Ingeniería y Ciencia
ISSN:1794-9165 | ISSN-e: 2256-4314
ing. cienc., vol. 17, no. 33, pp. 7–21, enero-junio. 2021.
http://www.eafit.edu.co/ingciencia

Álgebra óptima y soluciones invariantes para la ecuación de Chazy

G. Loaiza[1], Yeisson Acevedo-Agudelo[2] y Oscar Londoño-Duque[3]

Recepción: 19-08-2020 | Aceptación: 21-02-2021 | En línea: 12-05-2021

PACS: 02.20.Sv | MSC: 17Bxx

doi:10.17230/ingciencia.17.33.1

Resumen

Se caracterizan las soluciones invariantes para la ecuación de Chazy a partir de los operadores generadores del álgebra óptima, la cual fue obtenida mediante el grupo de simetrías de Lie correspondiente a dicha ecuación.

Palabras clave: Ecuación de Chazy; grupo de simetrías de Lie; álgebra óptima; sistema óptimo; soluciones invariantes.

Optimal Algebra and Invariant Solutions for Chazy's Equation

Abstract

We characterized the invariant solutions for Chazy's equation using the generators of the optimal algebra, which was obtained using Lie group symmetries for the equation.

[1] Universidad EAFIT, gloaiza@eafit.edu.co, Medellín, Colombia.
[2] Universidad EAFIT, yaceved2@eafit.edu.co, Medellín, Colombia.
[3] Universidad EAFIT, olondon2@eafit.edu.co, Medellín, Colombia.

Keywords: Chazy's equation; Lie group symmetries; optimal algebra; Optimal system; invariant solutions.

1 Introducción

La aplicación de la teoría de grupos de simetrías de Lie a una ecuación diferencial es una poderosa herramienta para el estudio de la ecuación, desde que fue introducida en el siglo XIX por Sophus Lie [1] usando una idea de la teoría de Galois en álgebra. Inicialmente se pretendió, con resultado fallido, aplicar la teoría para encontrar un método único que permitiera resolver todas las ecuaciones diferenciales ordinarias. En el siglo XX se encontró la potencia de esta teoría al aplicarla en ecuaciones en derivadas parciales y por tanto, la aplicación de la teoría ha sido de gran interés entre investigadores de diferentes campos de las ciencias como las matemáticas y la física. La aplicación del método a una ecuación diferencial lleva a construir, por ejemplo, leyes de conservación utilizando el conocido teorema de Noether [2] y soluciones invariantes de la ecuación utilizando el enfoque de Ibragimov [3], lo cual muchas veces presenta ventajas frente a otros métodos. Hoy día, existe una gran diversidad de aplicaciones, por ejemplo en procesamiento de imagénes, estudio de fluidos, burbujas e interacción de sistemas, entre otras [4],[5],[6],[7],[8],[9],[10],[11].

De otro lado, en 1963, Rosenhead [12] presentó la ecuación de capa límite de Prandtl para un fluido bidimensional y radial, con velocidad principal de corriente uniforme dada por

$$\nu u_{yyy} = u_y u_{xy} - u_x u_{yy}, \tag{1}$$

donde ν es un número real que representa la viscosidad cinemática. Olver en [13], usando el método clásico de Lie de transformaciones infinitesimales, consigue la transformación

$$u(x,y) = x^{1-\alpha} g(\omega), \quad \omega = \frac{y}{x^{\alpha}}, \tag{2}$$

con $g(\omega)$ función real y al menos de clase $C^{(3)}$. Sustituyendo (2) en (1), se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal de tercer orden:

$$\nu g_{\omega\omega\omega} + D g g_{\omega} + A(g_{\omega})^2 = 0, \tag{3}$$

donde α es un real y $D = 1 - \alpha$ es para la forma bidimensional, $D = 2 - \alpha$ para la forma radial, y $A = 2 - \alpha$ en ambos casos.

En [14],[15],[16],[17],[18],[19] se presentan soluciones de la ec.(3) para diversos valores de α usando múltiples métodos. En [13, 20, 21], mediante el método de simetrías de Lie, se logra una reducción de la ec.(3), para los casos cuando $\alpha = -1$ (bidimensional) y $\alpha = -4$ (forma radial). En [22],[23],[24],[25], Chazy y Olver muestran que el grupo de simetrías de Lie de la ec.(3) es una álgebra no soluble de dicha ecuación y consiguen reducciones. Posteriormente, tanto Nucci e Ibragimov [20], como Mahomed [26], presentan nuevas reducciones de la ec.(3), usando el método simetrías de Lie con variables semi-canónicas.

