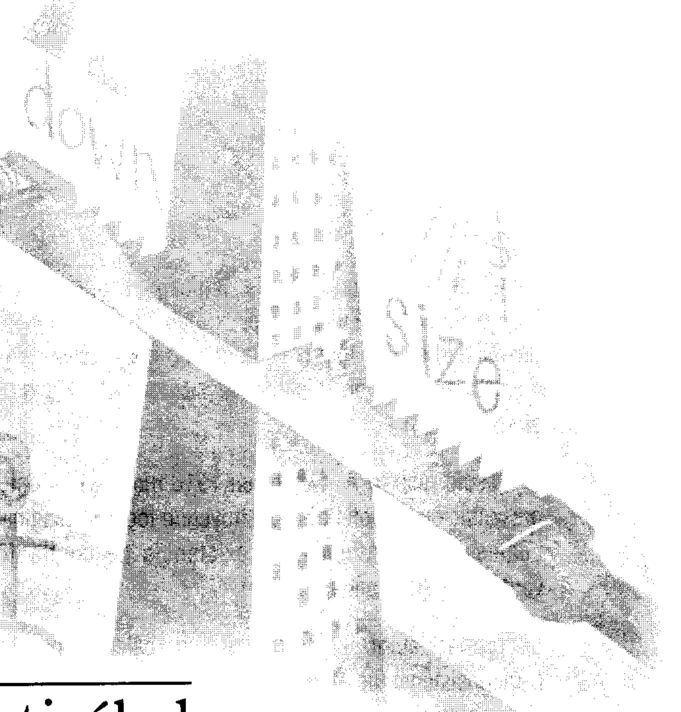

Sistema
de lógica paraconsistente C1

Manuel Sierra Aristizábal

1. INTRODUCCIÓN

En la teoría intuitiva y no axiomática de conjuntos de Cantor, existe un principio básico llamado postulado de separación, este dice que toda propiedad determina un conjunto, aquel formado por los objetos que poseen tal propiedad; como se sabe, utilizando principios lógicos muy simples se puede probar que este postulado conduce a la contradicción llamada la paradoja de Russell. El camino seguido por las teorías axiomáticas de conjuntos fue restringir el postulado de separación y conservar la lógica clásica. Surge la pregunta: si tanto el postulado de separación como la lógica clásica parecen sensatos, por qué no conservar el primero y modificar la segunda?, la lógica resultante debe admitir contradicciones, pero para que sea útil, no debe ser trivial[1]. Por lo tanto, si queremos desarrollar teorías de conjuntos en las cuales el postulado de separación esté sujeto a restricciones más débiles que las que imponen las teorías de conjuntos usuales, debemos emplear lógicas que sirvan de base a teorías contradictorias pero no triviales. Estas lógicas se denominan paraconsistentes[2].

Para algunos seguidores de la Dialéctica, esta disciplina encierra contradicciones por lo que la lógica clásica no puede servirle de soporte. La lógica paraconsistente por si misma no justifica la dialéctica, pero evidencia que muchas de las críticas a su estructura lógica son infundadas.

El filósofo Meinong desarrolló una teoría de objetos en la cual objetos como el círculo cuadrado son posibles, esto conduce a contradicciones, esta dificultad podría ser superada utilizando como lógica de base la paraconsistente.

Con la lógica paraconsistente se profundiza en el estudio de la negación ya que hay varias negaciones paraconsistentes que se parecen a la negación clásica.

El filósofo Meinong desarrollo una teoría de objetos en la cual objetos como el círculo cuadrado son posibles, esto conduce a contradicciones, esta dificultad podría ser superada utilizando como lógica de base la paraconsistente.

Existen teorías paraconsistentes de la verdad que extienden la teoría tarskiana, esto significa que hay semánticas alternativas de la semántica clásica.

La manipulación de sistemas contradictorios de manejo de información, la sistematización de códigos éticos y jurídicos que en general son contradictorios, son temas en los que la lógica paraconsistente tiene mucho que decir.

1 Una teoría es trivial si todos los enunciados expresables en ella son teoremas.

2 Hoy en día se sabe que se pueden construir numerosas teorías de conjuntos inconsistentes no triviales, ver Arruda (1964), da Costa (1964) y (1986).

MANUEL SIERRA A. Magister en Matemáticas. Profesor del Departamento de Humanidades, Universidad EAFIT.
email: msierra@sigma.eafit.edu.co
Agradecimientos a João Marcos de Almeida por autorizar la reproducción de su disertación de Maestría en la Universidade Estadual de Campinas, este artículo debe mucho a su trabajo.

Entre los precursores de la lógica paraconsistente están el lógico Polaco J. Lukasiewicz, quien en 1910 consideró la posibilidad de una lógica en la que no fuese válido el principio de no con-tradicción en alguna de sus formas (ver mas adelante el sistema L3).

