**Ingeniería y Ciencia**
ISSN:1794-9165 | ISSN-e: 2256-4314
ing. cienc., vol. 17, no. 33, pp. 23–44, enero-junio. 2021.
http://www.eafit.edu.co/ingciencia
CC BY

# $e-$ Cálculo

Julio César Jaramillo Quiceno[1]

Recepción: 04-09-2020 | Aceptación: 11-03-2021 | En línea: 12-05-2021

PACS:02.10.Hh, 02.30.f, 02.30.Fn

doi:10.17230/ingciencia.17.33.2

### Resumen

En este trabajo se formula el $e-$ cálculo en base a la naturaleza de las cargas eléctricas, usando la tercera ley de Newton y la ley de Coulomb, la $e-$ álgebra y la $q-e$ álgebra deformada, asociando las variables $e_i, e_j$ como cargas elementales, y $x$ como la variable conductora. Se define la $e-$ derivada a partir de un simple experimento de encendido y apagado de un bombillo respectivamente. Por otro lado, se formulan las $e-$ series, la $e-$ integral, las $q-e$ derivadas, series e integrales y sus respectivos criterios de convergencia. Sobre las $e-$ integrales se establecen un camino o contorno cerrado $\Gamma(x)$ para definir las $e-$ integrales de contorno, y finalmente se formulan el $q-e$ cálculo deformado y la $q-e$ álgebra de Heisenberg.

**Palabras clave:** $e-$ derivada; $e-$ álgebra; $e-$ integral; $q-e$ álgebra.

## $e-$ Calculus

### Abstract

In this work formulate the $e-$ calculus based on the nature of the electric charges, using Newton third law and the Coulomb law, the $e-$ algebra and

[1] Universidad Nacional de Colombia, jcjaramilloq@unal.edu.co, Bogotá, Colombia.

the $q-e$ deformed algebra associating the variables $e_i, e_j$ as elementary charges, and $x$ as the conductive variable. The $e-$ derivative is defined from a simple experiment off-on light bulb respectively. On the other hand, the $e-$ series, the $e-$ integral, the $q-e$ derivatives, series and integrals and their respective convergence criteria are formulated. On the $e-$ integrals a path or closed contour $\Gamma(x)$ is established to define the $e-$ contour integrals and finally the $q-e$ deformed calculus and the $q-e$ Heisenberg algebra are formulated.

**Keywords:** $e-$ derivative, $e-$ algebra, $e-$ integral, $q-e$ algebra.

## 1 Introducción

Cohen y Pemberton en año 1963, mostraron en su traducción de los Principia de Newton la tercera ley del movimiento: acción y reacción entre dos cuerpos, la cuál puede extenderse a la interacción electrostática, confirmando la formulación de Coulomb en su trabajo del año de 1785 (Cohen - Pemberton 1729, [1],(Coulomb 1785, [2]). Historicamente, el álgebra no conmutativa hizo su primera aparición en los trabajos de Hamilton y Grassmann. Hamilton introdujo el concepto de cuaternión con el objetivo de definir las algebras arbitrarias de rango finito sobre el campo de los numeros reales, y Grassmann en 1884 definió el álgebra exterior (Hamilton 1844,[3],[4]). Mas tarde Jackson en 1908, en su trabajo introdujo la $q-$ derivada y la $q-$ integral como un análogo de la derivación e integración ordinaria (Jackson 1908,[5]). Heisenberg formuló la mecánica cuántica a partir de las relaciones de conmutación para dos operadores $XY - YX = i\hbar$ (Heisenberg 1925, [6]), y Weyl construyó un álgebra no conmutativa a partir del principio de incertidumbre de Heisenberg (Weyl 1928, [7]). Por otro lado, Silvestrov y Hellstrom desarrollaron un texto sobre los elementos conmutativos para el álgebra deformada de Heisenberg (Silvestrov y Hellstrom 2000,[8]). Walton en el año 2019, invitó al lector a explorar sobre el álgebra no conmutativa (Walton 2018,[9]). En ese mismo año, los autores Reyes y Jaramillo, Lopes y Razavinia en el 2020, mencionaron algunas propiedades del álgebra deformada de Heisenberg (Reyes y Jaramillo 2018, [10], Lopes y Razavinia 2020, [11]). En este trabajo se pretende formular un nuevo cálculo en base a la naturaleza de las partículas cargadas denominado como el $e-$ cálculo, partiendo de la interacción electrostática entre dos partículas cargadas de acuerdo con la tercera ley de newton y la ley de Coulomb. En la sección 2 se definen los axiomas que permiten formular la $e-$ álgebra tomando como variables $e_i, e_j, x \in \mathbb{C}$ con $i < 0, j > 0$. Es importante mencionar que en este trabajo, la variable $x$ se denomina como la *variable conductora*. En la misma sección, se construye la $e-$ álgebra deformada o $q-e$ álgebra a partir de otros axiomas. Se formula en la sección 3 la $e-$ derivada a partir del encendido y apagado de un bombillo, tomando $e_i$ como constante, $x$ como variable, y se incluye un parámetro $n$ que permite distinguir si es encendido o apagado. En la sección 4 se construyen las $e-$ series infinitas a partir de los axiomas de la $q-e$ álgebra, y su criterio de convergencia partiendo de un lema propuesto. En la misma sección, se define anticipadamente la $e-$ integral sobre las $q-e$ series de potencias centrada en $\alpha$ para algún $x \in (0, +\infty)$ a partir de la regla de conmutación $e_m x_m - q_m x_m e_m = p_m$ y su respectivo criterio de convergencia, y también se propone una expansión en series para $f(ex+ne) - f(ex)$. En la sección 5, a partir de la expansión en series de $f(ex+ne)-f(ex)$ se definen las $e-$ integrales sobre un camino cerrado conductor $\Gamma(x)$, las $e-$ integrales impropias de primera y segunda clase, y la $q-e$ integral de contorno de segunda clase de la $q-e$ series de potencias. Finalmente se construye en la sección 6 el $q-e$ cálculo y la $q-e$ álgebra de Heisenberg.