En el presente trabajo se considera la ecuación de Chazy [22],[23],[24],[25],[27], dada por

$$y_{xxx} = 2yy_{xx} - 3y_x^2, \tag{4}$$

con $x \neq 0$; la cual es un caso particular de (3) cuando $\alpha = -1$. Mahomed [26], usando el grupo de simetrías de Lie y considerando $\alpha = -1$ (2-dimensional) y $\alpha = -4$ (radial), encuentra una familia de soluciones para (4) dada por

$$y(x) = \frac{k - 6c_3x}{c_1 + c_2x + c_3x^2} \text{ con } k = 3\left[-c_2 \pm (c_2^2 - 4c_1c_3)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Debido al gran número de subgrupos del grupo de simetrías de una ecuación diferencial, por lo general no es fácil caracterizar todas las soluciones invariantes. Por ello es pertinente usar un método eficaz para clasificar estas soluciones, lo que conduce a un sistema óptimo de soluciones invariantes.

El propósito del presente trabajo es usar el grupo de simetrías de Lie de la ec.(4), para construir el álgebra óptima y, mediante esta, caracterizar las soluciones invariantes para dicha ecuación.

La forma como se utilizan los operadores para el cálculo del grupo de simetrías de Lie y otras aplicaciones a las ecuaciones diferenciales se pueden revisar en los textos clásicos [28],[29],[30],[31].

2 Grupo continuo de simetrías de Lie

En [26], sin detallar el proceso, aparece la forma de los operadores que generan el grupo de Lie para la ec.(4). En esta sección se muestran los detalles de dichos cálculos.

Proposition 2.1. El grupo de simetrías de Lie para la ecuación de Chazy (4) es generado por los siguientes campos vectoriales:

$$\Pi_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \qquad \Pi_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}; \qquad \Pi_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - (2xy+6)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6}$$

Prueba. La forma general para los operadores generadores de un grupo de Lie de un parámetro admitido por (4) es:

$$x \to x + \epsilon X(x,y) + O\left(\epsilon^2\right), \qquad \text{y} \qquad y \to y + \epsilon Y(x,y) + O\left(\epsilon^2\right),$$

donde ϵ es el parámetro del grupo. El campo vectorial asociado con dicho grupo de transformaciones es $\Gamma = X(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, con X, Y funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Para encontrar los infinitesimales $X(x,y)$ y $Y(x,y)$, se aplica el operador de tercera prolongación,

$$\Gamma^{(3)} \;=\; \Gamma + Y_{[x]}\frac{\partial}{\partial y_x} + Y_{[xx]}\frac{\partial}{\partial y_{xx}} + Y_{[xxx]}\frac{\partial}{\partial y_{xxx}}, \tag{7}$$

a la ec.(4), obteniendo la siguiente condición de simetría

$$Y_{[xxx]} - 2yY_{[xx]} - 2y_{xx}Y + 6y_xY_{[x]} = 0, \tag{8}$$

donde $Y_{[x]}, Y_{[xx]}, Y_{[xxx]}$ son los coeficientes en $\Gamma^{(3)}$ dados por:

$$\begin{aligned}
Y_{[x]} &= D_x[Y] - (D_x[X])y_x = Y_x + (Y_y - X_x)y_x - X_y y_x^2. \\
Y_{[xx]} &= D_x[Y_{[x]}] - (D_x[X])y_{xx}, \\
&= Y_{xx} + (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 \\
&\quad +(Y_y - 2X_x)y_{xx} - 3X_y y_x y_{xx}. \\
Y_{[xxx]} &= D_x[Y_{[xx]}] - (D_x[X])y_{xxx}, \\
&= Y_{xxx} + (3Y_{xxy} - X_{xxx})y_x + 3(Y_{xyy} - X_{xxy})y_x^2 \\
&\quad + \left(Y_{yyy} - 3X_{xyy}\right)y_x^3 - X_{yyy}y_x^4 + 3\left(Y_{xy} - X_{xx}\right)y_{xx}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$+3\left(Y_{yy}-3X_{xy}\right)y_xy_{xx}-6X_{yy}y_x^2y_{xx}-3X_yy_{xx}^2$$
$$+\left(Y_y-3X_x\right)y_{xxx}-4X_yy_xy_{xxx},$$

siendo D_x el operador de la derivada total: $D_x=\partial_x+y_x\partial_y+y_{xx}\partial_{y_x}+y_{xxx}\partial_{y_{xx}}+\cdots$. Luego de aplicar (9) en (8) se tiene:

