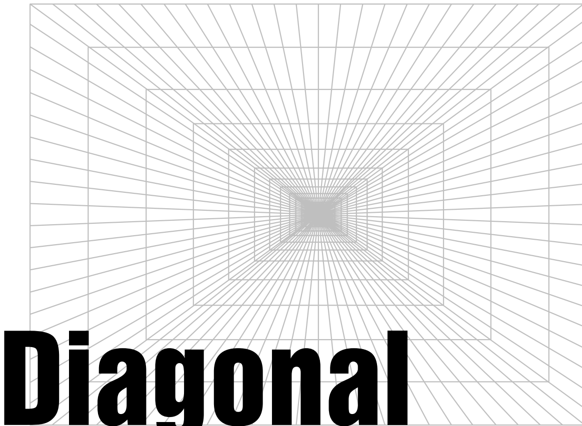


Sistemas de Lógica Diagonal
LD1, LD2, ..., LD42

Manuel Sierra

RESUMEN

Los sistemas de Lógica Diagonal deben restringir la validez de la regla de modus ponens para poder soportar una forma abstracta de la paradoja de Russell. En este trabajo se presenta la construcción de una jerarquía de sistemas de Lógica Diagonal, en la cual diferentes formas de modus ponens son estudiadas.

ANTECEDENTES

Bertrand Russell, al iniciar este siglo, detectó (Kleene, 1974) que la clase $R = \{ x : \neg(x \in x) \}$ no es un conjunto, ya que de serlo se tendría la contradicción lógica: $R \in R \Leftrightarrow \neg(R \in R)$. Este hecho es conocido como la Paradoja de Russell.

Haskell Curry probó (Hindley, 1972) que cualquier teoría de conjuntos que incluya el axioma de construcción irrestricta de conjuntos, $\exists z \forall x(x \in z \Leftrightarrow F(x))$ (donde $F(x)$ es una fórmula en la cual z no ocurre libre para x), es trivial si su lógica de base contiene las reglas de modus ponens: $A, A \Rightarrow B \vdash B$, y contracción: $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash A \Rightarrow B$ (además de las reglas de especificación usuales para los cuantificadores $\forall$, $\exists$ y simplificación para $\Leftrightarrow$). Este hecho es conocido como la Paradoja de Curry. A continuación se presenta la prueba:

1.	$\exists z \forall x(x \in z \Leftrightarrow (x \in x \Rightarrow A))$	Construcción de conjuntos
2.	$\forall x(x \in R \Leftrightarrow (x \in x \Rightarrow A))$	Especificación $\exists$ en 1
3.	$R \in R \Leftrightarrow (R \in R \Rightarrow A)$	Especificación $\forall$ en 2
4.	$R \in R \Rightarrow (R \in R \Rightarrow A)$	Simplificación $\Leftrightarrow$ en 3
5.	$(R \in R \Rightarrow A) \Rightarrow R \in R$	Simplificación $\Leftrightarrow$ en 3
6.	$R \in R \Rightarrow A$	Contracción en 4
7.	$R \in R$	Modus ponens entre 5 y 6
8.	A	Modus ponens entre 6 y 7

La negación puede ser definida por $\neg A = A \Rightarrow 0$, donde 0 es una fórmula tal que $0 \vdash B$ para toda fórmula B (0 representa la falsedad); si en la prueba anterior se hace $A = 0$, entonces el paso 3 sería $R \in R \Leftrightarrow \neg(R \in R)$. Por lo tanto, una teoría de conjuntos que demuestre la paradoja de Russell con una lógica de base que incluya simplificación para $\Leftrightarrow$, modus ponens y contracción es trivial.

Bertrand Russell, al iniciar este siglo, detectó que la clase $R = \{ x : \neg(x \in x) \}$ no es un conjunto, ya que de serlo se tendría la contradicción lógica: $R \in R \Leftrightarrow \neg(R \in R)$. Este hecho es conocido como la Paradoja de Russell.

Georg Cantor probó (Curry, 1977) que $A < P(A)$: existe una función inyectiva pero no una función biyectiva entre un conjunto dado y el conjunto de sus subconjuntos. Puesto que existe una biyección entre $P(A)$ y 2^A (el conjunto de funciones de A en 2, donde 2 es un conjunto con 2 elementos), se tiene un enunciado equivalente: $A < 2^A$. Los enunciados anteriores son conocidos como el Teorema de Cantor.

MANUEL SIERRA A. Magister en Matemáticas. Profesor del Departamento de Humanidades, Universidad EAFIT.
email: msierra@eafit.edu.co

REVISTA Universidad EAFIT | enero.febrero.marzo | 2001

F. W. Lawvere probó [Maclane, 1992] que dados objetos A y B en una categoría cartesiana cerrada, si existe una flecha $g:B \to B$ sin puntos fijos entonces no existe una flecha $f:A \to B^A$ 1-sobre (al interior de una categoría cartesiana cerrada C, con objeto terminal 1, se dice que una flecha $f:A \to B$ de C es 1-sobre si para toda flecha $y:1 \to B$ de C existe una flecha $x:1 \to A$ de C tal que $fx=y$). Ésto en conjuntos dice: si existe una función $g:B \to B$ sin puntos fijos entonces no existe una función $f:A \to B^A$ sobre; para el caso particular $B=2$, se tiene el teorema de Cantor: $A < 2^A$. Este enunciado es conocido como el Teorema de Lawvere.

La Teoría de Combinadores fue inicialmente introducida por M. Schönfinkel en 1920 (Hindley, 1972) y fue redescubierta independientemente por Curry, quien es responsable de la mayor parte de su desarrollo. Una de las ideas centrales en la Teoría de Combinadores es la de estudiar el concepto abstracto de operación como una base para la matemática. En la Teoría de Combinadores se considera un conjunto de símbolos primarios, llamados átomos, entre los cuales se distinguen las variables, denotadas x, y, z,...; y las constantes I, K, S. A partir de los átomos se construye el conjunto de términos así: si X es átomo y Y, Z son términos entonces X y YZ son términos. Se establece una relación transitiva entre términos, denotada ≡, que además se preserva bajo concatenación y es regida por los siguientes 4 axiomas:

$$Ix \equiv x, \quad Kxy \equiv x, \quad Sxyz \equiv xz(yz), \quad x \equiv x.$$

Se omite asociatividad a la izquierda, es decir, abc es (ab)c; las variables que aparecen a continuación de las constantes se llaman argumentos; combinaciones de las constantes dan origen a los combinadores:

$$B = S(KS)K, \quad W = SS(KI), \quad P = WS(BWB).$$

El comportamiento de estos combinadores, respecto a la relación ≡ es:

$$Bxyz \equiv x(yz), \quad Wxy \equiv xyy, \quad Pn \equiv n(Pn).$$

Se tiene entonces un combinador (operador) de punto fijo P: todo operador n de un argumento tiene a Pn como punto fijo.

El Cálculo Secuencial Clásico, es la más bella ilustración de las simetrías de la lógica. Las ideas y un desarrollo muy completo se deben a Gentzen [Gentzen, 1969]. Un secuente es una expresión de la forma $A \vdash B$ donde A y B son sucesiones ordenadas y finitas (posiblemente vacías) de fórmulas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$. La interpretación intuitiva de $A \vdash B$ es que la conjunción de los a_i implica la disyunción de los b_j. En particular: si A es vacío, el secuente asegura la disyunción de los b_j; si B es vacío, el secuente asegura la negación de la conjunción de las a_i; si A y B son vacíos, el secuente asegura una contradicción. El Cálculo Secuencial Clásico está gobernado por 3 reglas estructurales, que son las más importantes del cálculo, ya que sin especificar conectivos, queda determinado buena parte de su comportamiento. Estas reglas son obvias desde el punto de vista denotacional.

La Teoría de Combinadores fue inicialmente introducida por M. Schönfinkel en 1920 y fue redescubierta independientemente por Curry, quien es responsable de la mayor parte de su desarrollo. Una de las ideas centrales en la Teoría de Combinadores es el de estudiar el concepto abstracto de operación como una base para la matemática.