## 2 $e-$ álgebra y $q-e$ álgebra

Partiendo de la interacción electrostática entre dos particulas cargadas, usando la tercera ley de Newton y la ley de Coulomb mostrados en los trabajos de Coulomb (Colulomb 1785, [2]), Cohen y Pemberton (Cohen - Pemberton 1963, [1]) y Yahalom - Tuval (Yahalom y Tuval 2014, [12]), se consideraron las variables asociadas a las partículas cargadas, denotadas por $e_i, e_j$ con $i < 0, j > 0$ y otra variable asociada a la conductividad definida como *variable conductora* denotada por $x$, para definir la $e-$ álgebra de la siguiente manera.

### 2.1 Definición 1. $e-$ álgebra

Sean las variables $x, e_i, e_j \in \mathbb{C}$. La $e-$ álgebra se define a partir de los siguientes axiomas:

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad i \neq j, \quad i < 0 \quad j > 0, \tag{1}$$
$$e_i e_i = e_j e_j = 0, \tag{2}$$
$$e_i = (e_j)^\dagger, \tag{3}$$
$$e_i x = x e_i, \tag{4}$$
$$e_i x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0. \tag{5}$$

Es importante mencionar que el axioma (1) puede interpretarse físicamente a partir de la tercera ley de Newton de acción y reacción para el caso electrostático, tomando la constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$ y $r = 1$ de la formula (2.2) del trabajo de Kneubil (Kneubil 2016, [13]).

## 2.2 Definición 2. $q - e$ álgebra

Se considera el caso no conmutativo y deformado para la $e-$ álgebra partiendo de los axiomas de la definición anterior:

$$e_i e_j + q_{ij} e_j e_i = p e_{ij}, \tag{6}$$
$$e_i x_j - q_{ij} x_j e_i = p e_{ij}, \tag{7}$$
$$(e_i)^\dagger e_j = (e_j)^\dagger e_i = e_{ij}, \tag{8}$$

siendo $p \in \mathbb{C}$ una constante, y $q_{ij}$ la constante de deformación definida como

$$q_{ij} = 1 - \exp\left[-\frac{h}{\delta_{ij}}\right], \tag{9}$$

y siendo $h$ la constante de Planck observada en el texto de Kac ( Kac 2002,[14]); Por otro lado, el termino $e_{ij}$ es expresada como

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i \neq j \\ 0 & \text{if} \quad i = j \end{cases} . \tag{10}$$

Respecto a las constantes $e_{ij}$ y $q_{ij}$, estas tienen las siguientes propiedades:

$$q_{ij} = q_{ji}, \tag{11}$$
$$e_{ij} = e_{ji}, \tag{12}$$
$$(q_{ij})^{\dagger} = q_{ij}, \tag{13}$$
$$(e_{ij})^{\dagger} = e_{ij}. \tag{14}$$

Para demostrar las anteriores propiedades es suficiente calcular el complejo conjugado de (9) y (10).

**Teorema 2.1.** Para todo $e_i, e_j$ se cumple que:

$$(e_j)^{\dagger} e_j + q_{ij} e_j (e_j)^{\dagger} = p e_{ij}, \tag{15}$$
$$q_{ji}(e_i)^{\dagger} e_i + e_i (e_i)^{\dagger} = p e_{ji}. \tag{16}$$

*Demostración.* Se sustituye el axioma (3), las expresiones (13) y (14) en (6). □

## 3 $e$-Derivada.

Partiendo de lo mencionado anteriormente, se construye el $e-$ cálculo tomando como referencia la experiencia del encendido y apagado de un bombillo.

### 3.1 Definición 3 $e$- Derivada.

Considérese la acción de encendido y apagado asociada a una función $f$ que depende de $e_i$ y de $x$. En este caso se toma $e_i$ como constante y $x$ como la variable. A partir de las siguientes experiencias se formula la *e-derivada*:

1. **Encendido - Apagado**

El instante inicial de encendido del bombillo se define como $(x, f(e_i x))$, y el apagado como el instante final, $(e_i x, f(e_i x - e_i))$. De acuerdo con la definición de la derivada ordinaria siendo la razón de cambio de la función respecto a la variable independiente, la $e-$ derivada se define como *la razón de cambio de la función $f$ respecto a la variable conductora $x$*. Por lo tanto, en el caso de la experiencia de encendido - apagado, la $e-$ derivada está dada por

$$\frac{d_e f(x)}{d_e x} = \frac{f(e_i x - e_i) - f(e_i x)}{x(e_i - 1)}. \tag{17}$$