$$\begin{aligned}
& Y_{xxx}+(3Y_{xxy}-X_{xxx})y_x+3(Y_{xyy}-X_{xxy})y_x^2+(Y_{yyy}-3X_{xyy})y_x^3\\
- & X_{yyy}y_x^4+3(Y_{xy}-X_{xx})y_{xx}+3(Y_{yy}-3X_{xy})y_xy_{xx}-6X_{yy}y_x^2y_{xx}\\
- & 3X_yy_{xx}^2+(Y_y-3X_x)y_{xxx}-4X_yy_xy_{xxx}-2yY_{xx}-2(2Y_{xy}-X_{xx})yy_x\\
- & 2(Y_{yy}-2X_{xy})yy_x^2+2X_{yy}yy_x^3-2(Y_y-2X_x)yy_{xx}+6X_yyy_xy_{xx}\\
- & 2Yy_{xx}+6Y_xy_x+6(Y_y-X_x)y_x^2-6X_yy_x^3=0. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Sustiyendo $y_{xxx}=2yy_{xx}-3y_x^2$ en (10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& Y_{xxx}+(3Y_{xxy}-X_{xxx})y_x+3(Y_{xyy}-X_{xxy})y_x^2+(Y_{yyy}-3X_{xyy})y_x^3\\
- & X_{yyy}y_x^4+3(Y_{xy}-X_{xx})y_{xx}+3(Y_{yy}-3X_{xy})y_xy_{xx}-6X_{yy}y_x^2y_{xx}\\
- & 3X_yy_{xx}^2+(Y_y-3X_x)(2yy_{xx}-3y_x^2)-4X_y(2yy_{xx}-3y_x^2)y_x-2yY_{xx}\\
- & 2(2Y_{xy}-X_{xx})yy_x-2(Y_{yy}-2X_{xy})yy_x^2+2X_{yy}yy_x^3-2(Y_y-2X_x)yy_{xx}\\
+ & 6X_yyy_xy_{xx}-2Yy_{xx}+6Y_xy_x+6(Y_y-X_x)y_x^2-6X_yy_x^3=0. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Al agrupar con respecto a $1,y_x,y_x^2,y_x^3,y_x^4,y_{xx},y_{xx}^2,y_xy_{xx}$ y $y_x^2y_{xx}$ en (10) obtenemos

$$\begin{aligned}
& Y_{xxx}-2yY_{xx}+[3Y_{xxy}-X_{xxx}-2y(2Y_{xy}-X_{xx})+6Y_x]y_x\\
+ & [3(Y_{xyy}-X_{xxy}-Y_y+3X_x)-2y(Y_{yy}-2X_{xy})+6(Y_y-X_x)]y_x^2\\
+ & (Y_{yyy}-3X_{xyy}+2yX_{yy}+12X_y-6X_y)y_x^3-X_{yyy}y_x^4\\
+ & [3(Y_{xy}-X_{xx})+2y(Y_y-3X_x)-2y(Y_y-2X_x)-2Y]y_{xx}-3X_yy_{xx}^2\\
+ & [3(Y_{yy}-3X_{xy}+2yX_y)-8yX_y]y_xy_{xx}-6X_{yy}y_x^2y_{xx}=0. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Analizando los coeficientes asociados a $1,y_x,y_x^2,y_x^3,y_x^4,y_{xx},y_{xx}^2,y_xy_{xx},y_x^2y_{xx}$ en (12), se obtienen las ecuaciones determinantes:

$$X_y=Y_{yy}=0, \qquad (13a)$$
$$3Y_y+3X_x=0, \qquad (13b)$$

$$Y_{xxx} - 2yY_{xx} = 0, \tag{13c}$$
$$3Y_{xy} - 2Y - 2yX_x - 3X_{xx} = 0, \tag{13d}$$
$$6Y_x - 4yY_{xy} + 3Y_{xxy} + 2yX_{xx} - X_{xxx} = 0. \tag{13e}$$