Las reglas de intercambio, expresan de alguna manera la conmutatividad de la lógica.

$$\frac{A, a, b, B \vdash C}{A, b, a, B \vdash C} \quad y \quad \frac{C \vdash A, a, b, B}{C \vdash A, b, a, B}.$$

Las reglas de debilitamiento, expresan la suficiencia de deducciones con premisas adicionales o conclusiones debilitadas.

$$\frac{A, B \vdash C}{A, c, B \vdash C} \quad y \quad \frac{C \vdash A, B}{C \vdash A, c, B}.$$

Las reglas de contracción, expresan la idempotencia de la conjunción y de la disyunción.

$$\frac{A, c, c, B \vdash C}{A, c, B \vdash C} \quad y \quad \frac{C \vdash A, c, c, B}{C \vdash A, c, B}.$$

El Cálculo Secuencial Clásico que es simétrico y no constructivo puede ser alterado de dos maneras: restringiendo los secuentes o restringiendo las reglas. Cuando los secuentes son de la forma $A \vdash a$ ó $A \vdash$ con a fórmula, se obtiene la lógica intuicionista de Brouwer (Dummett, 1969); el cálculo resultante es asimétrico, pero con la particularidad de que es constructivo, es decir, existe

una correspondencia entre pruebas y algoritmos. Cuando se omiten las reglas de contracción y de debilitamiento y sólo se conserva la regla de permutación, se tiene la Lógica Lineal de J. Girard (Girard, 1989); desde el punto de vista de la teoría de la prueba, la lógica lineal introduce una nueva clase de invariantes llamadas pruebas netas.

El Cálculo Secuencial Clásico, es la más bella ilustración de las simetrías de la lógica. Las ideas y un desarrollo muy completo se deben a Gentzen.

PRIMEROS SISTEMAS[1]

Con lo anterior, se tienen conexiones entre lógica, teoría de categorías, teoría de combinadores, la paradoja de Russell, la regla de contracción, la regla de modus ponens y el axioma de construcción irrestricta de conjuntos.

Se trabaja en una pre-categoría (para ser categoría solo falta la asociatividad de la composición de flechas), llamada pre-categoría de tipos, al interior de la cual se estudian las conexiones establecidas anteriormente. El estudio da origen en 1996 a dos lógicas, una de ellas extensión de la otra, en las cuales se codifica únicamente la regla estructural de contracción; esas lógicas serán llamadas, lógicas diagonales 1 y 2 (LD1 y LD2).

1 Los sistemas de Lógica Diagonal fueron presentados por primera vez en los siguientes trabajos: LD1 y LD2 en (Sierra, 1996) LD3 a LD5 en (Sierra, 1998), LD11 a LD18 en (Sierra, 1999a), LD19 a LD26 en (Sierra, 1999b), LD28R y LD30R en (Sierra, 2000). Todos los otros sistemas son presentados en este trabajo por primera vez.

Sistema LD1

El alfabeto, consta de un conjunto no vacío P de símbolos primarios, un par de símbolos de puntuación, a saber, paréntesis izquierdo y derecho, y un par de conectivos binarios, representados por . y ≡ (concatenación diagonal y equivalencia diagonal). El conjunto de fórmulas, es generado recursivamente a partir de los símbolos primarios utilizando los conectivos diagonales. La lógica diagonal LD1 consta de los siguientes 3 axiomas (notación: $AB = A{\cdot}B$, $ABC = (AB)C$):

A1·: $A(AB) \equiv AB$

A2·: $ABC \equiv A(BC)$

A3·: $A(ABC) \equiv ABC$

donde las letras mayúsculas son fórmulas generadas por concatenación, omitimos los paréntesis para indicar asociatividad a la izquierda. Los axiomas pretenden codificar una relación ≡ entre las flechas de las pre-categorías de tipos, intuitivamente la concatenación principal de las fórmulas puede leerse como una flecha en dichas categorías, en lo que sigue, algunas veces escribiremos la flecha:

A1·: $A \to AB \equiv A \to B$

A2·: $AB \to C \equiv A \to BC$

A3·: $A \to ABC \equiv AB \to C$

La lógica diagonal LD1 utiliza 3 reglas de inferencia para generar teoremas diagonales:

Tran: $A \to B \,,\, B \to C \vdash A \to C$

$A \equiv B \,,\, B \equiv C \vdash A \equiv C$

Simet: $A \equiv B \vdash B \equiv A$

Mp: $A \equiv B \,,\, A \vdash B$

Las reglas pretenden codificar la composición en las categorías y preservación de la relación ≡, el carácter de parcial relación de equivalencia para ≡ y la preservación de la verdad por ≡.

Son derivadas reglas de modus ponens restringidas para la concatenación diagonal; desde el punto de vista categórico permite la obtención de ¨buenas¨ flechas.

Mp1·: $AB, AB \to AC \vdash AC$

Mp2·: $AC, AC \to ABD \vdash ABD$

La regla de contracción es codificada de diferentes formas:

Sean F(a), G(a) y H(a) fórmulas construidas a partir solo del símbolo primario a por concatenación, sean B y C fórmulas arbitrarias.

$$F(a) \to B \equiv a \to B$$

$$a \to F(a) \equiv a \to a$$

$$F(a) \to G(a) \equiv a \to a$$

Se traducen las fórmulas diagonales en el cálculo proposicional clásico, interpretando la conjunción diagonal como conjunción clásica, la equivalencia diagonal como equivalencia clásica y los símbolos primarios como variables proposicionales. Las traducciones de los axiomas son teoremas en el cálculo proposicional clásico, la traducción de las reglas de inferencia produce reglas clásicas que preservan validez, de lo anterior se infiere que la traducción de teoremas diagonales produce teoremas clásicos, es decir: si la traducción de una fórmula diagonal no es un teorema clásico entonces dicha fórmula no es un teorema diagonal; como los símbolos primarios satisfacen esto, tenemos que LD1 no demuestra todas sus fórmulas, y por lo tanto, es consistente.

La regla de sustitución por equivalencia dice: si A≡B entonces F(A)≡F(B), donde F(A) es una fórmula en la que aparece A y F(B) es F(A) donde al menos una ocurrencia de A ha sido sustituida por B, la regla de sustitución por equivalencia no es válida en LD1.

También se tiene que los axiomas son independientes entre si, LD1 no valida la regla de debilitamiento, ni la regla de intercambio

Una categoría tiene contracción si tiene productos finitos y para todo objeto a, se verifica el axioma de contracción axa ≅ a, donde ≅ significa isomorfismo de objetos; se tienen ejemplos de estas categorías: (i) un semiretículo inferior visto como categoría (los productos son los ínfimos); (ii) la categoría de los conjuntos infinitos y su esqueleto: la categoría de los cardinales infinitos (los productos son los productos cartesianos); (iii) el monoide de los elementos idempotentes de cualquier semigrupo inverso, visto como categoría (los productos son los productos en el monoide).

Se hace la siguiente lectura de LD1 en una categoría con contracción: los símbolos primarios como objetos, la concatenación como producto, la equivalencia como isomorfismo, las reglas de inferencia como ´si existe una construcción de las premisas entonces existe una construcción de las conclusiones´. Las lecturas de los axiomas son teoremas en las categorías con contracción, las lecturas de las reglas de inferencia son válidas en las categorías con contracción, tenemos entonces que la lectura de todo teorema diagonal es teorema en las categorías con contracción, es decir, las categorías con contracción son modelos de LD1.

Sistema LD2

El conjunto de fórmulas, es generado recursivamente a partir de los símbolos primarios utilizando los conectivos diagonales ·, ➔, -, ≡. La lógica diagonal LD2 consta de los siguientes axiomas:

A1: A➔A-B ≡ A➔B

A2: AB➔C ≡ A➔B-C

A3: A➔AB-C ≡ AB➔C

donde las letras mayúsculas son fórmulas generadas por · y -, se omiten los paréntesis para indicar asociatividad a la izquierda, se omite ·, ≡ será el conectivo principal seguido por ➔.

LD2 utiliza las siguientes reglas de inferencia:

Tran➔: A➔B , B➔C ⊦ A➔C

Tran≡: A➔B ≡ C➔D, C➔D ≡ E➔F ⊦ A➔B ≡ E➔F

Simet≡: A➔A´≡ B➔B´ ⊦ B➔B´ ≡ A➔A´

Mp≡: A➔A´≡ B➔B´, A➔A´ ⊦ B➔B´

Red·: AB ⊦ A. AB ⊦ B

Imp·: A-B➔C ⊦ AB➔C

Imp➔: AB➔C- (A-B) ⊦ A-B➔C-(A-B)

Mp1·: A➔B, AB➔A-C ⊦ A➔C

Mp2·: A➔C, AC➔AB-D ⊦ AB➔D

LD2 puede reducirse a LD1 (extendida con la regla de reducción) si se interpretan - y ➔ como · . por lo tanto:

LD2 es consistente, la regla de sustitución por equivalencia no es válida en LD2 y los axiomas son independientes.

