, $V(A) = 1$.*

Proposición 2.3 ($LBPco(+\sim)$-*validez de axiomas*). *Los axiomas de $LBPco(+\sim)$ son $LBPco(+\sim)$-válidos.*

Prueba 2.3.

$LBPco(+\sim)$-validez del $Ax\,0.1$. Si no fuese válido, por la definición (2.5) existiría una $LBPco(+\sim)$-valuación v y fórmulas A y B tales que $V(A \rightarrow (B \rightarrow A)) = 0$, y por definición de $V \rightarrow$ se tendría $V(A) = 1$ y $V(B \rightarrow A) = 0$, por lo que, según definición de $V \rightarrow$, $V(B) = 1$ y $V(A) = 0$, y entonces $V(A) = 1$ y $V(A) = 0$, lo cual es imposible.

$LBPco(+\sim)$-validez del $Ax\,0.2$. Si no fuese válido, existiría una $LBPco(+\sim)$-valuación v y fórmulas A, B y C tales que $V((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) = 0$, y por definición de $V \rightarrow$, $V(A \rightarrow (B \rightarrow C)) = 1$ y $V((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) = 0$, y así de nuevo por definición de $V \rightarrow$, $V(A \rightarrow B) = 1$ y $V(A \rightarrow C) = 0$, se tiene del último resultado que $V(A) = 1$ y $V(C) = 0$; ahora de la definición de $V \rightarrow$ y $V(A \rightarrow (B \rightarrow C)) = 1$ se tiene que $V(A) = 1 \Rightarrow V(B \rightarrow C) = 1$ y como $V(A) = 1$ entonces $V(B \rightarrow C) = 1$, es decir $V(B) = 1 \Rightarrow V(C) = 1$, pero $V(C) = 0$, por lo que $V(B) = 0$; pero como $V(A \rightarrow B) = 1$, es decir $V(A) = 1 \Rightarrow V(B) = 1$ y además $V(A) = 1$ entonces $V(B) = 1$, contradiciendo el que $V(B) = 0$.

$LBPco(+\sim)$-validez del $Ax\,0.3$. Si no fuese válido, existiría una $LBPco(+\sim)$-valuación v y fórmulas A y B tales que $V(A \rightarrow (A \vee B)) = 0$, y por definición de $V \rightarrow$, $V(A) = 1$ y $V(A \vee B) = 0$, y entonces según definición de $V\vee$, $V(A) = 0$, imposible, ya que $V(A) = 1$. De manera análoga se prueba la $LBPco(+\sim)$-validez del $Ax\,0.4$.

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax 0.5. Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y fórmulas* A, B *y* C *tales que* $V((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))) = 0$, *y por definición de* $V \rightarrow$, $V(A \rightarrow C) = 1$ *y* $V((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) = 0$, *y entonces* $V(B \rightarrow C) = 1$ *y* $V((A \vee B) \rightarrow C) = 0$, *y también* $V(A \vee B) = 1$ *y* $V(C) = 0$*; al tener* $V(A \rightarrow C) = 1$ *y* $V(B \rightarrow C) = 1$ *se tienen* $V(A) = 1 \Rightarrow V(C) = 1$ *y* $V(B) = 1 \Rightarrow V(C) = 1$*; y al ser* $V(C) = 0$, *se tendría* $V(A) = V(B) = 0$, *por lo que, según definición de* $V\vee$, $V(A \vee B) = 0$, *lo cual es imposible, ya que se tiene que* $V(A \vee B) = 1$.

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax 0.6. Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y fórmulas* A *y* B *tales que* $V((A \wedge B) \rightarrow A) = 0$, *es decir* $V(A \wedge B) = 1$ *y* $V(A) = 0$, *pero si* $V(A) = 0$ *entonces, por la definición de* $V\wedge$, *no es el caso que* $V(A \wedge B) = 1$. *De manera análoga se prueba la LBPco*$(+\sim)$*-validez del Ax 0.7.*

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax 0.8. Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y fórmulas* A, B *y* C *tales que* $V((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))) = 0$, *de donde* $V(A \rightarrow B) = V(A \rightarrow C) = V(A) = 1$ *y* $V(B \wedge C) = 0$, *y entonces de la primera parte se tiene* $V(B) = V(C) = 1$, *y entonces, por la definición de* $V\wedge$, *no podría ocurrir que* $V(B \wedge C) = 0$.

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax 0.9. Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y fórmulas* A *y* B *tales que* $V(\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)) = 0$, *de donde* $V(\sim A) = V(A) = 1$, *lo que es imposible según la definición de* $V\sim$.