El filósofo ruso N. A. Vasilev en 1910 modifica la lógica en su presentación aristotélica, construyendo lógicas imaginarias, las cuales no eliminaban la existencia de contradicciones verdaderas (Bazhanov, (1989)).

El primer autor en formular un cálculo proposicional paraconsistente fue el lógico Polaco S. Jaskowski en 1948, una de las motivaciones fue la siguiente: si queremos reunir en una sola teoría todas las afirmaciones hechas en una discusión , tal teoría será contradictoria puesto que los términos usados no son empleados siempre en el mismo sentido, por esta razón la llamó lógica discusiva. Jaskowski no axiomatizó su lógica, tan solo la definió por intermedio de una interpretación[3] en el sistema de lógica modal S5. Actualmente la lógica discusiva está bien desarrollada (da Costa & Dubikajtis, (1968)).

Con la lógica paraconsistente se profundiza en el estudio de la negación ya que hay varias negaciones paraconsistentes que se parecen a la negación clásica.

En las décadas de los 50 y los 60, en Brasil Newton da Costa construyó jerarquías infinitas de cálculos lógicos para-consistentes, cálculos proposicionales, cálculos de predicados de primer orden, con y sin identidad, cálculos de descriptores y teorías de conjuntos paraconsistentes.

3 Su conjunción, implicación y equivalencia discusiva se definía así: $A \wedge_d B = A \wedge \Diamond B$, $A \rightarrow_d B = \Diamond A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow_d B = (\Diamond A \rightarrow B) \wedge (\Diamond B \rightarrow A)$, $\Diamond$ puede leerse como alguien afirma que. En da Costa & Dubikajtis (1968), se introduce la siguiente axiomatización del sistema J:

J1. $\Box((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
J2. $\Box((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$
J3. $\Box(B \rightarrow (A \vee B))$
J4. $\Box(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B))$
J5. $\Box((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$
J6. $\Box(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$
J7. $\Box(A \rightarrow (A \vee B))$
J8. $\Box(\Box A \rightarrow A)$
J9. $\Box(A \rightarrow \Box \Diamond A)$
R1. $A,\ \Box(A \rightarrow B) \therefore B$
R2. $\Diamond A \therefore A$

2. SISTEMA DE LÓGICA PARACONSISTENTE C1

Antecedentes

En 1963, da Costa propone una jerarquía de cálculos proposicionales paraconsistentes Cn, $1 \leq n \leq w$. Sus exigencias sobre estos cálculos fueron:

dC1. El principio de no contradicción $\neg(A \wedge \neg A)$ no debe ser válido.

dC2. De dos fórmulas contradictorias no debe ser en general posible deducir cualquier otra fórmula.

dC3. La extensión de estos cálculos a los cálculos de predicados correspondientes debe ser simple.

dC4. Estos cálculos deben contener la mayor parte de los esquemas y reglas del cálculo proposicional clásico que no interfieran con las condiciones anteriores.

La dificultad para obtener una interpretación aun no ha sido completamente superada. Fue con la intención de contribuir a esta superación que Carnielli y Marcos (1999) propusieron a la jerarquía de cálculos proposicionales de da Costa una nueva herramienta semántica, las semánticas de traducciones posibles (ver también Carnielli 1999).

Con Alves & Queiroz (1991), vemos como C1 se construye de una cierta forma dual a la construcción del Cálculo Intuicionista de Heyting, se consideran los siguientes esquemas:

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

(4) $(A \wedge B) \rightarrow A$

(5) $(A \wedge B) \rightarrow B$

(6) $A \rightarrow (A \vee B)$

(7) $B \rightarrow (A \vee B)$

(8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

(9) $B^{o} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$ [4]

(10) $(A^{o} \wedge B^{o}) \rightarrow ((A \wedge B)^{o} \wedge (A \vee B)^{o} \wedge (A \rightarrow B)^{o})$

4 $X^{o} = \neg(X \wedge \neg X)$ indica que la fórmula X tiene un *buen comportamiento*, un comportamiento similar a las fórmulas de CPC.

(11.1) $\neg(A\wedge\neg A)$ [5]

(11.2) $A\vee\neg A$

(12.1) $A\to(\neg A\to B)$

(12.2) $\neg\neg A\to A$

(MP) $A,\ A\to B\ \therefore B$

Cálculo Positivo Intuicionista
= CPI = (1), ... , (8), (MP).

Cálculo intermedio
= CINTER = CPI, (9), (10).

Cálculo Minimal de Johánsson
= CMJ = CINTER, (11.1).

Cálculo Minimal Paraconsistente
=CMP = CINTER, (11.2).