Las categorías con contracción y exponenciales existen, por ejemplo, la categoría de conjuntos infinitos con el producto cartesiano y la exponencial conjuntista (Goldblatt, 1979). Se representan con C(a➔b) el conjunto de flechas de a en b, con a-b la exponencial b^a y con A~B se indica que existe una biyección entre los conjuntos A y B. Se hace la siguiente lectura de la lógica diagonal LD2 en una categoría con contracción y exponenciales: los símbolos primarios como objetos, la concatenación como producto, la adjunción como exponencial (las anteriores son lecturas en la categoría), la implicación entre dos fórmulas como el conjunto de flechas entre las lecturas de las fórmulas, la equivalencia entre dos fórmulas como una biyección entre las lecturas de las fórmulas, la regla de inferencia A ⊦ B como ∃sA ⊦ ∃sB donde: ∃c significa: c puede ser construido en la categoría, cuando c es un objeto; ∃x significa: existe un elemento de x, cuando x es un conjunto, ∃a~b significa: existe una biyección entre a y b, cuando a y b son conjuntos. Las lecturas de los axiomas y reglas de inferencia de LD2 son teoremas y reglas de prueba válidas en las categorías con contracción y exponenciales, se concluye que las categorías con contracción y exponenciales son modelos de LD2.

PRIMEROS SISTEMAS ➔ CONSISTENTES

Se puede observar en particular, que en una teoría T que tiene una lógica de base en la cual son válidas la regla de Modus Ponens, la regla de contracción y la regla de simplificación, si en T vale el esquema E2. A→B ↔ (A→B)→B para algún A, entonces T es inconsistente. En la lógica clásica, cuando A es R∈R y B es la falsedad, E2 es la paradoja de Russell R∈R ↔ ¬R∈R.

Prueba:

1. (A→B) ↔ ((A→B)→B)	E2 con B arbitrario
2. (A→B) → ((A→B)→B)	Simplificación en 1
3. ((A→B)→B) → (A→B)	Simplificación en 1
4. (A→B)→B	Contracción en 2
5. A→B	Modus Ponens entre 3 y 4
6. B	Modus Ponens entre 4 y 5

Las Lógicas Diagonales LD1 y LD2, codifican la regla de contracción y soportan la codificación de E2 sin perder la consistencia. Los teoremas más elementales que genera el sistema LD2 son de la forma A➔B, por lo que la ➔consistencia (existencia de al menos una fórmula A➔B que no es teorema) es el tipo de consistencia que debe considerarse.

El sistema LD2.1 se obtiene al extender LD2 con el axioma A4: A➔B ≡ A-B➔B (este axioma está codificando en forma abstracta la paradoja de Russell), el sistema LD2.2 se obtiene al extender LD2.1 con la regla Simp≡: A➔B ≡ C➔D ⊦ A-B ➔ C-D, es decir,

LD2.1 = LD2 + A4
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Red·, Imp·, Imp➔, Mp≡, Mp1·, Mp2·.

LD2.2 = LD2.1 + Simp≡
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Red·, Imp·, Imp➔, Mp≡, Mp1·, Mp2·.

LD2.3 = LD2 + Simp≡
= A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Red·, Imp·, Imp➔, Mp≡, Mp1·, Mp2·.

LD2.4 = LD2 - Mp≡
= A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Red·, Imp·, Imp➔, Mp1·, Mp2·.

LD2.5 = LD2 - Imp➔.
A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Red·, Imp·, Mp≡, Mp1·, Mp2·.

Se traducen las fórmulas de LD2 en el cálculo proposicional clásico, interpretando · como ∧, ≡ como ↔, ➔ y - como → (esta traducción es llamada en lo que sigue Interpretación Natural)[2]. Las traducciones de los axiomas son teoremas en el cálculo proposicional clásico, la traducción de las reglas de inferencia produce reglas clásicas que preservan validez. De lo anterior se infiere que la traducción de teoremas de LD2 produce teoremas clásicos, como en general la traducción de A➔B no es un teorema clásico, tenemos que LD2 no demuestra todas las fórmulas de la forma A➔B y por lo tanto, LD2 es ➔consistente.

2 **INTERPRETACION NATURAL**
Sean A y B fórmulas arbitrarias, *a* una fórmula atómica, $a^* = a$

$(A \cdot B)^* = A^* \wedge B^*$
$(A \equiv B)^* = A^* \leftrightarrow B^*$
$(A ➔ B)^* = A^* \longrightarrow B^*$
$(A - B)^* = A^* \longrightarrow B^*$
$(A \vdash B)^* = A^* \vdash_{cls} B^*$

Se obtiene la siguiente interpretación de los axiomas y reglas de inferencia: (se escribe A, B, C, D en vez de A*, B*, C*, D* y ⊦ en vez de $\vdash_{cls}$)

(A1)*: (A→B) ↔ (A→(A→B))
(A1a)*: (A→B) → (A→(A→B))
(A1b)*: (A→(A→B)) → (A→B)
(A2)*: ((A∧B)→C) ↔ (A→(B→C))
(A2a)*: (A→ (B→C)) → ((A∧B)→C)
(A2b)*: ((A∧B)→C) → (A→ (B→C))
(A3)*: (A→((A∧B)→C)) ↔ ((A∧B)→C)
(A3a)*: (A→((A∧B)→C))→((A∧B)→C)
(A3b)*: ((A∧B)→C) → (A→((A∧B)→C))
(A4)* : (A→B) ↔ ((A→B)→B)
(A4a)*: (A→B) → ((A→B)→B)
(A4b)*: ((A→B)→B) → (A→B)
(Tran≡)*: (A→A') ↔ (B→B'), (B→B') ↔ (C→C') ⊦ (A→A') ↔ (C→C')

Puesto que LD2.1 admite la interpretación de ≡ como ↔, de ·, - y ➔ como ∧ en el cálculo proposicional clásico (interpretación que en lo que sigue llamaremos Interpretación en Conjunción)[3], tenemos que la traducción de A➔B no es un teorema clásico, y así LD2 no demuestra todas las fórmulas de la forma A➔B, por lo tanto, LD2.1 es ➔consistente, además, LD2.3 y LD2.4 son ➔consistentes porque admiten la interpretación natural, pero LD2.2 y LD2.5 son ➔inconsistentes (no son ➔consistentes).

Prueba:

1. A➔B ≡ A-B➔B	A4
2. A-B➔A-B-B	Simp ≡ en 1
3. A-B➔A-B-B ≡ A-B➔B	A1
4. A-B➔B	Mp ≡ entre 2 y 3
5. A-B➔B ≡ A➔B	Simet ≡ en 1
6. A➔B	Mp ≡ entre 4 y 5

Con el fin de evitar este tipo de inconsistencia, se construyen nuevos sistemas debilitando Mp≡, se buscan sistemas ➔consistentes que contengan A4 y Simp≡.

LD3= LD2.3 – Red· - Imp· - Imp➔ - Mp1· - Mp2·
=A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp≡.

LD3.1 = LD3 – Simp≡
=A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Mp≡.

LD3.2 = LD3 – Mp≡ + Mp1➔ + Mp2➔
=A1, A2, A3, Tran≡,Tran➔,Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔,

donde:

Mp1➔: A➔B, A-B➔A-C ⊦ A➔C

Mp2➔: A➔C, A-C➔AB-D ⊦ AB➔D

El sistema LD3.3 se obtiene de LD3.2 cambiando los axiomas por sus consecuencias al utilizar la regla simp≡ y eliminando las reglas simp≡, simet≡ y tran≡:

(Tran➔)*: A→B, B→C ⊦ A→C
(Simet≡)*: (A→B) ↔ (C→D) ⊦ (C→D) ↔ (A→B)
(Simp≡)*: (A→B) ↔ (C→D) ⊦ (A→B) → (C→D)
(Red·)*: A∧B ⊦ A   A∧B ⊦ B
(Imp➔)*: (A∧B) → (C→(A→B)) ⊦ (A→B) → (C→(A→B))
(Imp·)* : (A→B) → C ⊦ (A∧B) → C
(Mp≡)*: (A→B) ↔ (C→D), A→B ⊦ C→D
(Mp➔)*: A→B, (A→B) → (C→D) ⊦ C→D
(Mp1➔)*: A→B, (A→B) → (A→C) ⊦ A→C
(Mp2➔)*: A→C, (A→C) → ((A∧B)→D) ⊦ (A∧B)→D
(Mp3≡)*: A→B, (A→B) ↔ (A→C) ⊦ A→C
(Mp4≡)*: A→C, (A→C) ↔ ((A∧B)→D) ⊦ (A∧B)→D
(Mp1·)*: A→B, (A∧B) → (A→C) ⊦ A→C
(Mp2·)*: A→C, (A∧C) → ((A∧B)→D) ⊦ (A∧B)→D.