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax 0.10. Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y una fórmula* A *tal que* $V(A \vee \sim A) = 0$, *de donde* $V(\sim A) = V(A) = 0$, *lo que es imposible.*

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax 0.11. Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y fórmulas* A *y* B *tales que* $V((A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)) = 0$, *de donde* $V(A \leftrightarrow B) = 1$ *y* $V(A \rightarrow B) = 0$, *y por definición de* $V \leftrightarrow$, $V(A) = V(B)$ *y por definición de* $V \rightarrow$, $V(A) = 1$ *y* $V(B) = 0$, *es decir no es el caso que* $V(A) = V(B)$, *lo que es imposible ya que si son iguales. De manera análoga se prueba la LBPco*$(+\sim)$*-validez del Ax 0.12.*

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax 0.13. Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y fórmulas* A *y* B *tal que* $V((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))) = 0$, *de donde* $V(A \rightarrow B) = V(B \rightarrow A) = 1$ *y* $V(A \leftrightarrow B) = 0$, *se infiere entonces, por definición de* $V \leftrightarrow$, *que o bien* $V(A) = 1$ *y* $V(B) = 0$ *y* $V(A \rightarrow B) = 1$ *o bien* $V(A) = 0$ *y* $V(B) = 1$ *y* $V(B \rightarrow A) = 1$, *en el primer caso se tendría* $V(B) = 0$ *y* $V(B) = 1$, *y en el segundo caso se tendría* $V(A) = 0$ *y* $V(A) = 1$, *lo que es imposible.*

LBPco$(+\sim)$*-validez del Ax* $I+\sim$. *Si no fuese válido, existiría una LBPco*$(+\sim)$*-valuación* v *y una fórmula* A *tal que* $V(A^{I+\sim} \leftrightarrow (+A \rightarrow A)) = 0$, *y se tendrían, según definición de* $VI+\sim$, *dos casos: o* $V(A^{I+\sim}) = 1$ *y* $V(+A \rightarrow A) = 0$ *ó* $V(A^{I+\sim}) = 0$ *y* $V(+A \rightarrow A) = 1$. *En el primer caso se tendría que* $V(A^{I+\sim}) = 1$ *y* $V(+A) = 1$ *y* $V(A) = 0$, *es decir* $V(A^{I+\sim}) = 1$ *y* $V(A^{I+\sim}) = 0$, *lo cual es imposible. En el segundo caso se tendría que* $V(+A) = 1$, $V(A) = 0$ *y* $V(+A \rightarrow A) = 1$, *lo que quiere decir que*

$V(+A \to A) = 0$ y $V(+A \to A) = 1$, lo cual es imposible.

$LBPco(+\sim)$-validez del $AxC+\sim$. Si no fuese válido, existiría una $LBPco(+\sim)$-valuación v y una fórmula A tal que $V(A^{C+\sim} \leftrightarrow (A \to +A)) = 0$, y se tendrían, según definición de $VC+\sim$, dos casos: o $V(A^{C+\sim}) = 1$ y $V(A \to +A) = 0$ ó $V(A^{C+\sim}) = 0$ y $V(A \to +A) = 1$. En el primer caso se tendría que $V(A^{C+\sim}) = 1$ y $V(A) = 1$ y $V(+A) = 0$, es decir $V(A^{C+\sim}) = 1$ y $V(A^{C+\sim}) = 0$, lo cual es imposible. En el segundo caso se tendría que $V(A) = 1$, $V(+A) = 0$ y $V(A \to +A) = 1$, lo que quiere decir que $V(A \to +A) = 0$ y $V(A \to +A) = 1$, lo cual es imposible.

Proposición 2.4 (*MP preserva* $LBPco(+\sim)$*-validez*). *Sean A y B fórmulas de $LBPco(+\sim)$. Si A y $A \to B$ son $LBPco(+\sim)$-válidas entonces B también es $LBPco(+\sim)$-válida.*

Prueba 2.4. *Sean A y B fórmulas de $LBPco(+\sim)$ tales que A y $A \to B$ son $LBPco(+\sim)$-válidas, sea v una $LBPco(+\sim)$-valuación arbitraria, se tiene entonces que $V(A) = V(A \to B) = 1$, y no puede ocurrir que $V(B) = 0$, ya que al ser $V(A) = 1$, según definición de $V\to$, se tendría $V(A \to B) = 0$. Se concluye que para toda $LBPco(+\sim)$-valuación v, $V(B) = 1$, es decir B también es $LBPco(+\sim)$-válida.*

Proposición 2.5 (*Teorema de* $LBPco(+\sim)$*-validez*). *Todo $LBPco(+\sim)$-teorema es $LBPco(+\sim)$-válido.*

Prueba 2.5. *Sea A un teorema de $LBPco(+\sim)$. La demostración es por inducción sobre el número de fórmulas de $LBPco(+\sim)$ miembros de una sucesión finita que constituya una demostración de A en $LBPco(+\sim)$.*

Para el paso base, supóngase que la demostración de A consta de una sola fórmula, la propia A, entonces A tiene que ser un axioma de $LBPco(+\sim)$, y se tiene por la proposición (2.3) *que todos los axiomas de $LBPco(+\sim)$ son fórmulas $LBPco(+\sim)$-válidas.*