2. **Encendido - Encendido**

   En este caso se considera inicialmente el mismo instante del caso anterior, es decir $(x, f(e_i x))$. Sin embargo al aumentar la luminosidad del bombillo, el instante final cambia a $(e_i x, f(e_i x + e_i))$. Por lo tanto la $e-$ derivada para esta experiencia está definida como

$$\frac{d_e f(x)}{d_e x} = \frac{f(e_i x + e_i) - f(e_i x)}{x(e_i - 1)}. \tag{18}$$

Las expresiones (17-18) se pueden condensar al incluir un parámetro que permite distinguir el encendido y el apgado del bombillo denotado por $n$, y se define como

$$n := \begin{cases} +1 & \text{si se enciende} \\ -1 & \text{si se apaga} \end{cases}, \tag{19}$$

y cambiando por facilidad $e_i$ por $e$, finalmente el cociente diferencial de la $e - $*derivada* en su forma general se expresa como

$$\frac{d_e f}{d_e x} = \frac{f(ex + ne) - f(ex)}{ex - x}, \tag{20}$$

y el término $f(ex)$ se denomina como la *corriente funcional.*

# 4 *e*- Series.

## 4.1 Definición 4. $q - e$ Series Infinitas

A partir de los axiomas (6) y (7), las *e-series infinitas* se definen como

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i \sum_{j=-\infty}^{-1} e_j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-1} q_{ij} e_j e_i = f(e), \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i \sum_{j=-\infty}^{-1} x_j - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-1} q_{ij} x_j e_i = p(e, x). \tag{22}$$

También se pueden formular realizando un cambio sobre los índices $i$ e $j$, usando $m = i - 1$ y $u = \frac{1}{j+1}$. De manera que si $i = 1$, entonces $m = 0$, si $i = \infty$, entonces $m = \infty$, si $j = -\infty$, entonces $u = 0$ y si $j = -1$, entonces $u = \infty$, obteniendo así

$$\sum_{m,u=0}^{\infty} e_m e_u + \sum_{u,m=0}^{\infty} q_{mu} e_u e_m = f(e), \tag{23}$$

$$\sum_{m,u=0}^{\infty} e_m x_u - \sum_{m,u=0}^{\infty} q_{mu} x_u e_m = p(e, x). \tag{24}$$

El criterio de convergencia se establece a partir del siguiente lema.

## 4.2 Lema 1: Criterio de convergencia de las $q - e$ series

Se dice que $f(e)$ y $p(e, x)$ son convergentes si y solo si

*i.* $\lim_{m \longrightarrow \infty} \lim_{u \longrightarrow \infty} e_m e_u (e_u e_m) = 0,$

*ii.* $\lim_{m \longrightarrow \infty} \lim_{u \longrightarrow \infty} e_m x_u (x_u e_m) = 0,$

en caso contrario que $e_m \longrightarrow \infty$ o $x_u \longrightarrow \infty$ la serie es divergente.

### 4.3 Definición 5. $e$-integral sobre la $q-e$ series de potencias

Sea $f_m(x)$ una sucesión de funciones sobre la variable conductora $x \in (0, \infty)$ y $\alpha$ *el centro* de la $q-e$ serie de potencias. Se dice que la $e-$ integral sobre $f_m(x)$ está definida como la $q-e$ series de potencias con coeficiente $f_m(\alpha)$ centrada en $\alpha$, es decir

$$\int_0^\infty f_m(x) d_e x = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\alpha)(1-q_m)(x-\alpha)^m, \quad q_m = 1-\exp(-mh). \tag{25}$$

*Demostración.* Se define la siguiente integral

$$\int_0^\infty f_m(x) d_e x = \sum_{m=0}^{\infty} d_m, \tag{26}$$

usando la relación de conmutación $e_m x_m - q_m x_m e_m = p_m = d_m(x-\alpha)^{-m+1}$ y asignando $e_m = f_m(\alpha)$ y $x_m = (x-\alpha)$, se determina el coeficiente $d_m$

$$\begin{aligned}
e_m x_m - q_m x_m e_m &= d_m(x-\alpha)^{-m+1}, \\
f_m(\alpha)(x-\alpha) - q_m(x-\alpha) f_m(\alpha) &= d_m(x-\alpha)(x-\alpha)^{-m}, \\
f_m(\alpha) - q_m f_m(\alpha) &= d_m(x-\alpha)^{-m}, \\
d_m &= f_m(\alpha)(1-q_m)(x-\alpha)^m,
\end{aligned}$$

luego al sustituir en (26) se tiene finalmente que

$$\int_0^\infty f_m(x) d_e x = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\alpha)(1-q_m)(x-\alpha)^m.$$

De lo anterior se puede decir que para que las $q-e$ series de potencias converjan, estas debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $f_m(\alpha)$ sea convergente.
2. $\int_0^\infty f_m(x) d_e x$ sea convergente.

□

**Proposición 2.**

La expansión en series para $f(ex+ne)-f(ex)$ se puede expresar como

$$f(ex+ne)-f(ex)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!}(f_{m+1}(x))^{m+1}, \tag{27}$$

con $m\in\mathbb{N}$.

*Demostración.* Sea $f(ex+ne)-f(ex)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+1}x_0^{m+1}$. La serie es convergente si sobre $a_{m+1}$ satisface las siguientes condiciones

1. que sea convergente,
2. que esté relacionada con el parámetro $n$.