3 **INTERPRETACIÓN EN CONJUNCIÓN**
Sean A y B fórmulas arbitrarias, *a* una fórmula atómica, *a** = *a*
(A·B)* = A* ∧ B*
(A≡B)* = A* ↔ B*
(A➔B)* = A* ∧ B*
(A-B)* = A* ∧ B*
(A ⊦ B)* = A* $\vdash_{cls}$ B*
Se obtiene la siguiente interpretación de los axiomas y reglas de inferencia: (se escribe A, B, C, D en vez de A*, B*, C*, D* y ⊦ en vez de $\vdash_{cls}$)

(A1)*: (A∧B) ↔ (A∧ (A∧B))	(A1a)*: (A∧B) ∧ (A∧(A∧B))
(A1b)*: (A∧(A∧B)) ∧ (A∧B)	(A2)*: ((A∧B)∧C) ↔ (A∧(B∧C))
(A2a)*: (A∧(B∧C)) ∧ ((A∧B) ∧C)	(A2b)*: ((A∧B)∧C) ∧ (A∧(B∧C))
(A3)*: (A∧ ((A∧B)∧C)) ↔ ((A∧B)∧C)	(A3a)*: (A∧((A∧B)∧C)) ∧ ((A∧B)∧C)
(A3b)*: ((A∧B)∧C) ∧ (A∧((A∧B)∧C))	(A4)* : (A∧B) ↔ ((A∧B)∧B)
(A4a)*: (A∧B) ∧ ((A∧B)∧B)	(A4b)*: ((A∧B)∧B) ∧ (A∧B)

LD3.3 = LD3.2 – ≡
=A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔,

donde:

A1a: A-(A-B) ➔ A-B

A1B: A-B ➔ A-(A-B)

A2a: AB-C ➔ A-(B-C)

A2b: A-(B-C) ➔ AB-C

A3a: A-(AB-C) ➔ AB-C

A3b: AB-C ➔ A-(AB-C)

LD3.4= LD3.3 – Mp1➔ - Mp2➔ + Mp1· + Mp2· + Imp·
=A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, Tran➔, Mp1·, Mp2·, Imp·.

Se obseva que: LD3, LD3.1, LD3.2, LD3.3 y LD3.4 son ➔consistentes puesto que admiten la interpretación natural, como LD3, LD3.1, LD3.2, LD3.3 y LD3.4 son reducciones de LD2.3, podemos asegurar que en ellos los axiomas son independientes.

Construimos el sistema LD4 agregando el axioma
A4: A➔B ≡ A-B➔B a LD3.

LD4 = LD3 + A4
=A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp≡.

LD4.1= LD4 - Simp≡
=A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Mp≡.

(Tran≡)*: (A∧A') ↔ (B∧B'), (B∧B') ↔ (C∧C') ⊦ (A∧A') ↔ (C∧C')
(Tran➔)*: A∧B, B∧C ⊦ A∧C
(Simet≡)*: (A∧B) ↔ (C∧D) ⊦ (C∧D) ↔ (A∧B)
(Simp≡)*: (A∧B) ↔ (C∧D) ⊦ (A∧B) ∧ (C∧D)
(Red·)*: A∧B ⊦ A   A∧B ⊦ B
(Imp➔)*: (A∧B) ∧ (C∧(A∧B)) ⊦ (A∧B) ∧ (C∧(A∧B))
(Imp·)* : (A∧B) ∧ C ⊦ (A∧B) ∧ C
(Mp≡)*: (A∧B) ↔ (C∧D), A∧B ⊦ C∧D
(Mp➔)*: A∧B, (A∧B) ∧ (C∧D) ⊦ C∧D
(Mp1➔)*: A∧B, (A∧B) ∧ (A∧C) ⊦ A∧C
(Mp2➔)*: A∧C, (A∧C) ∧ ((A∧B)∧D) ⊦ (A∧B) ∧ D
(Mp3≡)*: A∧B, (A∧B) ↔ (A∧C) ⊦ A∧C
(Mp4≡)*: A∧C, (A∧C) ↔ ((A∧B) ∧D) ⊦ (A∧B) ∧ D
(Mp1·)*: A∧B, (A∧B) ∧ (A∧C) ⊦ A∧C
(Mp2·)*: A∧C, (A∧C) ∧ ((A∧B)∧D) ⊦ (A∧B) ∧ D.

Se observa que al contrario de LD3 y LD3.1, los sistemas LD4 y LD4.1 no admiten la Interpretación Natural, puesto que la traducción de A4 no es teorema clásico, Se tiene así que A4 es independiente en LD4 y en LD4.1, los sistemas LD3.1 y LD4.1 admiten la Interpretación en Conjunción, al contrario de LD3 y LD4 ya que la traducción de Simp≡ no es una regla clásicamente válida, es decir Simp≡ es independiente en LD3 y en LD4. Por otro lado, la prueba de ➔inconsistencia de LD2.2 vale en LD4, por lo que LD4 es ➔inconsistente, pero LD4.1 es ➔consistente ya que admite la interpretación en conjunción.

Se construye el sistema LD3.0 eliminando Mp≡ de LD3, LD3.0 es el sistema base para estudiar las reglas de modus ponens Mp≡, Mp➔, Mp1➔, Mp2➔, Mp1·, Mp2·, Mp3≡ y Mp4≡.

LD3.0 = LD3 – Mp≡·
=A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡.

Mp≡: A➔B, A➔B ≡ C➔D ⊦ C➔D

Mp➔: A➔B, A-B➔C-D ⊦ C➔D

Mp1➔: A➔B, A-B➔A-C ⊦ A➔C

Mp2➔: A➔C, A-C➔AB-D ⊦ AB➔D

Mp3≡: A➔B, A➔B ≡ A➔C ⊦ A➔C

Mp4≡: A➔C, A➔C ≡ AB➔D ⊦ AB➔D

Se obtienen las siguientes conexiones:

Notación: ⊦ R significa que la regla R es derivada en el sistema LD3.0.

⊦ Mp1➔ sii ⊦ Mp3≡,

⊦ Mp3≡ y ⊦ Mp4≡ implican ⊦ Mp2➔

⊦ Mp2➔ implica ⊦ Mp4≡

Se puede concluir que

⊦ Mp1➔ y ⊦ Mp2➔ sii ⊦ Mp3≡ y ⊦ Mp4≡

Como Mp3≡ y Mp4≡ son formas débiles de Mp≡, se tiene

⊦ Mp≡ implica ⊦ Mp1➔ y ⊦ Mp2➔ y ⊦ Mp3≡ y ⊦ Mp4≡

Con base en los resultados anteriores, se busca construir sistemas un poco más débiles que LD4 que sean ➔ consistentes.

Se puede observar que la prueba dada de ➔inconsistencia de LD4 no es válida si se cambia Mp≡ por Mp➔1 y Mp2➔ o por Mp3≡ y Mp4≡. Se conjetura que este debilitamiento de LD4 es ➔consistente. Se continua entonces la construcción de lógicas diagonales a fin de estudiar esta conjetura.

El sistema LD5 se obtiene cambiando en LD4 la regla MP≡ por las reglas Mp1➔ y Mp2➔:

LD5 = LD4 – Mp≡ + Mp1➔ + Mp2➔

= LD3 + A4 – Mp≡ + Mp1➔ + Mp2➔

= LD3.2 + A4

= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔.

LD5.1 = LD5 – Simp≡

= LD4.1 - Mp≡ + Mp1➔ + Mp2➔

= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Mp1➔, Mp2➔.