Supóngase ahora que la demostración de A contiene n fórmulas, siendo $n > 1$, y supongamos como hipótesis de inducción que todos los teoremas de $LBPco(+\sim)$ que poseen demostraciones de menos de n pasos son fórmulas $LBPco(+\sim)$-válidas. O bien A es un axioma, en cuyo caso A es una fórmula $LBPco(+\sim)$-válida, o A se deduce mediante MP de dos fórmulas anteriores en la demostración. Estas dos fórmulas deberán tener las formas B y $B \to A$. Pero B y $B \to A$ son teoremas de $LBPco(+\sim)$ cuyas demostraciones son sucesiones de menos de n fórmulas. Así pues, B y $B \to A$ son fórmulas $LBPco(+\sim)$-válidas por hipótesis de inducción, y de este modo, puesto que, según la proposición (2.4), *MP preserva $LBPco(+\sim)$-validez, A es una fórmula $LBPco(+\sim)$-válida.*

Así pues, por el principio de inducción matemática, todo teorema de $LBPco(+\sim)$ es una fórmula $LBPco(+\sim)$-válida.

Para demostrar el resultado recíproco, que toda fórmula $LBPco(+\sim)$-válida es un $LBPco(+\sim)$-teorema, se requieren dos nuevas ideas: *extensiones de $LBPco(+\sim)$* y *consistencia*.

$LBPco(+\sim)$ tiene axiomas, que son los puntos de partida para las demostraciones de teoremas. ¿Qué ocurriría si se añadiera otro axioma? Se tendrían más premisas de las que partir, de modo que, en general, se podría esperar que fuese posible demostrar más teoremas. Todas las fórmulas que fuesen teoremas previamente seguirían siéndolo, pero quizás algunas fórmulas que no eran teoremas antes se convertirían en teoremas. De hecho, aparecerán nuevos teoremas si y sólo si el nuevo conjunto de axiomas contiene al menos una fórmula que no fuese previamente un teorema.

Definición 2.6. *Una* extensión *de $LBPco(+\sim)$ es un sistema formal obtenido alterando o ampliando el conjunto de axiomas de manera que todos los teoremas de $LBPco(+\sim)$ sigan siendo teoremas (habiéndose introducido eventualmente teoremas nuevos).*

En este trabajo mientras no se diga lo contrario, se trabajará con extensiones de $LBPco(+\sim)$, pero el conjunto de fórmulas no se cambiará, por lo que frecuentemente se dirá simplemente fórmulas o fórmulas de $LBPco(+\sim)$ cuando se quiera hacer referencia a las fórmulas de una extensión de $LBPco(+\sim)$.

Si se extendiera $LBPco(+\sim)$ a sistemas con mayor número de teoremas cada vez, lo más probable es que llegase a existir una fórmula A tal que tanto A como $\sim A$ fuesen teoremas. Es evidente que una situación así no es deseable, ya que como se verá más adelante en la proposición (2.7), toda fórmula sería un teorema.

Definición 2.7. *Una extensión de $LBPco(+\sim)$ es* consistente *si no existe ninguna fórmula A de $LBPco(+\sim)$ tal que tanto A como $\sim A$ sean teoremas de la extensión. Naturalmente, esta definición sería irrelevante si el propio $LBPco(+\sim)$ no fuese consistente. Si la extensión no es consistente, se dice que es inconsistente.*

Definición 2.8. *Una extensión de $LBPco(+\sim)$ es* trivial *si toda fórmula es teorema de la extensión.*

Proposición 2.6. *$LBPco(+\sim)$ es consistente.*

Prueba 2.6. *Supóngase que $LBPco(+\sim)$ no fuese consistente, por ejemplo que existiese una fórmula A tal que $\vdash_{LB} A$ y $\vdash_{LB}\sim A$. Entonces por la proposición (2.5), Teorema de $LBPco(+\sim)$-validez, tanto A como $\sim A$ serían fórmulas $LBPco(+\sim)$-válidas. Esto es imposible, ya que si $\sim A$ es una fórmula $LBPco(+\sim)$-válida, entonces para toda $LBPco(+\sim)$-valuación v, $V(\sim A) = 1$, es decir $V(A) = 0$ según definición de $V\sim$, por lo que A no puede ser $LBPco(+\sim)$-válida. Por lo tanto, $LBPco(+\sim)$ es consistente.*

Proposición 2.7. *Una extensión $LBPco(+\sim)^*$ de $LBPco(+\sim)$ es consistente sí y sólo si no es trivial.*

Prueba 2.7. *$\vdash_{LB^*} A$ abrevia A es un teorema en $LBPco(+\sim)^*$. Sea $LBPco(+\sim)^*$ consistente. Entonces para toda fórmula A, o bien A no es teorema o bien $\sim A$ no es teorema, ya que ambas no pueden serlo al ser $LBPco(+\sim)^*$ consistente. Por lo tanto $LBPco(+\sim)^*$ no es trivial.*