De acuerdo con lo anterior, el coeficiente que satisface las condiciones anteriores es $a_{m+1}=\dfrac{n^{m+1}}{(m+1)!}$, y el termino $x_0$ se expresa en terminos de $e, f(x)$, es decir $ef_{m+1}(x)$. □

# 5 $e-$ Integrales.

## 5.1 Hipótesis

Sea una función $f(x)$ definida sobre un camino o trayectoria cerrada $\Gamma(x)$. Por lo tanto la $e-integral$ sobre $\Gamma(x)$ se define como

$$\oint_{\Gamma(x)} f(x)d_ex=\begin{cases}0 \quad \text{si} \quad e \quad \text{esta por fuera y por dentro de} \quad \Gamma(x)\\ \neq 0 \quad \text{si} \quad e\text{está sobre} \quad \Gamma(x).\end{cases} \tag{28}$$

En el caso de ser distinta de cero, se definen a continuación las $e-integrales$.

**Teorema 5.1.** Sea $f(x)$ una función conductora descrita sobre una trayectoria cerrada $\Gamma(x)$. Las $e-$ *integrales* de primera y segunda clase se expresan como

$$\oint_{\Gamma(x)} \frac{f(x)}{ex - x} d_e x = \frac{f(e)}{ne}, \tag{29}$$

$$\oint_{\Gamma(x)} f(x) D_e x = \frac{f(e)}{en + \dfrac{e^2 n^2}{2}}. \tag{30}$$

*Demostración.* Sustituyendo (20) en (27) se obtiene

$$\frac{d_e f}{d_e x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1} n^{m+1} [f_{m+1}(x)]^{m+1}}{(m+1)!(ex - x)},$$

e integrando en ambos lados sobre $\Gamma(x)$ se consigue que

$$f(e) = \oint_{\Gamma(x)} d_e f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1} n^{m+1}}{(m+1)!} \oint_{\Gamma(x)} \frac{[f_{m+1}(x)]^{m+1} d_e x}{ex - x}.$$

Para calcular la integral sobre $\Gamma(x)$, se toma la primera contribución de la expansión ($m = 0$) y se cambia $f_1(x)$ por $f(x)$ obteniendo

$$\frac{f(e)}{en} = \oint_{\Gamma(x)} \frac{f(x) d_e x}{ex - x}.$$

En el caso de la $e-$ *integral* de segunda clase se propone el factor $[f_{m+1}(x)]^{m+1} = \dfrac{(f_m(x))^{m+1}(ex - x)}{f(ex) - f(x)}$, y al igual como en el caso anterior, la $e-$ integral sobre $\Gamma(x)$ de $f(x)$ es $f(e)$. Por lo tanto

$$f(e) = \oint_{\Gamma(x)} d_e f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1} n^{m+1}}{(m+1)!} \oint_{\Gamma(x)} \frac{[f_{m+1}(x)]^{m+1} d_e x}{f(ex) - f(x)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!} \oint_{\Gamma(x)} \frac{(f_m(x))^{m+1}(ex-x)d_e x}{(ex-x)f(ex)-f(x)}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!} \oint_{\Gamma(x)} \frac{(f_m(x))^{m+1}d_e x}{f(ex)-f(x)},$$

el diferencial $\dfrac{d_e x}{f(ex)-f(x)}$ se denomina como *el diferencial de corriente funcional* y se denota por $D_e x$. Por consiguiente, al hacer la expansión sobre las dos primeras contribuciones se obtiene

$$f(e) = en \oint_{\Gamma(x)} f_0(x) D_e x + \frac{e^2 n^2}{2} \oint_{\Gamma(x)} (f_1(x))^2 D_e x,$$

y sustituyendo $f_0(x)$ por $f(x)$ y $f_1(x)$ por $\sqrt{f(x)}$, resulta finalmente que

$$\frac{f(e)}{en + \dfrac{e^2 n^2}{2}} = \oint_{\Gamma(x)} f(x) D_e x.$$

□

**Teorema 5.2.** Las $e-$ integral impropia está definida como

$$\frac{(e-1)f(e)}{en} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{ex-x} d_e x. \tag{31}$$

*Demostración.* Considérese un hilo conductor infinito y una sección de ese hilo de longitud $\Delta x_k$. Multiplicando ambos lados de (27) por $\Delta x_k$ para $x = x_k$, resulta

$$[f(ex_k+ne) - f(ex_k)]\Delta x_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!} [f_{m+1}(x_k)]^{m+1} \Delta x_k, \tag{32}$$

de acuerdo con la ecuación (20), el factor $f(ex_k+ne) - f(ex_k)$ se puede expresar como $(e-1)x_k \dfrac{d_e f}{d_e x_k}$, y que al sumar todas las secciones infinitas del hilo se obtiene

$$(e-1)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{d_e f}{d_e x_k}\Delta x_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!x_k}[f_{m+1}(x_k)]\Delta x_k, \tag{33}$$

como $\dfrac{d_e f}{d_e x_k}\Delta x_k=\Delta f(x_k)$ y tomando el límite cuando $\Delta x_k\longrightarrow\infty$, se obtiene

$$(e-1)\int_{-\infty}^{\infty}d_e f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[f_{m+1}(x)]^{m+1}}{x}d_e x. \tag{34}$$