Puesto que LD5 y LD5.1 son mas débiles que LD4, tenemos que Simp≡ es independiente en LD5 y no es derivada en LD5.1, A4 es independiente en LD5 y en LD5.1 y además, LD5.1 es ➔consistente puesto que admite la interpretación en conjunción.

El sistema LD6 se obtiene de LD5 cambiando los axiomas por sus consecuencias al utilizar la regla simp≡ y eliminando las reglas simp≡, simet≡ y tran≡:

LD6 = LD5 - ≡

= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔,

donde

A4a: A-B ➔ A-B-B

A4b: A-B-B ➔ A-B

LD6 admite la siguiente interpretación: - y · como ∧, ➔ como → en el cálculo proposicional clásico (en lo que sigue llamaremos a esta lectura interpretación en implicación-conjunción)[4], por lo tanto: LD6 es ➔consistente y también tenemos que si LD5 es ➔inconsistente entonces también lo sería LD6, es decir LD5 es ➔consistente.

---

4 **INTERPRETACIÓN EN IMPLICACIÓN CONJUNCIÓN**
Sean A y B fórmulas arbitrarias, *a* una fórmula atómica, *a** = *a*

(A·B)* = A* ∧ B*

(A≡B)* = A* ↔ B*

(A➔B)* = A* → B*

(A-B)* = A* ∧ B*

(A ⊢ B)* = A* $\vdash_{cls}$ B*

Se obtiene la siguiente interpretación de los axiomas y reglas de inferencia: (se escribe A, B, C, D en vez de A*, B*, C*, D* y ⊢ en vez de $\vdash_{cls}$).

(A1)*: (A→B) ↔ (A→(A∧B))

(A1a)*: (A∧B) → (A∧(A∧B))

(A1b)*: (A∧(A∧B)) → (A∧B)

(A2)*: ((A∧B)→C) ↔ (A→(B∧C))

(A2a)*: (A∧(B∧C)) → ((A∧B) ∧C)

(A2b)*: ((A∧B)∧C) → (A∧(B∧C))

(A3)*: (A→((A∧B)∧C)) ↔ ((A∧B)→C)

(A3a)*: (A∧((A∧B)∧C))→((A∧B)∧C)

(A3b)*: ((A∧B)∧C) → (A∧((A∧B)∧C))

(A4)* : (A→B) ↔ ((A∧B)→B)

(A4a)*: (A∧B) → ((A∧B)∧B)

(A4b)*: ((A∧B)∧B) → (A∧B)

(Tran≡)*: (A→A') ↔ (B→B'), (B→B') ↔ (C→C') ⊢ (A→A') ↔ (C→C')

(Tran➔)*: A→B, B→C ⊢ A→C

(Simet≡)*: (A→B) ↔ (C→D) ⊢ (C→D) ↔ (A→B)

(Simp≡)*: (A→B) ↔ (C→D) ⊢ (A∧B) → (C∧D)

(Red·)*: A∧B ⊢ A   A∧B ⊢ B

(Imp➔)*: (A∧B) → (C∧(A∧B)) ⊢ (A∧B) → (C∧(A∧B))

(Imp·)* : (A∧B) → C ⊢ (A∧B) → C

En LD2, LD2.1, LD2.2, LD2.3 y LD2.4 además de la regla Imp· se tienen otras formas del Modus Ponens:

Mp1·: A➔B, AB➔A-C ⊢ A➔C

Mp2·: A➔B, AB➔AC-D ⊢ AC➔D

Imp·: A-B➔C ⊢ AB➔C

Como consecuencia inmediata tenemos que en LD2, LD2.1, LD2.2, LD2.3 y LD2.4 las reglas Mp1➔, Mp2➔, Mp3≡ y Mp4≡ son derivadas.

Con base en lo anterior, se construye el sistema LD7, eliminando Mp≡ e Imp➔ de LD2 y agregando A4 y Simp≡, es decir, cambiando en LD5 MP1➔ por Mp1· y MP2➔ por Mp2· y agregando las reglas Red· e Imp·:

LD7 = LD5 – Mp1➔- Mp2➔ + Mp1· + Mp2· + Red· + Imp·

= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·.

LD7.1 = LD7 – A4

= A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·.

LD7.2 = LD7 - Simp≡

= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·.

Se tiene que: LD7.1 es ➔consistente ya que admite la interpretación natural, LD7.2 es ➔consistente ya que admite la interpretación en conjunción, A4 es independiente en LD7 puesto que al contrario de LD7.1, A4 no admite la interpretación natural, Simp≡ es independiente en LD7 puesto que al contrario de LD7.2, Simp≡ no admite la interpretación en conjunción.

Se construye el sistema LD8 cambiando Mp1➔ y Mp2➔ en LD6 por MP1· y Mp2· y además agregando las reglas Red· e Imp·:

LD8 = LD6 - Mp1➔- Mp2➔ + Mp1· + Mp2· + Red· + Imp·

= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·.

Se tiene que: LD8 es ➔ consistente ya que admite la interpretación en implicación-conjunción, y también se tiene que si LD7 es ➔inconsistente entonces también lo sería LD8, es decir LD7 es ➔consistente.

Por otro lado, puesto que LD4 es ➔ inconsistente y LD5 es ➔ consistente se tiene que ⊢ Mp1➔, ⊢ Mp2➔, ⊢ Mp3≡ y ⊢ Mp4≡ no implican ⊢ Mp≡, además como LD2.5 es ➔ inconsistente y LD7 es➔consistente, se tiene que Mp≡ no es derivada en LD7.

Se concluye así que Mp≡ es estrictamente más fuerte que Mp1➔, Mp2➔, Mp3≡, Mp4≡, Mp1· y Mp2·.en LD3.0.

Se construye el sistema LD9 cambiando en LD7 Mp1· y Mp2· por Mp1➔ y Mp2➔:

LD9 = A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·.

LD9.1 = LD9 – A4

= A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·.

LD9.2 = LD9 – Simp≡

= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·.

Se puede observar que LD9.1 es ➔consistente puesto que admite la interpretación natural, A4 es independiente en LD9 ya que LD9.1 admite la interpretación natural y A4 no la admite, LD9.2 es ➔consistente puesto que admite la interpretación en conjunción, Simp≡ es independiente en LD9 ya que LD9.2 admite la interpretación en conjunción y Simp≡ no la admite.

Se construye el sistema LD10 cambiando en LD8 Mp1· y Mp2· por Mp1➔ y Mp2➔:

LD10 = LD8 - Mp1· - Mp2· + Mp1➔ + Mp2➔

= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·.

Se tiene que LD10 es ➔consistente puesto que admite la interpretación en implicación-conjunción, y también se tiene que si LD9 es ➔inconsistente entonces también lo sería LD10, es decir LD9 es ➔consistente.

(Mp≡)*: (A→B) ↔ (C→D), A→B ⊢ C→D

(Mp➔)*: A→B, (A∧B) → (C∧D) ⊢ C→D

(Mp1➔)*: A→B, (A∧B) → (A∧C) ⊢ A→C

(Mp2➔)*: A→C, (A∧C) → ((A∧B)∧D) ⊢ (A∧B)→D

(Mp3≡)*: A→B, (A→B) ↔ (A→C) ⊢ A→C

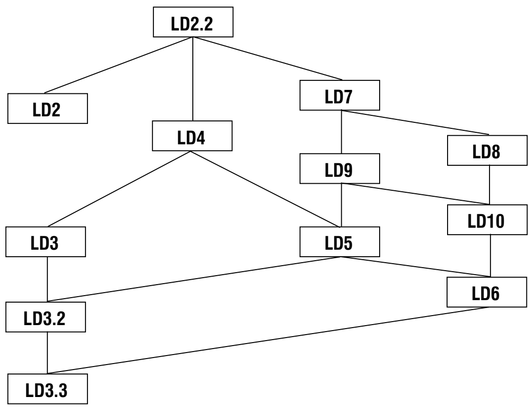
(Mp4≡)*: A→C, (A→C) ↔ ((A∧B)→D) ⊢ (A∧B)→D

(Mp1·)*: A→B, (A∧B) → (A∧C) ⊢ A→C

(Mp2·)*: A→C, (A∧C) → ((A∧B)∧D) ⊢ (A∧B)→D.