Recíprocamente, supóngase que $LBPco(+\sim)^*$ no es consistente. Se demostrará que no hay fórmulas que no sean teoremas de $LBPco(+\sim)^*$, es decir, que toda fórmula es *teorema de $LBPco(+\sim)^*$. Sea A cualquier fórmula; $LBPco(+\sim)^*$ no es consistente, así que $\vdash_{LB^*} B$ y $\vdash_{LB^*}\sim B$ para cierta fórmula B. Ahora bien, $\vdash_{LB}\sim B \to (B \to A)$ por Ax0.9. Así, $\vdash_{LB^*}\sim B \to (B \to A)$ pues $LBPco(+\sim)^*$ es extensión de $LBPco(+\sim)$. Aplicando dos veces MP, obtenemos ahora $\vdash_{LB} A$. Así pues, toda fórmula es teorema de $LBPco(+\sim)^*$, como se quería.*

Proposición 2.8. *Sea $LBPco(+\sim)^*$ una extensión de $LBPco(+\sim)$ y sea A una fórmula de $LBPco(+\sim)$ que no sea teorema de $LBPco(+\sim)^*$. Entonces $LBPco(+\sim)^{**}$ es también consistente, siendo $LBPco(+\sim)^{**}$ la extensión de $LBPco(+\sim)$ obtenida añadiendo $\sim A$ como nuevo axioma a $LBPco(+\sim)^*$.*

Prueba 2.8. *$\vdash_{LB^{**}} A$ abrevia A es un teorema en $LBPco(+\sim)^{**}$. Sea A una fórmula de $LBPco(+\sim)$ que no es teorema de $LBPco(+\sim)^*$. Supóngase que $LBPco(+\sim)^{**}$ es inconsistente. Entonces, para alguna fórmula B, $\vdash_{LB^{**}} B$ y $\vdash_{LB^{**}}\sim B$. Ahora bien, del mismo modo que en la demostración de la Proposición* (2.7), *se deduce que $\vdash_{LB^{**}} A$. Pero $LBPco(+\sim)^{**}$ tan sólo se diferencia de $LBPco(+\sim)$ en que tiene a $\sim A$ como axioma adicional, así que $\vdash_{LB^{**}} A$ es equivalente a $\sim A \vdash_{LB^*} A$ (Una demostración en $LBPco(+\sim)^{**}$ es justamente una deducción a partir de $\sim A$ en $LBPco(+\sim)^*$). Así pues, $\vdash_{LB^*}\sim A \to A$, por la proposición* (2.2), *el Teorema de Deducción. Se tiene por Ax 0.5 $\vdash_{LB^*} (A \to A) \to ((\sim A \to A) \to ((A\vee \sim A) \to A))$, por la proposición* (2.1), *principio de identidad se tiene $\vdash_{LB^*} A \to A$, aplicando MP se infiere $\vdash_{LB^*} (\sim A \to A) \to ((A\vee \sim A) \to A)$, de nuevo por MP se infiere $\vdash_{LB^*} (A\vee \sim A) \to A$, pero por Ax 0.10 $\vdash_{LB^*} A\vee \sim A$, aplicando MP se infiere finalmente que $\vdash_{LB^*} A$. Pero esto contradice la hipótesis de que A no es teorema de $LBPco(+\sim)^*$. Así pues, $LBPco(+\sim)^{**}$ tiene que ser consistente.*

Debe existir en alguna parte un límite a las fórmulas que pueden incluirse como axiomas adicionales en una extensión de $LBPco(+\sim)$ manteniendo la consistencia. La proposición (2.24) tiene por objeto alcanzar este límite, pero se describe primero la situación en una definición.

Definición 2.9. *Una extensión de $LBPco(+\sim)$ es* completa *si para toda fórmula A, o bien A o bien $\sim A$ es teorema de la extensión.*

En este punto se presentarán algunas reglas derivadas, proposiciones (2.9) a (2.22), que se requieren para la prueba de la proposición (2.26), el teorema de completitud. Todas ellas son resultados bien conocidos de la lógica clásica, por esta razón las demostraciones serán omitidas. Para los detalles de las pruebas ver [1] y [4].

Proposición 2.9 (*Introducción y eliminación de la conjunción*).
$\vdash_{LB} A\wedge B \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{LB} A \quad y \quad \vdash_{LB} B.$

Proposición 2.10 (*Introducción de la disyunción*).
$\vdash_{LB} A \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} A\vee B \quad y \quad \vdash_{LB} B\vee A.$

Proposición 2.11 (***Silogismo hipotético***).
$\vdash_{LB} A \rightarrow B \quad y \quad \vdash_{LB} B \rightarrow C \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} A \rightarrow C.$

Proposición 2.12 (***Eliminación de la disyunción***).
$\vdash_{LB} A \vee B \quad y \quad \vdash_{LB} A \rightarrow C \quad y \quad \vdash_{LB} B \rightarrow C \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} C.$

Proposición 2.13 (***Dilema constructivo***).
$\vdash_{LB} A \vee B \quad y \quad \vdash_{LB} A \rightarrow C \quad y \quad \vdash_{LB} B \rightarrow D \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} C \vee D.$

Proposición 2.14 (***Silogismo disyuntivo***).
$\vdash_{LB} A \vee B \quad y \quad \vdash_{LB} \sim A \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} B.$