Al solucionar en (13a) se tiene: $X = c_1(x)$ y $Y = c_2(x)y + c_3(x)$, por lo tanto de (13b) se sigue que $3c_2(x)+3c_1'(x) = 0$ y por tanto, $c_2(x) = -c_1'(x)$. en consecuencia se tiene que

$$X = c_1(x), \qquad Y = -c_1'(x)y + c_3(x). \tag{14}$$

Sustituyendo (14) en (13d) se tiene $-3c_1''(x)+2yc_1'(x)-2c_3(x)-2yc_1'(x)-3c_1''(x) = 0$, esto es, $-3c_1''(x) = c_3(x)$ y por tanto de (14), se obtiene

$$X = c_1(x) \quad ; \quad Y = -c_1'(x)y - 3c_1''(x). \tag{15}$$

Utilizando (15) en (13e), se sigue que

$$y(-6c_1''(x) + 4c_1''(x) + 2c_1''(x)) - 22c_1'''(x) = 0,$$

de lo cual $-22c_1'''(x) = 0$ y por tanto,$c_1(x) = c_3x^2 + c_2x + c_1$, con c_1, c_2, c_3 constantes. En consecuencia, reescribiendo la expresión (15) se obtiene que $X = c_3x^2+c_2x+c_1$ y $Y = (-2c_3x - c_2)y - 3(2c_3)$, por lo que generadores infinitesimales son:

$$X = c_3x^2 + c_2x + c_1 \qquad Y = -c_2y - c_3(2xy + 6), \tag{16}$$

con c_1, c_2, c_3 constantes arbitrarias. De tal forma se tiene

$$\begin{aligned}
\Gamma &= X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} = (c_3x^2 + c_2x + c_1)\frac{\partial}{\partial x} + (-c_2y - c_3(2xy+6))\frac{\partial}{\partial y}, \\
&= c_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + c_2\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) + c_3\left(x^2\frac{\partial}{\partial x} - (2xy+6)\frac{\partial}{\partial y}\right), \\
&= c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2 + c_3\Pi_3.
\end{aligned}$$

Por tanto, el grupo continuo de simetrías es generado por los operadores que aparecen en el enunciado propuesto. $\square$

3 Cálculo del álgebra óptima y soluciones invariantes

En esta sección se calcula el álgebra óptima [28],[32],[33],[34] a partir del grupo de simetrías de Lie generado por los operadores (6), que corresponde a la ecuación (4). Posteriormente se presentarán las soluciones invariantes co-rrespondientes a los operadores que generan al álgebra óptima. Esto último se hará mediante el uso de la condición de curva invariante presentada en la sección 4.3 de [32], ya que al aplicar el método basado en la reducción canónica de variables, aparecen cálculos mucho más complejos.

De acuerdo a (6), el espacio vectorial generado por los operadores Π_1, Π_2, Π_3 es un álgebra de Lie 3-dimensional. A continuación se usará dicha álgebra para determinar el sistema óptimo, mediante la aplicación ordenada de la acción de los mapas conmutadores y adjuntos, tal como se describe en [34]. Para cada Π_α, Π_β con $i = 1, 2$ y $\alpha, \beta = 1, 2, 3.$ se considera

$$[\Pi_\alpha, \Pi_\beta] = \Pi_\alpha\Pi_\beta - \Pi_\beta\Pi_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left(\Pi_\alpha(\xi^i_\beta) - \Pi_\beta(\xi^i_\alpha)\right) \frac{\partial}{\partial x^i}\,, \tag{17}$$

donde ξ^i_α son los respectivos coeficientes infinitesimales de los operadores Π_α. Así por ejemplo, en la ecuación (6), tenemos que $\xi^1_1 = 1$, $\xi^1_3 = x^2$, $\xi^2_1 = 0$ y $\xi^2_3 = -(2xy + 6)$. A continuación se presenta, a manera de ejemplo, el cálculo de $[\Pi_1, \Pi_3]$ para ilustrar la aplicación de (17) en (6):

$$\begin{aligned}
[\Pi_1, \Pi_3] &= \left(\Pi_1(\xi^1_3) - \Pi_3(\xi^1_1)\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\Pi_1(\xi^2_3) - \Pi_3(\xi^2_1)\right) \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(\Pi_1(x^2) - \Pi_3(1)\right) \frac{\partial}{\partial x} + (\Pi_1(-(2xy + 6)) - \Pi_3(0)) \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left[2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}\right] = 2\Pi_2.
\end{aligned}$$

De manera análoga, se calculan los conmutadores para el resto de las simetrías descritas en (6). La Tabla (1) representa los resultados obtenidos.

Tabla 1: Conmutadores del grupo de simetrías.