La relación de inclusión entre algunos de los anteriores sistemas está indicada por el retículo de la figura 1 (la línea indica que el sistema de más arriba incluye estrictamente al sistema de más abajo, la ausencia de línea indica que no existe relación de inclusión):

FIGURA 1



SEMÁNTICAS DE CONTEXTO

Otra forma de la contracción que no ha sido considerada hasta el momento es:

A6: A→B-C ≡ AB→A-C

A6a: A-(B-C) → AB-(A-C)

A6b: AB-(A-C) → A-(B-C)

La clave de la ➔consistencia de los sistemas LD5, ... , LD10 está en restringir las reglas de modus ponens Mp≡ y Mp➔ con Mp1➔, Mp2➔, Mp3≡, Mp4≡, Mp1· y Mp2·:

En los sistemas LD11, ... , LD18 se consideran A6, A6a o A6b:

LD11 = A1, A2a, A3, A6a, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔.

LD12 = A1, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔.

LD13 = A1, A2, A3, A6, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔, MP➔.

LD14 = A1, A2a, A3, A6, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔, MP➔.

LD15 = A1, A2b, A3, A6b, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔.

LD16 = A1, A3, A6b, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔.

LD17 = A1, A2b, A3, A6b, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔, MP➔.

LD18 = A1, A3, A6b, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simpl≡, MP1➔, MP2➔, MP➔.

Las semánticas de contexto son semánticas de los mundos posibles, es decir, constan de modelos al estilo Kripke : $\mathbf{M_1}$ = (M_1, MP, ➔, ⊨), donde MP es el conjunto de mundos posibles, M_1 es un mundo posible, el mundo actual, ➔ es la relación de accesibilidad entre mundos posibles y ⊨ es la relación de verdad. La relación de accesibilidad satisface: ∀M∈ MP, M_1➔M, es decir, del mundo actual se tiene acceso a todos los mundos posibles del modelo y se dice que M_1 es un contexto. Se clasifican estas semánticas de acuerdo a las propiedades (reflexividad y transitividad) de ➔ en:

SC = Semánticas de contexto,

SCR = Semánticas de contexto Reflexivas,

SCT = Semánticas de contexto Transitivas,

SCRT = Semánticas de contexto Reflexivas y Transitivas.

Definiendo la relación de verdad como se hace normalmente para la Lógica Modal (Hughes y Cresswell, 1973), se tiene que estas semánticas validan las lecturas 5 y 10 de algunos de los sistemas LD11, ... , LD18. La Lectura 10 (L_{10}(LDn) nos indica la lectura 10 del sistema LDn) interpreta los enunciados de la Lógica Diagonal como enunciados de la Lógica Modal de la siguiente forma[5]:

a' = a, cuando a es enunciado atómico.

(A➔B)' = □A'→□B'

(A-B)' = □A'→ B'

(AB)' = A'∧ □(A'→B')

(A➔B ≡ C➔D)' = (A-B ➔ C-D)' ∧ (C-D ➔ A-B)'

La Lectura 5 (L_5(LDn) nos indica la lectura 5 del sistema LDn) interpreta los enunciados de la Lógica Diagonal como enunciados de la Lógica Modal de la siguiente forma:

a' = a, cuando a es enunciado atómico.

(A➔B)' = □A'→□B'

(A-B)' = A'→B'

(AB)' = A'∧ □(A'→B')

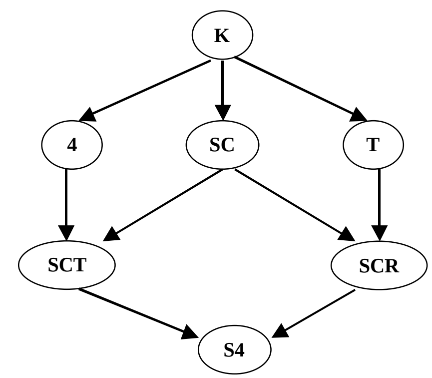
(A➔B ≡ C➔D)' = (A-B ➔ C-D)' ∧ (C-D ➔ A-B)'

Todas las semánticas validan A1a, A1b, A3a, A3b, A1, A3, Simp≡, Simet≡, Tran≡, Tran→, Mp1→ y Mp2→ puesto que SC los valida. SCRT valida A2a puesto que SCR lo valida. SCRT valida A2b puesto que SCT lo valida. SCRT valida A2 puesto que SCRT validan A2a y A2b. SC no valida A2a puesto que SCT no lo valida. SC no valida A2b puesto que SCR no lo valida. Ninguna semántica valida A4a, A4b, A4 puesto que SCRT no los valida. SCRT valida A6a puesto que SCR lo valida. SC no valida A6a puesto que SCT no lo valida. SCRT valida A6b puesto que SCR lo valida (SCT también lo valida). SC no valida A6b. SCRT valida Mp→ puesto que SCR lo valida. SC no valida Mp→ puesto que SCT lo valida. SCT, SCR y SCRT validan Mp1➔ y Mp2➔ ya que SC las valida. La lectura 10 del enunciado A➔B es □A→□B, que no es validada por las SCRT, pero las SCRT si validan LD11, ... , LD18, podemos entonces concluir que los sistemas LD11, ... , LD18 son ➔consistentes (ver tabla 1).

Sintetizando se tienen los siguientes resultados: Las SC validan L_5(LD12) y L_{10}(LD12); Las SCR validan L_5(LD11), L_5(LD12), L_{10}(LD11), L_{10}(LD12), L_{10}(LD14), L_{10}(LD16) y L_{10}(LD18); Las SCT validan L_5(LD12), L_{10}(LD12), L_{10}(LD15) y L_{10}(LD16); Las SCRT validan L_5(LD11), L_5(LD12), L_{10}(LD11), ... , L_{10}(LD18) y L_{10}(LD3); Los sistemas LD11, ... , LD18 son ➔consistentes (existe al menos un enunciado de la forma A➔B que no es teorema).

Las semánticas de contexto están estrechamente relacionadas con las semánticas de los sistemas de lógica modal K (relación de accesibilidad sin restricciones), T (relación de accesibilidad reflexiva), 4 (relación de accesibilidad transitiva) y S4 (relación de accesibilidad reflexiva y transitiva), tenemos que S4 es SCRT y la relación de inclusión está indicada por retículo de la figura 2.

FIGURA 2



5 M_1 ⊨ □A sii ∀M∈ MP, M1➔M, M ⊨ A.

TABLA 1

	L5	L5	L5	L5		L10	L10	L10	L10
	SC	SCR	SCT	SCRT		SC	SCR	SCT	SCRT
A1a	s	s	s	s		s	s	s	s
A1b	s	s	s	s		s	s	s	s
A2a	n	s	n	s		n	s	n	s
A2b	n	n	n	n		n	n	s	s
A3a	s	s	s	s		s	s	s	s
A3b	s	s	s	s		s	s	s	s
A4a	n	n	n	n		n	n	n	n
A4b	n	n	n	n		n	n	n	n
A6a	n	s	n	s		n	s	n	s
A6b	n	n	n	n		n	s	s	s
Tran≡	s	s	s	s		s	s	s	s
Tran→	s	s	s	s		s	s	s	s
Simp≡	s	s	s	s		s	s	s	s
Sime≡	s	s	s	s		s	s	s	s
MP1➔	s	s	s	s		s	s	s	s
MP2➔	s	s	s	s		s	s	s	s
MP➔	n	n	n	n		n	s	n	s
Sistemas Validados	12	11,12	12	11,12		12	11,12,14, 16,18	12,15, 16	11,...,18 3

NUEVAS REGLAS DE MODUS PONENS

Puesto que la regla de modus ponens solo vale restringida, se introducen nuevas formas de modus ponens:

Mp5➔: AC➔D, AC-D➔A-B ⊢ A➔B

Mp6➔: A-B➔A-B-B, A➔B ⊢ A-B➔B

Mp7➔: A-B-B➔A-B, A-B➔B ⊢ A➔B

Mp5·: AC➔D, ACD➔A-B ⊢ A➔B

Mp6·: AB➔A-B-B, A➔B ⊢ A-B➔B

Mp7·: (A-B)B➔A-B, A-B➔B ⊢ A➔B

Se construyen los siguientes sistemas:

LD19 = LD3.2 + Mp5➔
= A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Mp5➔.

LD20 = LD3.3 + Mp5➔
= A1a, A2a, A3a, A1b, A2b, A3b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔, Mp5➔.

LD21 = LD5 + Mp5➔
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Mp5➔.

LD22 = LD6 + Mp5➔
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔, Mp5➔.