Cálculo Intuicionista de Heyting
= CIH = CMJ, (12.1).

Cálculo Paraconsistente C1
= C1 = CMP, 12.2 [6].

Cálculo Proposicional Clásico
= CPC = CIH, (11.2) = C1, (11.1) [7].

Algunas consecuencias en C1

a. Vale el Teorema de Deducción.

b. Sean V el conjunto de variables que aparecen en el conjunto de fórmulas $\Gamma\ U\{F\}$, $V^o = \{p^o\colon p\in V\}$, entonces $\Gamma \vdash_{CPC} F$ sii $\Gamma, V^o \vdash_{C1} F$.

c. La negación fuerte tiene todas las propiedades de la negación clásica. Son teoremas en C1: $A\vee{\sim}A$, $A\to{\sim}{\sim}A$, ${\sim}(A\to B)\to A$, $(A\to B)\to((A\to{\sim}B)\to{\sim}A)$, ${\sim}(A\wedge{\sim}A)$ [8].

d. La *Ley de Peirce* (LP) $((A\to B)\to A)\to A$ es un teorema.

e. Valen todos los esquemas y reglas de el Cálculo Positivo Clásico = CPC = CPI, (LP).

f. C1 es consistente (es no trivial) [9].

g. C1 es finitamente trivializable [10].

h. El buen comportamiento se propaga con la negación, es decir $A^o\to(\neg A)^o$ es un teorema.

i. El teorema de sustitución de equivalentes [11] no vale en C1 (De $A\leftrightarrow B$ no se sigue $\neg A\leftrightarrow\neg B$, la adición de esta regla genera CPC).

j. $\vdash A^o\to A^{□}$, no $\vdash A^{□}\to A^o$. [12]

k. Son teoremas en C1 las siguientes formas de las leyes de De Morgan: $\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$, $\neg(A\wedge\neg B)\to(\neg A\vee B)$, $\neg(\neg A\wedge B)\to(A\vee\neg B)$, $\neg(\neg A\wedge\neg B)\to(A\vee B)$.

l. No son teoremas en C1 las siguientes formas de las leyes de De Morgan: $\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$, $\neg(A\vee\neg B)\to(\neg A\wedge B)$, $\neg(\neg A\vee B)\to(A\wedge\neg B)$, $\neg(\neg A\vee\neg B)\to(A\wedge B)$, $(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)$, $(\neg A\vee B)\to\neg(A\wedge\neg B)$, $(A\vee\neg B)\to\neg(\neg A\wedge B)$, $(A\vee B)\to\neg(\neg A\wedge\neg B)$, $(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)$, $(\neg A\wedge B)\to\neg(A\vee\neg B)$, $(A\wedge\neg B)\to\neg(\neg A\vee B)$, $(A\wedge B)\to\neg(\neg A\vee\neg B)$.

m. Son teoremas en C1 las siguientes formas de la implicación-disyución: $(A\to B)\to(\neg A\vee B)$, $(A\to\neg B)\to(\neg A\vee\neg B)$, $(\neg A\to B)\to(A\vee B)$, $(\neg A\to\neg B)\to(A\vee\neg B)$.

n. No son teoremas en C1 las siguientes formas de la implicación-disyución: $\neg(A\to B)\to\neg(\neg A\vee B)$, $\neg(A\to\neg B)\to\neg(\neg A\vee\neg B)$, $\neg(\neg A\to B)\to\neg(A\vee B)$, $\neg(\neg A\to\neg B)\to\neg(A\vee\neg B)$, $(\neg A\vee B)\to(A\to B)$, $(\neg A\vee\neg B)\to(A\to\neg B)$, $(A\vee B)\to(\neg A\to B)$, $(A\vee\neg B)\to(\neg A\to\neg B)$, $\neg(\neg A\vee B)\to\neg(A\to B)$, $\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\to\neg B)$, $\neg(A\vee B)\to\neg(\neg A\to B)$, $\neg(A\vee\neg B)\to\neg(\neg A\to\neg B)$.

o. No son teoremas en C1 las siguientes formas de la implicación-conjunción: $(A\to B)\to\neg(A\wedge\neg B)$, $(A\to\neg B)\to\neg(A\wedge B)$, $(\neg A\to B)\to\neg(\neg A\wedge\neg B)$,

---

5 Además de la negación débil $\neg$, se tiene la *negación fuerte* $\sim$: ${\sim}X = \neg X\wedge X^0$.

6 La axiomatización de C1 por (1) a (10), (11.2 y (12.2), mas la regla (MP), es denotada en este orden por C1(1) a C1(12). C1(9) nos da la forma paraconsistente de reducción al absurdo, C1(10) nos garantiza la propagación del buen comportamiento, C1(11) representa el principio del tercero excluido, C1(12) permite la reducción de las negaciones. Las nociones de lenguaje, fórmula y consecuencia sintáctica (+) son definidas de la manera usual (Mendelson 1964).