$[\,,]$	Π_1	Π_2	Π_3
Π_1	0	Π_1	$2\Pi_2$
Π_2	$-\Pi_1$	0	Π_3
Π_3	$-2\Pi_2$	$-\Pi_3$	0

Nótese que el álgebra generada por (6) es un álgebra no soluble [20], pues observando la Tabla (1) se tiene

$$\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle = \Pi_1, \qquad \langle \Pi_1, \Pi_3 \rangle = 2\Pi_2, \qquad \langle \Pi_2, \Pi_3 \rangle = \Pi_3.$$

Por otra parte, usando nuevamente la Tabla (1), se puede calcular el operador adjunto para (6) que a su vez, permite construir el sistema óptimo de (6). Se usará el operador adjunto presentado en [34] y definido como:

$$Ad(\exp(\lambda \Pi))H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}(ad(\Pi))^n G, \text{ para simetrías } \Pi \text{ y } G. \tag{18}$$

En la Tabla (2) se resume el resultado de aplicar el operador (18) al grupo de generadores de simetrías (6).

Tabla 2: Representación adjunta del grupo de simetrías.

$Adj[\,]$	Π_1	Π_2	Π_3
Π_1	Π_1	$\Pi_2 - \lambda\Pi_1$	$\Pi_3 - 2\lambda\Pi_2 + \lambda^2\Pi_1$
Π_2	$e^{\lambda}\Pi_1$	Π_2	$e^{-\lambda}\Pi_3$
Π_3	$\Pi_1 + 2\lambda\Pi_2 + \lambda^2\Pi_3$	$\Pi_2 + \lambda\Pi_3$	Π_3

Para calcular el sistema del álgebra óptima, se inicia con los generadores de las simetrías (6) y un vector genérico distinto de cero. Sea

$$G = a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + a_3\Pi_3. \tag{19}$$

El objetivo es simplificar tantos coeficientes a_i como sea posible, a través de mapas adjuntos a G, mediante la Tabla (2).

1. Suponiendo $a_3 = 1$ en (19) tenemos que $G = a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + \Pi_3$. La simplificación se hace aplicando el operador estratégicamente para cada Π_i $(i = 1, 2)$. Utilizando la Tabla (2) se tiene

   $$G_1 = Ad(\exp(\lambda_1\Pi_1))G = a_1\Pi_1 + a_2(\Pi_2 - \lambda_1\Pi_1) + \Pi_3 - 2\lambda_1\Pi_2 + \lambda_1^2\Pi_1,$$

   así, organizando se obtiene

   $$G_1 = b_1\Pi_1 + (a_2 - 2\lambda_1)\Pi_2 + \Pi_3, \tag{20}$$

   con $b_1 = a_1 - a_2\lambda_1 + \lambda_1^2$. Tomando $\lambda_1 = \frac{a_2}{2}$ en (20), se elimina Π_2, por tanto $G_1 = b_1\Pi_1 + \Pi_3$. Ahora se procede aplicar el adjunto para Π_3, obteniendo

   $$G_2 = Ad(\exp(\lambda_2\Pi_3))G_1 = b_1\Pi_1 + 2b_1\lambda_2\Pi_2 + \left(b_1\lambda_2^2 + 1\right)\Pi_3. \tag{21}$$

   Al simplificar la expresión cuadrática, surgen los siguientes casos:

   (a) Caso $\lambda_2 = \pm\sqrt{\frac{-1}{b_1}}$ con $b_1 < 0$. Tomando $\lambda_2 = \pm\sqrt{\frac{-1}{b_1}}$, con $b_1 < 0$, en (21) se elimina Π_3, luego $G_2 = b_1\Pi_1 + b_2\Pi_2$, con $2\lambda_2 b_1 = b_2$. Finalmente, aplicando el adjunto para Π_2 se tiene que

   $$G_3 = Ad(\exp(\lambda_3\Pi_2))G_2 = b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2 \text{ con } b_3 = e^{-\lambda_3}b_1.$$

   Es claro que esta acción no reduce los coeficientes, por lo tanto un elemento del álgebra óptima es $b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2$, con $b_3 = e^{-\lambda_3}b_1 < 0$.

   (b) Caso $b_1 = 0$. En (21) se elimina Π_1 y Π_2, entonces $G_2 = \Pi_3$. Aplicando el adjunto para Π_2 se tiene

   $$G_3 = Ad(\exp(\lambda_5\Pi_2))G_2 = e^{-\lambda_5}\Pi_3.$$

   Esta acción no reduce más los coeficientes y, por ende, otro elemento del álgebra óptima es: Π_3.