Proposición 2.15 (***Demostración indirecta***).
$\vdash_{LB} A \rightarrow B \quad y \quad \vdash_{LB} A \rightarrow \sim B \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} \sim A$

$\vdash_{LB} \sim A \rightarrow B \quad y \quad \vdash_{LB} \sim A \rightarrow \sim B \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} A.$

Proposición 2.16 (***Doble negación***).
$\vdash_{LB} A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{LB} \sim\sim A.$

Proposición 2.17 (***Negación de la disyunción***).
$\vdash_{LB} \sim (A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{LB} \sim A \wedge \sim B.$

Proposición 2.18 (***Negación del condicional***).
$\vdash_{LB} \sim (A \rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{LB} A \wedge \sim B.$

Proposición 2.19 (***Transposición y Modus Tollens MT***).
$\vdash_{LB} A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{LB} \sim B \rightarrow \sim A$

$\vdash_{LB} A \rightarrow B \quad y \quad \vdash_{LB} \sim B \quad \Rightarrow \quad \vdash_{LB} \sim A.$

Proposición 2.20 (***Equivalencia material***).
$\vdash_{LB} A \leftrightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{LB} (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B).$

Proposición 2.21 (***Transposición en la equivalencia***).
$\vdash_{LB} A \leftrightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{LB} \sim A \leftrightarrow \sim B.$

Proposición 2.22 (***Equivalencia externa***).
Si J es una extensión consistente y completa de LB, entonces $\vdash_J A \leftrightarrow B$ si y sólo si $\vdash_J A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_J B$.

Prueba 2.9. *Supóngase que $A \leftrightarrow B$ es un teorema de J, por $Ax\,0.11$ y $Ax\,0.12$ se tienen $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$. Si A fuese un teorema de J entonces por MP también lo sería B, es decir, $\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B$, de igual forma se prueba la recíproca.*

Supóngase que $\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J B$, por lo que $\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B$, y supóngase que no se tiene $\vdash_J A \rightarrow B$. Siendo J completa esto implica $\vdash_J \sim (A \rightarrow B)$, luego por la proposición (2.18) es $\vdash_J A \wedge \sim B$ y por la eliminación de la conjunción $\vdash_J A$ y $\vdash_J \sim B$. Pero por la hipótesis, de $\vdash_J A$ se infiere $\vdash_J B$ lo cual es absurdo pues $\sim B$ es un teorema de J, que es consistente. De igual forma se prueba $\vdash_J B \rightarrow A$ y por $Ax\,0.13$ se tiene $\vdash_J A \leftrightarrow B$.

Es importante notar que las reglas de inferencia y los teoremas de $LBPco(+\sim)$ siguen siendo tales en cualquier extensión de $LBPco(+\sim)$.

Proposición 2.23. *Si J es una extensión consistente y completa de $LBPco(+\sim)$, entonces $\vdash_J A \vee B$ si y solo si $\vdash_J A$ ó $\vdash_J B$.*

Prueba 2.10. *Supóngase que $\vdash_J A \vee B$ pero no $\vdash_J A$ y no $\vdash_J B$, entonces se tendría que $\vdash_J \sim A$ al ser J completa. Al tener $\vdash_J A \vee B$ y $\vdash_J \sim A$, por silogismo disyuntivo, se infiere $\vdash_J B$, pero se supuso que no. Por lo tanto, si $\vdash_J A \vee B$ entonces $\vdash_J A$ ó $\vdash_J B$. La recíproca es aplicación inmediata de la introducción de la disyunción.*

Proposición 2.24. *Sea $LBPco(+\sim)^*$ una extensión consistente de $LBPco(+\sim)$. Entonces existe una extensión consistente y completa de $LBPco(+\sim)^*$.*

Prueba 2.11. *Sea $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de $LBPco(+\sim)$. Se construye una sucesión $J_0,\ J_1,\ J_2, \ldots$ de extensiones de $LBPco(+\sim)^*$ como sigue.*

Sea $J_0 = LBPco(+\sim)^*$. Si $\vdash_{J_0} A_0$, sea $J_1 = J_0$. Si no $\vdash_{J_0} A_0$, añádase $\sim A_0$ como nuevo axioma para obtener J_1 a partir de J_0.

En general, dado $n \geq 1$, y para construir J_n a partir de J_{n-1}: si $\vdash_{Jn-1} A_{n-1}$, entonces $J_n = J_{n-1}$, y si no $\vdash_{Jn-1} A_{n-1}$, sea J_n la extensión de J_{n-1} obtenida añadiendo $\sim A_{n-1}$ como nuevo axioma.