De acuerdo con lo anterior, la primera integral sobre todo el hilo conductor es $f(e)$; Tomando la primera contribución de (34) y sustituyendo $f_1(x)$ por $\dfrac{f(x)}{e-1}$, se tiene finalmente que

$$\frac{(e-1)f(e)}{ne}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{ex-x}d_e x.$$

□

**Lema 2**

Si la trayectoria cerrada $\Gamma(x)$ es el hilo infinito conductor, entonces

$$\oint_{\Gamma(x)}f(x)d_e x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)d_e x. \tag{35}$$

**Teorema 5.3.** La $e-$ integral impropia de segunda clase está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)D_e x=\frac{f(e)}{en+\dfrac{e^2n^2}{2}}. \tag{36}$$

*Demostración.* A partir de (34) y definiendo $[f_{m+1}(x)]^{m+1}$ como $\dfrac{x(e-1)[f_m(x)]^{m+1}}{f(ex)-f(x)}$, y haciendo el mismo procedimiento de la demostración del teorema anterior, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_e f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_m(x)]^{m+1}}{f(ex)-f(x)} d_e x$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} d_e f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [f_m(x)]^{m+1} D_e x.$$

Tomando en cuenta que la integral sobre el hilo infinito es $f(e)$, se realiza sobre (34) una expansión a segundo orden, resultando

$$f(e) = en \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) D_e x + \frac{e^2n^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x)]^2 D_e x, \tag{37}$$

y asignando

$$f_0(x) = f(x), \tag{38}$$
$$f_1(x) = \sqrt{f(x)}, \tag{39}$$

finalmente resulta

$$\frac{f(e)}{en + \dfrac{e^2n^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_e x. \tag{40}$$

Por otro lado, al comparar (30) con (40) se observa que son equivalentes satisfaciendo así el lema 2. □

**Teorema 5.4.** Sea $f_m(x)$ una sucesión de funciones en la variable conductora $x$ definida en el intervalo $(0, +\infty)$ y $\alpha$ un punto contenido dentro del intervalo . Se dice que $f_m(x)$ es convergente si y solo si la integral

$$\int_0^{\infty} f_m(x) d_e x = \frac{(\alpha-1)^2 f_m(\alpha)}{n}, \tag{41}$$

es convergente.

*Demostración.* En (31) se cambia $\dfrac{f(x)}{ex-x}$ por $f_m(x)$ obteniendo

$$\int_0^\infty f_m(x)d_e x = \frac{(e-1)^2 f_m(e)}{n},$$

y sustituyendo $e$ por $\alpha$ se tiene que

$$\int_0^\infty f_m(x)d_e x = \frac{(\alpha-1)^2 f_m(\alpha)}{n}.$$

De este resultado se puede inferir que si $f_m(\alpha)$ es convergente, entonces su integral también lo es. Queda así demostrado el segundo criterio de convergencia de la definición 5. □

## 6 $q-e^-$ Cálculo.

**Teorema 6.1.** La $q-e$ derivada está definida por

$$\frac{d_{q-e}f}{d_{q-e}x} = \frac{f(qxe+ne)-f(qex)}{x(qe-1)} \tag{42}$$

*Demostración.* Primero se hace $p=0$ en (7), segundo se cambia $e_i$ por $e$ y $x_j$ por $x$ de manera que $ex = qxe$, y finalmente se sustituye en (20). □

**Teorema 6.2.** Las $q-e$ integrales se definen como

$$\oint_{\Gamma(x)} \frac{f(x)d_{e,q}x}{qxe-x} = \frac{[1]!_q f(e)}{en}, \tag{43}$$

$$\oint_{\Gamma(x)} f(x)D_{e,q}x = \frac{f(e)}{\dfrac{en}{[1]!_q}+\dfrac{e^2n^2}{[2]!_q}}, \tag{44}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)d_{e,q}x}{qxe-x} = \frac{(qe-1)[1]!_q f(e)}{en}. \tag{45}$$

*Demostración.* En el caso de la integral (43) se toma como punto de partida la proposición para la siguiente $q - e$ serie

$$f(e) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{m+1} n^{m+1}}{[m+1]!_q} \oint_{\Gamma(x)} \frac{[f_{m+1}(x)]_m d_{e,q} x}{(qxe - x)}, \tag{46}$$

para $m = 0$

$$f(e) = \frac{en}{[1]!_q} \oint_{\Gamma(x)} \frac{f_0(x) d_{e,q} x}{(qxe - x)}, \tag{47}$$

sustituyendo $f_0(x)$ por $f(x)$ en (47), resulta

$$f(e) = \frac{en}{[1]!_q} \oint_{\Gamma(x)} \frac{f(x) d_{e,q} x}{(qxe - x)},$$

o también

$$\frac{[1]!_q f(e)}{en} = \oint_{\Gamma(x)} \frac{f(x) d_{e,q} x}{(qxe - x)}.$$

En (44) se hace una expansión en (46) hasta segundo orden, obteniendo

$$f(e) = \frac{en}{[1]!_q} \oint_{\Gamma(x)} f_1(x) D_{e,q} x + \frac{e^2 n^2}{[2]!_q} \oint_{\Gamma(x)} (f_2(x))^2 D_{e,q} x, \tag{48}$$

siendo $D_{q,e} x = \dfrac{d_{e,q} x}{f(qxe) - f(x)}$ el *q-diferencial de corriente funcional*, y realizando en (48) las sustituciones $f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = \sqrt{f(x)}$ para obtener

$$\oint_{\Gamma(x)} f(x) D_{e,q} x = \frac{f(e)}{\dfrac{en}{[1]!_q} + \dfrac{e^2 n^2}{[2]!_q}}.$$