LD23 = LD7 + Mp5· + Mp6·
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·.

LD24 = LD8 + Mp5· + Mp6·
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·.

LD25 = LD9 + Mp5➔
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·, Mp5➔.

LD26 = LD10 + Mp5➔
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·, Mp5➔.

MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN CONDICIONAL

En la Lógica Clásica se tiene:

A, B ⊢ C sii A ⊢ B→C

La implicación directa es el llamado Método de Demostración Condicional (Teorema de Deducción) y la recíproca es el Modus Ponens.

Puesto que los sistemas de Lógica Diagonal tienen varias formas del Modus Ponens[6] (no vale la correspondiente forma general del Modus Ponens que es Mp➔, pero si valen las formas restringidas Mp1➔, Mp1·, Mp2➔, Mp2·, Mp3≡, Mp4≡, Mp5➔, Mp5·, Mp5≡, Mp6➔, Mp6·, Mp6≡), es natural considerar en dichos sistemas los respectivos Métodos de Demostración Condicional:

Mdc1➔: G, A➔B ⊢ A➔C implica G ⊢ A-B ➔ A-C

Mdc2➔: G, A➔B ⊢ AC➔D implica G ⊢ A-B ➔ AC-D

Mdc5➔: G, AC➔D ⊢ A➔B implica G ⊢ AC-D ➔ A-B

Mdc6➔: G, A➔B ⊢ A-B➔B implica G ⊢ A-B ➔ A-B-B

Mdc7➔: G, A-B➔B ⊢ A➔B implica G ⊢ A-B-B ➔ A-B

Mdc1.: G, A➔B ⊢ A➔C implica G ⊢ AB ➔ A-C

Mdc2.: G, A➔B ⊢ AC➔D implica G ⊢ AB ➔ AC-D

6 La regla Mp➔: A➔B, A-B➔C-D ⊢ C➔D, no es derivada en los sistemas ➔consistentes de Lógica Diagonal, puesto que, hace ➔inconsistente al los sistemas que contengan A1, A4 y Simp≡, esto debido a que Mp7➔ es un caso particular de Mp➔.

Mdc5.: G, AC➔D ⊢ A➔B implica G ⊢ ACD ➔ A-B

Mdc6.: G, A➔B ⊢ A-B➔B implica G ⊢ AB ➔ A-B-B

Mdc7.: G, A-B➔B ⊢ A➔B implica G ⊢ (A-B)B ➔ A-B

Se construyen los siguientes sistemas:

LD27 = LD19 + Mdc1➔ + Mdc2➔ + Mdc5➔
= A1, A2, A3, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Mp5➔, Mdc1➔, Mdc2➔, Mdc5➔.

LD28 =LD20 + Mdc1➔ + Mdc2➔ + Mdc5➔
= A1a, A2a, A3a, A1b, A2b, A3b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔, Mp5➔, Mdc1➔, Mdc2➔, Mdc5➔.

LD29 = LD21 + Mdc1➔ + Mdc2➔ + Mdc5➔
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Mp5➔, Mdc1➔, Mdc2➔, Mdc5➔.

LD30 = LD22 + Mdc1➔ + Mdc2➔ + Mdc5➔
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·, Mp5➔, Mdc1➔, Mdc2➔, Mdc5➔.

LD31 = LD23 + Mdc1· + Mdc2· + Mdc5·
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·.

LD32 = LD24 + Mdc1· + Mdc2· + Mdc5·
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·.

LD33 = LD25 + Mdc1➔ + Mdc2➔ + Mdc5➔
= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran➔, Simet≡, Simp≡, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·, Mp5➔, Mdc1➔, Mdc2➔, Mdc5➔.

LD34 = LD26 + Mdc1➔ + Mdc2➔ + Mdc5➔
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran➔, Mp1➔, Mp2➔, Red·, Imp·, Mp5➔, Mdc1➔, Mdc2➔, Mdc5➔.

SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

Se presentan los axiomas en forma de reglas de inferencia:

R1a: A➔B ⊢ A➔A-B

R1b: A➔A-B ⊢ A➔B

R2a: A➔B-C ⊢ AB➔C

R2b: AB➔C ⊢ A➔B-C

R3a: A→AB-C ⊢ AB→C

R3b: AB→C ⊢ A→AB-C

R4a: A→B ⊢ A-B→B

R4b: A-B→B ⊢ A→B

Se construyen los siguientes sistemas:

LD28R = LD28 – [A1a, ... , A3b] + [R1a, ... , R3b]
= R1a, R2a, R3a, R1b, R2b, R3b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD30R = LD30 - [A1a, ... , A4a] + [R1a, ... , R4a] + Mdc6→
= R1a, R1b, R2a, R2b, R3a, R3b, R4a, A4b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→, Mdc6→.

LD32R = LD32 - [A1a, ... , A4a] + [R1a, ... , R4a]
= R1a, R1b, R2a, R2b, R3a, R3b, R4a, A4b, Tran→, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·.

LD34R = LD34 - [A1a, ... , A4a] + [R1a, ... , R4a] + Mdc6→
= R1a, R1b, R2a, R2b, R3a, R3b, R4a, A4b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→, Mdc6→.

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE LOS SISTEMAS LD19, ... , LD34R

R1a, ..., R3b son derivadas en LD19, LD20, LD27, LD28. R1a, ..., R4b son derivadas en LD21, ... , LD26, LD29, ... , LD34. A1a, ..., A3b son derivadas en LD28R. A1a, ..., A4b son derivadas en LD30R, LD32R, LD34R. LD19 es →consistente, ya que LD3.2 y Mp5→ admiten la Interpretación Natural. LD20 es →consistente, ya que LD3.3 y Mp5→ admiten la Interpretación Natural. LD27 es →consistente, ya que LD19, Mdc1→, Mdc2→ y Mdc5→ admiten la Interpretación Natural. LD28 y LD28R son →consistentes, ya que LD20, Mdc1→, Mdc2→ y Mdc5→ admiten la Interpretación Natural y ambos sistemas son equivalentes. Los sistemas LD21, ... , LD26, LD29, ... , LD34 no soportan Mp7→ ni Mp7· + Imp·, puesto que todo sistema en el cual sean válidos A4a, A4b, A1b, Mp1→ y Mp7→ (ó Mp7· + Imp·)[7], es →inconsistente (demuestra todas las fórmulas A→B):

Prueba:

1.	A-B → (A-B)-B	A4a
2.	(A-B)-B → A-B	A4b
3.	(A-B)-((A-B)-B) → (A-B)-B	A1b
4.	A-B → B	Mp1→ entre 1 y 3
5.	A → B	Mp7→ entre 2 y 4

También tiene que Mp6→ es derivada en LD21, ... , LD34[8].

Prueba:

1.	A→B	Premisa
2.	A-B→(A-B)-B	Premisa
3.	(A-B)→(A-B)-B ≡ (A-B)→B	A1 y Simet≡
4.	(A-B)-((A-B)-B) → (A-B)-B	A1b: Simp≡ en 3
5.	A-B→B	Mp1→ entre 2 y 4

Se sabe que LD21 = LD5 + Mp5→ y que LD22 = LD6 + Mp5→ de donde LD22 = LD21 implicativo, por lo que, LD22 ⊆ LD21, se tiene así que LD22 →inconsistente implica LD21 →inconsistente, es decir, LD21 →consistente implica LD22 →consistente. También se tienen los recíprocos de los resultados anteriores: LD21 →inconsistente implica LD22 →inconsistente, ya que si LD21 es →inconsistente, para todo par de fórmulas A, B existe una prueba de A→B, si en cada prueba se cambia cada fórmula C→D≡E→F por C-D→E-F, se obtienen pruebas de A→B para todo par de fórmulas A, B, es decir LD22 es →inconsistente, es decir, LD22 →consistente implica LD21 →consistente, en resumen: LD22 →consistente si y solamente si LD21 →consistente. Razonamientos similares indican que: LD24 →consistente si y solamente si LD23 →consistente, LD26 →consistente si y solamente si LD25 →consistente, LD30 →consistente si y solamente si LD29 →consistente, LD30R →consistente implica LD30 →consistente, LD30 →consistente si y solamente si LD31 →consistente, LD32R →consistente implica LD32 →consistente, LD34 →consistente si y solamente si LD33 →consistente, LD34R →consistente implica LD34 →consistente.