$LBPco(+\sim)^*$ es consistente, es decir, J_0 es consistente, por hipótesis. Dado $n \geq 1$, si J_{n-1} es consistente, entonces J_n es consistente, por la Proposición (2.8) *Así pues, por inducción, todo J_n es consistente. Se define ahora J como aquella extensión de $LBPco(+\sim)^*$ que tiene como axiomas a aquellas fórmulas que son axiomas de al menos uno de los J_n.*

Se demostrará que J es consistente. Supóngase lo contrario. Entonces existe una fórmula A tal que $\vdash_J A$ y $\vdash_J \sim A$. Ahora bien, las demostraciones de A y $\sim A$ en J son sucesiones finitas de fórmulas, de modo que cada demostración solamente puede contener casos particulares de un número finito de axiomas de J. Así pues, debe existir un n suficientemente grande como para que todos estos axiomas utilizados sean axiomas de J_n. Se deduce que $\vdash_{J_n} A$ y $\vdash_{J_n} \sim A$. Esto contradice la consistencia de J_n, con lo que J debe ser consistente.

Queda por demostrar que J es completo. Sea A una fórmula de $LBPco(+\sim)$. A debe aparecer en la lista $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots$, digamos que A es A_k. Si $\vdash_{J_k} A_k$, entonces $\vdash_J A_k$, puesto que J es una extensión de J_k. Si no $\vdash_{J_k} A_k$, entonces de acuerdo con la construcción de J_{k+1}, $\sim A_k$ es un axioma de J_{k+1}, con lo que $\vdash_{J_{k+1}} \sim A_k$. Esto implica que $\vdash_J \sim A_k$. Así, en todo caso se tiene $\vdash_J A_k$ ó $\vdash_J \sim A_k$, con lo que J es completo.

Proposición 2.25. *Si $LBPco(+\sim)^*$ es una extensión consistente de $LBPco(+\sim)$, entonces existe una $LBPco(+\sim)$-valuación en la cual todo teorema de $LBPco(+\sim)^*$ toma el valor 1.*

Prueba 2.12. *Se define v sobre fórmulas de $LBPco(+\sim)$ poniendo: $V(A) = 1$ si $\vdash_J A$, $V(A) = 0$ si $\vdash_J \sim A$, siendo J una extensión consistente y completa de $LBPco(+\sim)^*$,* *como la dada en la demostración de la proposición* (2.24). *Nótese que V está definida sobre todas las fórmulas, por ser J completa. Ahora bien, $V(A) = 1 \Leftrightarrow V(\sim A) = 0$ para toda fórmula A, ya que J es consistente, por lo que se satisface la definición $V\sim$. Para el caso del condicional, utilizando la negación del condicional y la introducción y eliminación de la conjunción se tiene que $V(A \rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow \vdash_J \sim (A \rightarrow B) \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge \sim B \Leftrightarrow \vdash_J A$ y $\vdash_J \sim B \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$, por lo que se satisface la definición $V \rightarrow$. Para el caso de la conjunción, utilizando la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge B \Leftrightarrow \vdash_J A$ y $\vdash_J B \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$, por lo que se satisface la definición $V\wedge$.*

Para el caso de la disyunción, utilizando la negación de la disyunción, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow \vdash_J \sim (A \vee B) \Leftrightarrow \vdash_J \sim A \wedge \sim B \Leftrightarrow \vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim B \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(B) = 0$, por lo que se satisface la definición $V\vee$.

Para el caso de bicondicional, utilizando la equivalencia material, la proposición (2.23) *y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A \leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow \vdash_J A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash_J (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B) \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge B$ ó $\vdash_J \sim A \wedge \sim B \Leftrightarrow \vdash_J A$ y $\vdash_J B$, ó $\vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim B \Leftrightarrow V(A) = V(B) = 1$ ó $V(A) = V(B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = V(B)$, por lo que se satisface la definición $V \leftrightarrow$.*

Para el caso de la incompatibilidad $+\sim$, utilizando la transposición en la equivalencia, la equivalencia externa, la negación del condicional, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A^{I+\sim}) = 0 \Leftrightarrow \vdash_J \sim A^{I+\sim} \Leftrightarrow \vdash_J \sim (+A \rightarrow A) \Leftrightarrow \vdash_J +A \wedge \sim A \Leftrightarrow \vdash_J +A$ y $\vdash_J \sim A \Leftrightarrow V(+A) = 1$ y $V(A) = 0$, por lo que se satisface la definición $VI+\sim$.

Para el caso de la determinabilidad $+\sim$, utilizando la transposición en la equivalencia, la equivalencia externa, la negación del condicional, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A^{C+\sim}) = 0 \Leftrightarrow \vdash_J \sim A^{C+\sim} \Leftrightarrow \vdash_J \sim (A \rightarrow +A) \Leftrightarrow \vdash_J A \wedge \sim +A \Leftrightarrow \vdash_J A$ y $\vdash_J \sim +A \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(+A) = 0$, por lo que se satisface la definición $VC+\sim$.

Se concluye finalmente que v es una $LBPco(+\sim)$-valuación, ya que se satisfacen los requisitos de la definición (2.4).

Sea ahora A un teorema de $LBPco(+\sim)^*$. Entonces $\vdash_J A$, donde J es una extensión consistente y completa de $LBPco(+\sim)^*$. Con ello, $V(A) = 1$.