Para demostrar (45) se usa una $q - e$ serie análoga a (34) a primer orden, resultando

$$(qe-1)f(e)=\frac{en}{[1]!q}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(x)d_{e,q}x}{x}, \tag{49}$$

luego, cambiando $f_1(x)$ por $\dfrac{f(x)}{(e-1)}$ en (49) se obtiene

$$(qe-1)f(e)=\frac{en}{[1]!q}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)d_{e,q}x}{x(e-1)}, \tag{50}$$

o también

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)d_{e,q}x}{qxe-x}=\frac{[1]!_q(qe-1)f(e)}{en}.$$

□

**Teorema 6.3.** La $e-$ integral sobre el camino cerrado $\Gamma(x)$ de las $q-e$ series de potencias centrada en $\alpha$ está dada por

$$\oint_{\Gamma(x)}\psi_m(x)D_ex=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_m(\alpha)(1-q_m)}{\psi_m(e\alpha)-\psi_m(\alpha)}(x-\alpha)^m \qquad \psi_m(e\alpha)\neq\psi_m(\alpha). \tag{51}$$

*Demostración.* Se propone una función auxiliar $f_n(x)=\dfrac{\psi_m(x)}{\psi_m(ex)-\psi_m(x)}$, y aplicando (25) se tiene que

$$\int_0^{\infty}\frac{\psi_m(x)d_ex}{\psi_m(ex)-\psi_m(x)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_m(\alpha)(1-q_m)}{\psi_m(e\alpha)-\psi_m(\alpha)}(x-\alpha)^m,$$

y por otro lado, partiendo de lo mencionado en el teorema 2, se define el diferencial de corriente funcional como $D_ex=\dfrac{d_ex}{\psi_m(ex)-\psi_m(x)}$, resultando

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)D_ex=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_m(\alpha)(1-q_m)}{\psi_m(e\alpha)-\psi_m(\alpha)}(x-\alpha)^m,$$

en virtud del lema 2 finalmente se obtiene que

$$\oint_{\Gamma(x)} \psi_m(x) D_e x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(\alpha)(1-q_m)}{\psi_m(e\alpha)-\psi_m(\alpha)}(x-\alpha)^m.$$

Respecto al criterio de convergencia, se puede decir que la serie de potencias es convergente si $\psi_m(\alpha) < \psi_m(e\alpha) - \psi_m(\alpha)$. Es decir que $\lim_{m\longrightarrow\infty} \psi_m(\alpha) = 0$. □

## 6.1 $q-e$ álgebra de Heisenberg

El álgebra deformada de Heisenberg se menciona en los trabajos de Reyes y Jaramillo (Reyes - Jaramillo 2018, [10]) y Silvestrov - Helstrom (Silvestrov 2000, [8]). La $q-e$ álgebra de Heisenberg, $(\mathcal{H}(x_i, x_j) \oplus \mathcal{E}(e_i, e_j))$ está definida por los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned} e_i x_j - q_{0ij} x_j e_i &= p_{0ij}, && (52)\\ e_j x_i - q_{0ij}^{\dagger} x_i e_j &= p_{0ij}^{\dagger}, && (53)\\ e_i(e_i)^{\dagger} &= \frac{pe_{ij}}{1+q_{ij}}, && (54) \end{aligned}$$

siendo $q_{0ij} = \dfrac{q_{ij}+q}{2}, \quad p_{0ij} = \dfrac{pe_{ij}+1}{2}$ y $p \in \mathbb{C}$.

*Demostración.* Para demostrar (52) se define el siguiente sistema de ecuaciones partiendo de los axiomas (6-8),y expresando los generadores del álgebra de Heisenberg como $e_i, x_j$:

$$\begin{aligned} e_i x_j - q_{ij} x_j e_i &= pe_{ij}, && (55)\\ e_i x_j - q x_j e_i &= 1, && (56) \end{aligned}$$

sumando ambas expresiones resulta

$$e_i x_j - \left(\frac{q_{ij}+q}{2}\right) x_j e_i = \frac{pe_{ij}+1}{2}, \qquad (57)$$

o también $e_i x_j - q_{0ij} x_j e_i = p_{0ij}$. Ahora, para demostrar (53) se toma el complejo conjugado de $e_i x_j - q_{0ij} x_j e_i = p_{0ij}$ y se utiliza el axioma (3), obteniendo

$$\begin{aligned}(e_i x_j - q_{0ij} x_j e_i)^\dagger &= p_{0ij}^\dagger,\\ e_i^\dagger x_j^\dagger - q_{0ij}^\dagger x_j^\dagger e_i^\dagger &= p_{0ij}^\dagger,\\ e_j x_i - q_{0ij}^\dagger x_i e_j &= p_{0ij}^\dagger.\end{aligned}$$