7 Mp7→ se sigue de Mp7· e Imp·.

8 El resultado es aún más general: A-B→(A-B)-B ⊢ A-B → B es derivada en todo sistema que contenga Mp1→ y A1b.

Se tiene también que R4b hace →inconsistente al sistema LD30R, puesto que A-B→B es teorema en los sistemas que incluyen a LD5 (en los sistemas que tengan A4a, A1b y Mp1→ se prueba para todo A y B: A-B→B y aplicando R4b se deriva A→B). R4b también hace →inconsistente al sistema LD32R. Por otro lado Mp5→, Mp5·, Mp7→ y Mp7· no admiten lectura en Implicación Conjunción, por lo cual son independientes en sistemas que si la admitan como LD6, LD22, LD8, LD24, LD10, LD26. LD21 →inconsistente implica LD22 →inconsistente, ya que LD21 sin Simp≡ admite Interpretación en Conjunción. Mp6→ y Mp6· si admiten lectura en Implicación Conjunción. Mp5→, Mp5·, Mp6→, Mp6·, Mp7→ y Mp7· si admiten lectura en Conjunción, y por lo tanto sistemas que se trivializan con Mp7→ o Mp7· no la admiten. Mp5→, Mp5·, Mp6→, Mp7→ si admiten Interpretación Natural. Mp6· y Mp7· no admiten interpretación natural. Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→, Mdc6→, Mdc7→, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·, Mdc6· y Mdc7· si admiten Interpretación Natural. Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→, Mdc6→, Mdc7→, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·, Mdc6· y Mdc7· no admiten Interpretación en Conjunción. Mdc6→ es derivado en sistemas con A4a, por lo tanto derivada en LD5. Mdc7→ es derivado en sistemas con A4b, por lo tanto derivada en LD5; Mdc6· es derivado en sistemas con A4a y Imp·, por lo tanto derivada en LD7. Mdc7· es derivado en sistemas con A4b y Imp· por lo tanto derivada en LD7. En los sistemas LD31, LD32 y LD32R son válidas las reglas Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·, Mdc6· y Mdc7[9].

AXIOMAS DE DISTRIBUTIVIDAD

Se tienen los axiomas de distributividad, las reglas, los Modus Ponens y los métodos de demostración condicional asociados a ellos:

A6: A→B-C ≡ AB→A-C

A6a: A-(B-C) → AB-(A-C)

A6b: AB-(A-C) → A-(B-C)

R6a: A→B-C ⊢ AB→A-C

R6b: AB→A-C ⊢ A→B-C

Mp8→: A-(B-C) → AB-(A-C), A→B-C ⊢ AB→A-C

Mp9→: AB-(A-C) → A-(B-C), AB→A-C ⊢ A→B-C

Mp8·: A-(B-C) → AB·(A-C), A→B-C ⊢ AB→A-C

Mp9·: AB-(A-C) → A·(B-C), AB→A-C ⊢ A→B-C

Mdc8→: G, A→B-C⊢AB→A-C implica G⊢A-(B-C) → AB-(A-C)

Mdc9→: G, AB→A-C ⊢A→B-C implica G⊢AB-(A-C) →A-(B-C)

Mdc8·: G, A→B-C ⊢AB→A-C implica G ⊢A·(B-C) → AB-(A-C)

Mdc9: G, AB→A-C ⊢A→B-C implica G ⊢ AB·(A-C) → A-(B-C)

Se construyen los sistemas:

LD35 = LD27 + A6
= A1, A2, A3, A6, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1→, Mp2→, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD36 = LD28 + A6a + A6b
= A1a, A2a, A3a, A1b, A2b, A3b, A6a, A6b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD36R = LD28R + R6a + R6b
= R1a, R2a, R3a, R1b, R2b, R3b, R6a, R6b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD37 = LD29 + A6
= A1, A2, A3, A4, A6, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1→, Mp2→, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD38 = LD30 + A6a + A6b
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, A6a, A6b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD38R = LD30R + R6a + R6b
= R1a, R1b, R2a, R2b, R3a, R3b, R4a, A4b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→, Mdc6→.

LD39 = LD31 + A6
= A1, A2, A3, A4, A6, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·.

LD40 = LD32 + A6a + A6b
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, A6a, A6b, Tran→, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·.

9 Mdc6· y Mdc7· son derivadas en cualquier sistema que contenga A4, Simp≡ e Imp·.
Mdc6→ (Mdc7→) es derivada en cualquier sistema que contenga A4a (A4b).

LD40R = LD32R + R6a + R6b
= R1a, R1b, R2a, R2b, R3a, R3b, R4a, A4b, R6a, R6b, Tran→, Mp1·, Mp2·, Red·, Imp·, Mp5·, Mp6·, Mdc1·, Mdc2·, Mdc5·, Mdc6·.

LD41 = LD33 + A6
= A1, A2, A3, A4, A6, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1→, Mp2→, Red·,
Imp·, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD42 = LD34 + A6a + A6b
= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, A6a, A6b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Red·,
Imp·, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→.

LD42R = LD34R + R6a + R6b
= R1a, R1b, R2a, R2b, R3a, R3b, R4a, A4b, R6a, R6b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Red·,
Imp·, Mp5→, Mdc1→, Mdc2→, Mdc5→, Mdc6→.

En estos sistemas son derivadas las correspondientes reglas de Modus Ponens y métodos de demostración condicional puesto que: Las reglas Mp8→, Mp9→, Mp8· y Mp9· son casos particulares de las reglas Mp2→, Mp5→, Mp2· y Mp5· respectivamente; las reglas Mdc8→, Mdc9→, Mdc8· y Mdc9· son casos particulares de las reglas Mdc2→, Mdc5→, Mdc2· y Mdc5·.

Se sabe muy poco de estos sistemas, solo podemos garantizar la →consistencia de 3 de ellos: LD35 es →consistente puesto que LD27 y A6 admiten la interpretación natural. LD36 y LD36R son →consistentes ya que LD28, LD28R, A6a, A6b, R6a y R6b admiten la interpretación natural. Se conjetura que todos ellos son →consistentes.

CONCLUSIÓN

Ciertamente las diferentes interpretaciones en la Lógica Clásica han aportado bastante al desarrollo de las Lógicas Diagonales, el paso siguiente debe ser explorar interpretaciones en Lógicas que soporten contradicciones, ya que desde el punto de vista clásico el axioma 4 es inconsistente,. Por otro lado, ya que las inconsistencias están íntimamente relacionadas con la negación, es importante el estudio de la negación en estos nuevos sistemas.

REFERENCIAS

Curry, H. (1977). Foundations of Mathematical Logic. New York: Dover Publications Inc.

Dummett, M. (1977). Elements of Intuitionism, England: Oxford University Press.

Gentzen, G. (1969). Investigations into Logical Deduction, en "The Collected Papers of Gerhard Gentzen". Holland: North-Holland Co.

Girard, J., Taylor, P., y Lafont, Y. (1989). Proofs and Types, Cambridge University Press.

Goldblatt, R. (1979). Topoi: The Categorical Analysis of Logic. Holland: North-Holland.

Hindley, J., Lercher, B. y Seldin, J. (1972). Introduction to Combinatory Logic, Cambridge University Press.

Hughes, G. y Cresswell, M. (1973). Introducción a la Lógica Modal, Editorial Tecnos.

Kleene, S. (1974). Introducción a la Metamatemática. Madrid: Editorial Tecnos.

MacLane, S. y Moerdijk, L.. (1992). Sheaves in Geometry and Logic. New York: Springer-Verlag.

Sierra, M. (1996). Lógica Diagonal. En: *Boletín de Matemáticas, Nueva Serie,* vol 3, **No 2.**

Sierra, M. (1998). →consistencia de los sistemas LD5, ... , LD10. En: *Boletín de Matemáticas, Nueva Serie,* vol. 5, **No. 2**.

Sierra, M. (S.F.). Retículo de contenencias para los sistemas LD2, ... , LD10. En: *Boletín de Matemáticas, Nueva Serie*.

Sierra, M. (1999a). Sistemas de Lógica Diagonal LD11, ... , LD18. En: Memorias del VII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Universidad de Antioquia.

Sierra, M. (1999b). Sistemas de Lógica Diagonal LD19, ... , LD26. En: Memorias del XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional.

Sierra, M. (2000). Sistemas de Deducción Natural para la Lógica Diagonal, Preprint.