2. Suponiendo $a_3 = 0$ y $a_2 = 1$ en (19) tenemos que $G = a_1\Pi_1 + \Pi_2$. Al aplicar Π_1 utilizando la Tabla (2) se obtiene

   $$G_1 = Ad(\exp(\lambda_6\Pi_1))G = (a_1 - \lambda_6)\Pi_1 + \Pi_2.$$

Así, tomando $\lambda_6 = a_1$ se elimina Π_1, luego $G_1 = \Pi_2$. Procedemos a aplicar el adjunto para Π_3, obteniendo

$$G_2 = Ad(\exp(\lambda_7 \Pi_3))G_1 = \Pi_2 + \lambda_7 \Pi_3.$$

Dado que esta acción no reduce coeficientes, tenemos que $G_2 = \Pi_2 + b_4 \Pi_3$. Por tanto, un elemento más del álgebra óptima es $\Pi_2 + b_4\Pi_3$.

3. Finalmente, suponiendo $a_3 = 0, a_2 = 0$ y $a_1 = 1$ se tiene $G = \Pi_1$. Al aplicar el adjunto para Π_1, se obtiene

$$G_1 = Ad(\exp(\lambda_9 \Pi_1))G = \Pi_1.$$

Esta acción no permite reducir coeficientes y por ende tenemos que $G_1 = \Pi_1$. Por tanto, tenemos que otro elemento del álgebra óptima es Π_1.

En resumen, se tiene el siguiente sistema óptimo, o álgebra optima, para las simetrías de (6):

$$\{\, b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2, \quad \Pi_2 + b_4\Pi_3, \quad \Pi_1, \quad \Pi_3 \,\}, \tag{22}$$

con $b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. con $b_3 < 0$. Este proceso puede ser resumido en el siguiente resultado.

Proposition 3.1. El álgebra óptima (sistema óptimo) para la ec.(4) es generada por los siguientes campos vectoriales:

$$b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2\,, \quad \Pi_2 + b_4\Pi_3\,, \quad \Pi_1\,, \quad \Pi_3\,, \tag{23}$$

con $b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. con $b_3 < 0$.

A continuación se caracterizan las soluciones invariantes a partir de los operadores que generan al álgebra óptima.

En primer lugar, el álgebra óptima asociada a una ecuación diferencial, es el menor álgebra que contiene al respectivo grupo de Lie y que es generada por el máximo número posible de operadores que dejan la ecuación diferencial invariante. Por lo anterior, todas las posibles reducciones que dejan a la ecuación diferencial invariante, se pueden obtener de los operadores que generan al álgebra óptima. En particular, todas aquellas reducciones que correspondan a soluciones invariantes de la ecuación diferencial, se pueden obtener de los elementos generadores del álgebra óptima. Por lo anterior, el álgebra óptima caracteriza a todas las posibles soluciones invariantes de la ecuación diferencial. En este sentido, a continuación se procederá a caracterizar todas las posibles soluciones invariantes de la ec.(4), mediante el sistema óptimo (22).

Usando elementos del sistema óptimo (22) se reduce la ec.(4) mediante la condición de curva invariante presentada en la sección 4.3 de [32], que en este caso se expresa en términos de los infinitesimales por

$$Q(x, y, y_x) = Y - y_x X = 0. \tag{24}$$

Se calcula la solución invariante de la ec.(4) usando el elemento Π_1 del grupo óptimo (22), bajo la condición (24). De tal forma se tiene $Q = Y_1 - y_x X_1 = -y_x = 0$ y así, $y(x) = c$, con c constante. Pero para que la solución $y(x) = c$ sea solución invariante de (4), es necesario que $c = 0$ y así, $y(x) = 0$.

Se calcula a continuación una familia de las soluciones invariantes de la ec.(4), usando el elemento $b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2$ del grupo óptimo (22). Nuevamente con la condición (24) se tiene $Q = Y_{1,2} - y_x X_{1,2} = -b_2 y - y_x(b_3 + b_2 x) = 0$, de donde $y(x) = \dfrac{c}{\left|1 + \frac{b_2}{b_3}x\right|}$, con b_2, b_3, c constantes, $b_3 < 0$. Para que esta solución de (4) sea invariante, es necesario que $c \in \left\{0, \frac{-6b_2}{b_3}\right\}$. Por tanto otra solución invariante es $y(x) = \frac{6b_2}{|b_2 x + b_3|}$.

Al calcular otra solución invariante de la ec.(4) usando el elemento Π_3 del grupo óptimo (22), con la condición de invarianza (24), se obtiene $Q = Y_3 - y_x X_3 = -(2xy + 6) - y_x x^2 = 0$, de donde $y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}$, con c constante y para que sea solución invariante se requiere que $y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}$, con $x \neq 0$.