Proposición 2.26 (*Teorema de Completitud para* $LBPco(+\sim)$). *Sea A una fórmula de $LBPco(+\sim)$, si A es LB-válida entonces A es $LBPco(+\sim)$-teorema.*

Prueba 2.13. *Sea A una fórmula de $LBPco(+\sim)$ que es $LBPco(+\sim)$-válida, y supongamos que A no es un teorema de $LBPco(+\sim)$. Entonces la extensión $LBPco(+\sim)^*$, obtenida añadiendo $\sim A$ como nuevo axioma, es consistente, por la proposición* (2.8). *Así pues, según la proposición* (2.25), *existe una $LBPco(+\sim)$-valuación v que da a todo teorema de $LBPco(+\sim)^*$ el valor 1. En particular, $V(\sim A) = 1$. Pero $V(A) = 1$, ya que A es una fórmula $LBPco(+\sim)$-válida, y se llega a una contradicción. Luego A es un teorema de $LBPco(+\sim)$.*

Se ha comprobado, con las proposiciones (2.5) y (2.26), que el sistema formal $LBPco(+\sim)$ tiene la principal propiedad que debería tener: Que las fórmulas derivables en él sean precisamente las lógicamente verdaderas. Los axiomas y la regla de deducción de $LBPco(+\sim)$ caracterizan la deducción lógica, al menos en este contexto. Los $LBPco(+\sim)$-teoremas son las fórmulas $LBPco(+\sim)$-válidas y sólo ellas. Para toda fórmula de $LBPco(+\sim)$ se tiene: $\vdash_{LB} A \Leftrightarrow \models_{LB} A$.

3 Sistemas con afirmación fuerte y afirmación débil

Cuando se observan los axiomas $Ax\,I+\sim$ y $Ax\,C+\sim$, entonces si se tiene $A^{I+\sim}$ y no se tiene $A^{C+\sim}$, es decir, si se tiene $+A \rightarrow {}^*A$ y no se tiene ${}^*A \rightarrow +A$, tiene sentido decir que la afirmación alterna, $+$, es una afirmación más fuerte que la afirmación usual, *; cuando esto ocurra, se dirá que el sistema tiene la *afirmación fuerte* $+$ y la *afirmación débil* *, o simplemente que *el sistema tiene una afirmación fuerte* $+$. Si se tiene $A^{C+\sim}$ y no se tiene $A^{I+\sim}$, es decir, si se tiene ${}^*A \rightarrow +A$ y no se tiene $+A \rightarrow {}^*A$, tiene sentido decir que la afirmación alterna, $+$, es una afirmación más débil que la afirmación usual, *; cuando esto ocurra, se dirá que el sistema tiene la afirmación fuerte * y la afirmación débil $+$, o simplemente que el sistema tiene una afirmación débil $+$.

Definición 3.1. *El* sistema $LBPo(+\sim)$ *se construye a partir del sistema* $LBPco(+\sim)$*, alterando únicamente el conjunto de axiomas para los nuevos operadores. El* sistema $LBPo(+\sim)$ *tiene como axiomas para los nuevos operadores:*

$$AxPI+\sim^{5}. \quad +A \rightarrow A$$
$$Ax\,C+\sim. \quad A^{C+\sim} \leftrightarrow (A \rightarrow +A)$$

$\vdash_{LBo} A$ *indica que* A *es un* $LBPo(+\sim)$*-teorema.*

Observar que en el sistema $LBPo(+\sim)$ la afirmación alterna es una afirmación fuerte.

Definición 3.2. *Una* $LBPo(+\sim)$-valuación *se define de manera similar a la* $LBPco(+\sim)$-valuación*. Sólo se cambia* $VI+\sim$ *por* $VPI+\sim$: $V(+A)=1 \Rightarrow V(A)=1$. $\models_{LB_0} A$ *indica que* A *es* $LBPo(+\sim)$*-válida.*

Definición 3.3. *El* sistema $LBPc(+\sim)$ *se construye a partir del sistema* $LBPco(+\sim)$*, alterando únicamente el conjunto de axiomas para los nuevos operadores. El sistema* $LBPc(+\sim)$ *tiene como axiomas para los nuevos operadores:*

$$Ax\,I+\sim. \quad A^{I+\sim} \leftrightarrow (+A \rightarrow A)$$
$$Ax\,PC+\sim^{6}. \quad A \rightarrow +A$$

$\vdash_{LBc} A$ *indica que* A *es un* $LBPc(+\sim)$*-teorema.*

[5] $Ax\,PI+\sim$ se lee: axioma de petición de incompatibilidad entre los operadores afirmación alterna y negación clásica.

[6] $AxPC+\sim$ se lee: axioma de petición de determinabilidad (completez) entre los operadores afirmación alterna y negación clásica.

Observar que en el sistema $LBPc(+\sim)$ la afirmación alterna es una afirmación débil.