Finalmente , para demostrar (54) se toma como punto de partida la relación cuántica de Heisenberg $x_i x_j - x_j x_i = 0$ del trabajo de Zharinov ([15], 1999) y de (52):

$$\begin{aligned}x_i x_j - x_j x_i &= 0,\\ e_i e_j + q_{ij} e_j e_i &= p e_{ij},\end{aligned}$$

e intercambiando $x_i, x_j$ por $e_i, e_j$, la relación cuántica queda expresada como $e_i e_j = e_j e_i$, y que al remplazar en (52) resulta

$$\begin{aligned}e_i e_j + q_{ij} e_i e_j &= p e_{ij},\\ e_i e_j (1 + q_{ij}) &= p e_{ij},\end{aligned}$$

y luego aplicando (3) finalmente se obtiene

$$e_i e_i^\dagger (1 + q_{ij}) = p e_{ij},$$

o $e_i e_i^\dagger = \dfrac{p e_{ij}}{1 + q_{ij}}$. □

## 7 Discusión y Aplicaciones

En la sección 2, se define el $e-$ álgebra tomando como punto de partida la naturaleza de las cargas y asignando los índices $i, j$ con el fin de distinguir la atracción y la repulsión. Desde el punto de vista de la electrostática, se dice que las cantidades $e_i, e_j, i < 0, j > 0$ son las variables asociadas a las cargas elementales de las partículas. La repulsión entre ellas es descrita si el producto $e_i e_i = e_j e_j = 0$, tal y como se observa en el axioma (2). Por otro lado, el signo negativo del axioma (1) , es debida a la tercera ley de Newton acción y reacción para dos partículas cargadas. En la misma sección se introduce una variable definida como la variable conductora y es denotada por $x$, la cual ejerce una acción sobre $e_i$ como se aprecia en el axioma (4). La motivación del axioma (5) es el hecho la existencia de materiales no conductores, y por tal motivo la acción $e_i x$ es cero. De manera general a las variables $e_i, e_j, x$, se les puede asociar con cualquier variable en $\mathbb{C}$ y de ahí se puede decir que si cualquier conjunto de variables que satisfagan los axiomas (1-5), entonces dichas variables forman una $e - base$. En la misma sección se hace una extensión al caso deformado, formulando la $q - e$ álgebra definida por los axiomas (6-8). En las secciones 3 y 4, se definen la $e-$ derivada y la $e-$ series. Respecto a la $e-$ derivada, esta se formula partiendo del experimento de encendido y apagado un bombillo, tomando en cuenta que la variable $e$ es constante y $x$ es la que cambia. El significado de la $e-$ derivada es basicamente la razón de cambio de la función conductora respecto a la variable conductora como se mencionó anteriormente. En el caso de las $e-$ series mencionadas en la sección 4, estas se desarrollan a partir de los axiomas (6) y (7) de la $q - e$ álgebra, dadas por (23) y (24). Así como se establecieron los criterios de convergencia en las series infinitas ordinarias, de forma análoga se define el criterio de convergencia de las $q - e$ series, mencionada en el lema 1. En esa misma sección se formulan las $q - e$ series de potencias como una $e-$ integral sobre una sucesión de funciones$f_m(x)$ con $x \in (0, +\infty)$. Resaltando la importancia que tiene el centro de cualquier serie de potencias, se propone que las $q-e$ series de potencias son convergentes si $f_m(\alpha)$ es convergente y la integral sobre $f_m(x)$ también es convergente. La forma de determinar si la integral es convergente es a partir del teorema 5 de la siguiente sección. En la sección 5, se definen las $e-$ integrales sobre una trayectoria o curva cerrada asociada a la variable $x$ denotada por $\Gamma(x)$ y las $e-$ integrales impropias a partir de una serie propuesta en la sección 2. A partir de las $e-$ derivadas e integrales se pueden definir las $e-$ funciones especiales, como un análogo al $q-$ cálculo mostrado en el texto de Kac (Kac 2002, [14]). Respecto a las aplicaciones, este formalismo se aplica a los sistemas con conductividad variable, y al formalismo de las ecuaciones de movimiento que tengan una dependencia de la conductividad variable, las cuales se están investigando actualmente. En la literatura existen trabajos sobre la conductividad variable y cuales son sus efectos, tal y como se observa en el trabajo de Rana (Rana 2017,[16]). En la sección (6) se formulan el $q-e$ cálculo y la $q-e$ álgebra de Heisenberg. La $q-e$ álgebra es evidentemente el caso no conmutativo de la $e-$ algebra, y está definida a partir de las relaciones (6-8). Es factible que la $q-e$ álgebra se pueda definir con la $q-$ álgebra de Heisenberg a partir de las relaciones de conmutación que Silvestrov y Helstrom lo mencionan en su trabajo (Silvestrov 2000,[8]). Por otro lado, a partir del conjunto $e_n = \{x, e_i, e_j; i < 0, j > 0\}$, se puede construir el conjunto de los $e-$ polinomios de la forma $\mathbb{C}[e_i^1.e_i^2, .., e_i^m; e_j^1, e_j^2, ..., e_j^m; x^1, x^2, .., x^m]$, la cual genera una $\mathbb{C}-$ *algebra asociativa libre* en $\left\{e_i^1, e_i^2, ...e_i^m; e_j^1, e_j^2, ..., e_j^m; x^1, x^2, ..., x^m\right\}$, que evidentemente genera una base PBW y actualmente se está trabajando sobre sus propiedades y qué otras álgebras pueden generar. El axioma (54) del $q-e$ álgebra de Heisenberg se puede aplicar a los sistemas electrónicos, definiendo el operador *número* del tipo oscilador armónico cuántico, tomando $e_i$ y $e_i^\dagger$ como los análogos de los operadores de creación y destrucción del oscilador armónico cuántico. En el contexto de la mecánica cuántica estandar, este formalismo propone la carga de una partícula como “un nuevo operador”, y no como una propiedad intrínseca en el marco de las partículas elementales.