Finalmente, la última solución invariante de (4) corresponde al elemento $\Pi_2 + b_4\Pi_3$ del grupo óptimo (22). De la condición (24), se sigue $Q = Y_{2,3} - y_x X_{2,3} = -y - b_4(2xy + 6) - y_x(x + b_4 x^2) = 0$, cuya solución para y es $y(x) = \frac{c}{x(b_4 x+1)} - \frac{6b_4}{b_4 x+1}$, con c, b_4 constantes. Para que dicha solución sea solución invariante de la ec.(4) es necesario que $c \in \{0, -6\}$. Para $c = -6$ se obtiene la solución invariante $y(x) = \frac{-6}{x}$, nótese que esta solución se obtiene a partir de la familia de soluciones invariantes correspondientes a Π_3. Para $c = 0$ se obtiene la solución invariante $y(x) = \frac{-6b_4}{b_4x+1}$.

Se resume el proceso anterior en el siguiente resultado.

Proposition 3.2. Las soluciones invariantes no triviales de la ecuación de Chazy (4), que se obtienen al reducir la ecuación a partir de los elementos generadores del álgebra óptima (23), son:

$$1)\ y(x) = \frac{6b_2}{|b_2x + b_3|}, \qquad 2)\ y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}, \qquad 3)\ y(x) = \frac{-6b_4}{b_4x + 1},$$

con c, b_2, b_4 constantes, $b_3 < 0$.

Observación

Las soluciones invariantes no triviales presentadas en la Proposición 3.2, caracterizan a todas las soluciones invariantes no triviales de (4). Nótese que si se toma $b_2, b_4 = 1$ y $b_3 = -1$ se obtienen las soluciones $y(x) = \frac{6}{|x-1|}, y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}$ y $y(x) = \frac{-6}{x+1}$, las cuales son soluciones invariantes diferentes a las presentadas en [22],[25],[20]. En particular, se puede comprobar que todas las familias de soluciones invariantes no triviales presentadas en la Proposición anterior, no se pueden obtener a partir de (5) y por tanto son diferentes a las soluciones presentadas en [26]. En la Proposición 3.2 aparecen soluciones que hasta el momento no se referencian en la literatura.

4 Conclusiones

Mediante el grupo de simetrías de Lie de (4), se calculó la respectiva álgebra óptima, presentada en la Proposición 3.1. Mediante los elementos generadores del álgebra óptima, se pueden caracterizar todas las soluciones invariantes; como se presenta en la Proposición 3.2, en la cual aparecen soluciones que hasta el momento no se referencian en la literatura y por ende, el objetivo propuesto fue logrado. Para futuros trabajos, se podría retomar el grupo de simetrías de Lie para calcular las leyes de conservación de (4) y también usar la teoría de grupo de equivalencia [35], para obtener ordenaciones preliminares para una clasificación completa de (4).

Agradecimientos

Loa autores Gabriel Loaiza y Yeisson Acevedo agradecen a Minciencias por la financiación mediante el proyecto titulado "Sobre procesos de difusión y simplificación de información", código 121671250122.

Referencias

[1] S. Lie, "Theorie der transformationsgruppen," *Mathematische Annalen*, vol. 2, 1970. 8

[2] E. Noether, "Invariante variationsprobleme. nachrichten der königlichen gessellschaft der wissenschaften. mathematisch-physikalishe klasse 2, 235–257," *Transport Theory and Statistical Physics*, pp. 183–207, 1918. 8

[3] N. H. Ibragimov, *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations.* CRC press, 1995, vol. 3. 8

[4] A. Paliathanasis and P. Leach, "Symmetries and singularities of the szekeres system," *Physics Letters A*, vol. 381, no. 15, p. 1277–1280, Apr 2017. 8

[5] A. Ghose-Choudhury, P. Guha, A. Paliathanasis, and P. G. L. Leach, "Noetherian symmetries of noncentral forces with drag term," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 14, no. 02, p. 1750018, Jan 2017. 8

[6] W. Hu, Z. Wang, Y. Zhao, and Z. Deng, "Symmetry breaking of infinite-dimensional dynamic system," *Applied Mathematics Letters*, vol. 103, p. 106207, 2020. 8

[7] E. Alimirzaluo, M. Nadjafikhah, and J. Manafian, "Some new exact solutions of \$(3+1)\$-dimensional burgers system via lie symmetry analysis," 2021. 8

[8] A. Paliathanasis, "Lie symmetry analysis and one-dimensional optimal system for the generalized 2+1 kadomtsev-petviashvili equation," *Physica Scripta*, vol. 95, no. 5, p. 055223, 2020. 8