Definición 3.4. *Una* $LBPc(+\sim)$-valuación *se define de manera similar a la* $LBPco(+\sim)$-valuación*. Sólo se cambia* $VC+\sim$ *por* $VPC+\sim$: $V(A)=1 \Rightarrow V(+A)=1$. $\models_{LBc} A$ *indica que* A *es* $LBPc(+\sim)$*-válida.*

Definición 3.5. *El* sistema CL^* *se construye a partir del sistema* $LBPco(+\sim)$*, alterando únicamente el conjunto de axiomas para los nuevos operadores. El* sistema CL^* *tiene como axiomas para los nuevos operadores:*

$$\begin{aligned} Ax\,PI+\sim. &\quad +A \to A \\ Ax\,PC+\sim. &\quad A \to +A \end{aligned}$$

$\vdash_{CL^*} A$ *indica que* A *es un* LC^**-teorema.*

Como consecuencia inmediata se tiene $+A \leftrightarrow A$, es decir, los dos tipos afirmación coinciden. En cierto sentido, CL^* es la misma lógica clásica CL con dos notaciones para el operador de afirmación.

Definición 3.6. *Una* CL^*-valuación *se define de manera similar a la* $LBPco(+\sim)$-valuación*. Sólo se cambian* $VI+\sim$ *y* $VC+\sim$ *por* $VPIC+\sim$: $V(+A)=1 \Leftrightarrow V(A)=1$. $\models_{LC^*} A$ *indica que* A *es* LC^**-válida.*

Proposición 3.1 (*Caracterización de los Sistemas* $LBPo(+\sim)$, $LBPc(+\sim)$ y CL^*). *Cada uno de los sistemas* $LBPo(+\sim)$, $LBPc(+\sim)$ *y* CL^* *está caracterizado por la respectiva semántica.*

Prueba 3.1. *Observando la prueba de la caracterización del sistema* $LBPco(+\sim)$*, se concluye que cada uno de estos tres sistemas está caracterizado por la respectiva semántica presentada.*

Proposición 3.2. *Los sistemas* $LBPo(+\sim)$, $LBPc(+\sim)$, CL^* *y* $LBPco(+\sim)$ *son diferentes entre sí.*

Prueba 3.2. *Sea* v *una* $LBPco(+\sim)$*-valuación y* A *es una fórmula atómica tal que:* $V(A)=0$ *y* $V(+A)=1$. *Se verifica que* $V(Ax\,PI+\sim)=V(+A\to A)=0$ *y* $V(Ax\,PC+\sim)=V(A\to +A)=1$. *Por lo tanto,* $Ax\,PI+\sim$ *no es teorema de* $LBPco(+\sim)$ *ni de* $LBPc(+\sim)$*, pero si es teorema de* $LBPo(+\sim)$ *y de* CL^**. Se concluye así que* $LBPo(+\sim)$ *y* $LBPco(+\sim)$ *son diferentes, que* CL^* *y* $LBPco(+\sim)$ *son diferentes, que* CL^* *y* $LBPc(+\sim)$ *son diferentes y que* $LBPo(+\sim)$ *y* $LBPc(+\sim)$ *son diferentes.*

Sea v *una* $LBPco(+\sim)$*-valuación y* A *es una fórmula atómica tal que:* $V(A)=1$ *y* $V(+A)=0$. *Se verifica que* $V(Ax\,PI+\sim)=V(+A\to A)=1$ *y* $V(AxPC+\sim)=V(A\to +A)=0$. *Por lo tanto,* $Ax\,PC+\sim$ *no es teorema de* $LBPco(+\sim)$ *pero si es teorema de* $LBPc(+\sim)$*. Se concluye así que* $LBPc(+\sim)$ *y* $LBPco(+\sim)$ *son diferentes, que* $Ax\,PC+\sim$ *es teorema de* CL^* *pero no es teorema de* $LBPo(+\sim)$*, por lo que* CL^* *y* $LBPo(+\sim)$ *también son diferentes.*

Proposición 3.3. *En el sistema* $LBPco(+\sim)$ *los axiomas* $Ax\,I+\sim$ *y* $Ax\,C+\sim$ *son independientes entre sí.*

Prueba 3.3. *Consecuencia inmediata de la proposición* (3.2).

4 Conclusión

Observando la forma como se articula el montaje de la caracterización de los sistemas presentados, resulta natural la generalización de los operadores de incompatibilidad e determinabilidad a sistemas con parejas de operadores monádicos arbitrarios.

Referencias

[1] X. Caicedo, *Elementos de lógica y calculabilidad*, Universidad de los Andes, Bogotá, 1990.

[2] W. Carnielli y J. Marcos, *A Taxonomy of C-Systems*, Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Ed. Marcel Dekker, New York, 228, 2002.

[3] N. Da Costa, *Inconsistent Formal Systems*, UFPR, Curitiba, 1993.

[4] A. Hamilton, *Lógica para matemáticos*, Paraninfo S.A, Madrid, 1981.

[5] G. Hughes y M. Cresswell *An Introduction to Modal Logic*, Londres, Methuen, 1968.

[6] M. Sierra, *Lógica básica paraconsistente y paracompleta y algunas de sus extensiones*, Revista Universidad EAFIT, 133, 2004.

[7] M. Sierra, *Lógica Básica con Aceptación Fuerte*, Revista Boletín de Matemáticas, **IX**(1), 2002.