## 8 Conclusiones

De los axiomas (1-6) de la $e-$ álgebra se puede decir que la motivación física es la física que describe la atracción y repulsión de las cargas eléctricas a partir de la interacción electrostática.

De los axiomas (1-6) de la $e-$ álgebra se puede decir que la motivación es la física que describe la atracción y repulsión de las cargas eléctricas a partir de la interacción electrostática.

Las cargas elementales $e_i$, $e_j$ incluyendo la variable conductora $x$, se definieron como elementos de un espacio abstracto en los complejos denotado por $e_n$ denominado como el $e-$ espacio, formando así una base análoga al espacio vectorial del campo de los números reales

Las $q-e$ series se desarrollaron en base al caso deformado de la $e-$ álgebra y se definió su respectivo criterio de convergencia.

Para que las $e-$integrales sobre las $q-e$ series de potencias esten definidas, fue necesario imponer sobre la variable conductora $x$ el intervalo $(0,+\infty)$.

Las $e-$ integrales de primera y segunda clase se definieron usando una expresión auxiliar definida por (27).

De acuerdo con el lema 5.1, Las $e-$integrales de contorno son equivalentes a las $e-$integrales impropias.

La $q-e$ álgebra de Heisenberg predice que desde el punto de vista físico, la carga eléctrica no será vista como una propiedad de las partículas subatómicas sino como un nuevo operador que por ahora no se ha observado experimentalmente.

Otras aplicaciones que se presentan son la analogía del operador número del oscilador armónico cuántico en términos de las constantes de deformación y los sistemas electrónicos con conductividad variable. Para futuros trabajos, el axioma (54) se puede aplicar a la física estadística cuántica y a la física del estado sólido con conductividad variable.

## Referencias

[1] I. B. Cohen and H. Pemberton, "Pemberton's translation of newton's principia, with notes on motte's translation," *Isis*, vol. 54, no. 3, pp. 319–351, 1963. http://www.jstor.org/stable/228803 24, 25

[2] C. A. Coulomb, *Premier-[troisième] mémoire sur l'electricité et le magnétisme.* Académie Royale des sciences, 1785. 24, 25

[3] W. R. Hamilton, "On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra," *Philosophical magazine*, vol. 25, no. 3, pp. 489–495, 1844. https://www.emis.de/classics/Hamilton/OnQuat.pdf 24

[4] H. Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.* O. Wigand, 1844, vol. 1. 24

[5] F. H. Jackson, "Xi.—on q-functions and a certain difference operator," *Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of*

*Edinburgh*, vol. 46, no. 2, pp. 253–281, 1909. https://doi.org/10.1017/S0080456800002751 24

[6] W. Heisenberg, "Über quantentheoretische umdeutung kinematischer und mechanischer beziehungen," in *Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten*. Springer, 1985, pp. 382–396. https://doi.org/10.1007/BF01328377 24

[7] H. Weyl, "Gruppentheorie und quantenmechanik," no. 46, pp. 1–46, 1928. https://doi.org/10.1007/BF02055756 24

[8] L. Hellstrom and S. Silvestrov, *Commuting elements in q-deformed Heisenberg algebras*. World Scientific, 2000. 24, 39, 42

[9] C. Walton, "An invitation to noncommutative algebra," in *A Celebration of the EDGE Program's Impact on the Mathematics Community and Beyond*. Springer, 2019, pp. 339–366. https://arxiv.org/pdf/1808.03172.pdf 24

[10] A. Reyes and J. Jaramillo, "Symmetry and reversibility properties for quantum algebras and skew poincaré birkhoff-witt extensions," *Ingeniería y Ciencia*, vol. 14, no. 27, pp. 29–52, 2018. https://doi.org/10.17230/ingciencia.14.27.2 24, 39

[11] S. A. Lopes and F. Razavinia, "Quantum generalized heisenberg algebras and their representations," *arXiv preprint arXiv:2004.09301*, 2020. https://arxiv.org/pdf/2004.09301.pdf 24

[12] M. Tuval and A. Yahalom, "Newton's third law in the framework of special relativity," *The European Physical Journal Plus*, vol. 129, no. 11, pp. 1–8, 2014. https://arxiv.org/pdf/1302.2537v1.pdf 25

[13] F. B. Kneubil, "Breaking newton's third law: electromagnetic instances," *European Journal of Physics*, vol. 37, no. 6, p. 065201, 2016. https://doi.org/10.1088/0143-0807/37/6/065201 26

[14] V. Kac, "Ch. pokman," *Quantum Calculus, Springer–Verlag, New York*, 2002. 26, 41

[15] V. V. Zharinov, "On derivations of the heisenberg algebra," *Theoretical and mathematical physics*, vol. 118, no. 2, pp. 129–151, 1999. https://doi.org/10.1007/BF02557307 40

[16] B. J. Rana, R. Ahmed, and S. Ahmmed, "Effects of variable electrical conductivity and thermal conductivity on unsteady mhd free convection flow past an exponential accelerated inclined plate," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1851, no. 1. AIP Publishing LLC, 2017, p. 020058. https://doi.org/10.1063/1.4984687 42