[9] H. Lu and Y. Zhang, "Lie symmetry analysis, exact solutions, conservation laws and bäcklund transformations of the gibbons-tsarev equation," *Symmetry*, vol. 12, no. 8, p. 1378, 2020. 8

[10] S.-F. Tian, "Lie symmetry analysis, conservation laws and solitary wave solutions to a fourth-order nonlinear generalized boussinesq water wave equation," *Applied Mathematics Letters*, vol. 100, p. 106056, 2020. 8

[11] M. R. Ali and R. Sadat, “Lie symmetry analysis, new group invariant for the (3+1)-dimensional and variable coefficients for liquids with gas bubbles models,” *Chinese Journal of Physics*, 2021. 8

[12] L. Rosenhead, *Laminar Boundary Layers.* Clarendon Press, (1963). 8

[13] P. J. Olver, “Applications of Lie groups to differential equations,” *Gradua-te texts in Mathematics*, vol. 107 (1993), 1993. 8, 9

[14] H. Schlichting, “Laminare strahlausbreitung,” *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 13, pp. 260–263, 1933. https://doi.org/10.1002/zamm.19330130403 9

[15] W. G. Bickley, “The plane jet,” *Phil. Mag.*, vol. 23, pp. 727–721, 1937. 9

[16] H. B. Squire, *50 fahre Grenzschichtforschung*, vol. (1955). 9

[17] M. B. Glauert, “The wall jet,” *J. Fluid Mech.*, vol. 1, p. 625–643, 1956. 9

[18] N. Riley, “Asymptotic expansions in radial jets,” *J.Math. and Phys.*, vol. 41, pp. 132–146, 1962. https://doi.org/10.1002/sapm1962411132 9

[19] L. J. Crane, “Flow past a stretching plate,” *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 21, p. 645–647, 1970. https://doi.org/10.1007/BF01587695 9

[20] N. H. Ibragimov and M. C. Nucci, “Integration of third order ordinary differential equations by Lie’s method: Equations admitting three-dimensional Lie algebras,” *Lie Groups and their applications*, vol. 1, pp. 49–64, 1994. 9, 14, 18

[21] F. M. Mahomed, “Symmetry group classification of ordinary differential equations: Survey of some results,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 30, p. 1995–2012, 2007. https://doi.org/10.1002/mma.934 9

[22] J. Chazy, “Sur les equations differentielles dont l’integrale generale est uniforme et admet des singelarities essentielles mobiles,” *C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. 149, p. 563–565, 1909. 9, 18

[23] ——, “Sur les equations differentielles dont l’integrale generale possede une coupure essentielle mobile,” *C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. 150, p. 456–458, 1910. 9

[24] ——, “Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d’ordre superieur dont l’integrale generale a ses points critiques fixes,” *Acta Math.*, vol. 34, p. 317–385, 1911. 9

[25] P. A. Clarkson and P. J. Olver, “Symmetry and the Chazy equation,” *J. Diff. Eq.*, vol. 124, p. 225–246, 1996. https://www-users.math.umn.edu/~olver/s_/chazy.pdf 9, 18

[26] R. Naz., F. M. Mahomed, and D. P. Mason, "Symmetry solutions of a third-order ordinary differential equation which arises from Prandtl boundary layer equations," *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, vol. 15, pp. 179–191, 2008. https://doi.org/10.2991/jnmp.2008.15.s1.16 9, 10, 18

[27] D. J. Arrigo, *Symmetry analysis of differential equations.* Wiley, (2014). 9

[28] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer-Verlag, (1986). 9, 13

[29] G. Bluman and S. Anco, *Symmetry and integration methods for differential equations.* Springer Science and Business Media, (2008). 9

[30] N. H. Ibragimov, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* CRC Press, Boca Raton, (1996). 9

[31] G. W. Bluman and J. D. Cole, *Asimilarity methods for differential equations.* Springer-Verlag, (1974). 9

[32] P. Hydon and D. Crighton, *Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide*, ser. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, (2000). 13, 17

[33] Z. Hussain, *Optimal system of subalgebras and invariant solutions for the Black-Scholes equation.* Blekinge Institute of Technology, (2009). 13

[34] G. Zewdie, *Lie simmetries of junction conditions for radianting stars.* University of KwaZulu-Natal, (2011). 13, 14

[35] L. Ovsyannikov, "Group analysis of differential equations," *Academic Press*, vol. 75, pp. 204–211, 1982. 18