7 CPC puede ser axiomatizado por C1(1) a C1(8), C1(12) y RA: $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ (Kleene 1952).

8 La negación fuerte tiene un comportamiento clásico.

9 Un sistema es *no trivial* si existe al menos una fórmula que no es teorema del sistema. Un sistema es *consistente* si no existe una fórmula tal que ella y su negación sean teoremas. En CPC estas dos nociones son equivalentes.

10 Un sistema es *finitamente trivializable* si existe una fórmula que al agregarla al sistema lo hace trivial.

11 El teorema de sustitución de equivalentes dice que si dos fórmulas son equivalentes entonces una de ella puede reemplazar a la otra en cualquier fórmula que ocurra.

12 $X^{□} = \neg(\neg X\wedge X)$. Observar que $X^{□}$ y X^0 son fórmulas diferentes y no equivalentes.

$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg(\neg A\wedge B)$, $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$, $\neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow(A\wedge B)$, $\neg(\neg A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$, $\neg(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(\neg A\wedge B)$, $\neg(A\wedge\neg B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\neg(A\wedge B)\rightarrow(A\rightarrow\neg B)$, $\neg(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$, $\neg(\neg A\wedge B)\rightarrow(\neg A\rightarrow\neg B)$, $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, $(A\wedge B)\rightarrow\neg(A\rightarrow\neg B)$, $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(\neg A\rightarrow B)$, $(\neg A\wedge B)\rightarrow\neg(\neg A\rightarrow\neg B)$.

p. No son teoremas en C1 las siguientes formas de la contraposición: $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$, $(A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow\neg A)$, $(\neg A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow A)$, $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$.

q. no $\vdash(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg\neg B)\rightarrow A)$.

r. $\neg(A\wedge\neg A)$ y $\neg(\neg A\wedge A)$ no son teoremas en C1, es decir ni A° ni $A^{\square}$ son teoremas (no todas las fórmulas deben tener un buen comportamiento).

s. no $\vdash A\rightarrow\neg\neg A$.

t. no $\vdash(\neg A)^{\circ}\rightarrow A^{\circ}$.

u. no $\vdash(\neg A)^{\square}\rightarrow A^{\square}$.

v. $\vdash(A\wedge\neg A)\rightarrow(\neg\neg(A\wedge\neg A)\vee\neg\neg(\neg A\wedge A))$, es decir $\vdash A\wedge\neg A\rightarrow(\neg A^{\circ}\vee\neg A^{\square})$.

w. Los axiomas son independientes entre si.

x. $\vdash B^{\circ}\rightarrow(B\rightarrow(\neg B\rightarrow A))$ [13].

y. (ET1) no es teorema de C1-C1(12), es decir en en el sistema C1 sin el axioma C1(12).

z. C1(12) no es teorema de C1-C1(12)+(ET1).

aa. $\neg\neg A\rightarrow A$ no es teorema de C1-$(\neg\neg A\rightarrow A)+(A^{\circ}\rightarrow(\neg A)^{\circ})$.

bb. C1(9) puede ser sustituido por (ET2)[14].

cc. Son equivalentes los sistemas C1-C1(12) y C1-C1(12)-C1(9)+(ET3)[15].

dd. Son equivalentes los sistemas C1-C1(9) -C1(12)+C1(9*) [16] y C1-C1(12)-C1(9)+(ET2).

ee. C1 no es caracterizable por matrices finitas (tablas de verdad).

La manipulación de sistemas contradictorios de manejo de información, la sistematización de códigos éticos y jurídicos que en general son contradictorios, son temas en los que la lógica paraconsistente tiene mucho que decir.

Semántica de valoraciones para C1

DA COSTA & ALVES (1977) PROPUSIERON UNA SEMÁNTICA PARACONSISTENTE BIVALUADA PARA C1.

Una *valoración paraconsistente* para C1 es una función v:For(C1)$\rightarrow\{0, 1\}$ tal que valen las siguientes condiciones [17]:

Para los axiomas C1(1) a C1(8),

---

13 *Esquema de trivialización 1* (ET1) = $B^{0}\rightarrow(B\rightarrow(\neg B\rightarrow A))$

14 *Esquema de trivialización 2* (ET2) = $(B^{0}\wedge B\wedge\neg B)\rightarrow A$.

15 *Esquema de trivialización 3* (ET3) = $(B^{0}\wedge B\wedge\neg B)\rightarrow\neg A$.

16 C1(9*) = $B^{0}\rightarrow((\neg A\rightarrow B)\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A))$.

17 Esta función de valoración no es verofuncional, ya que de $v(A)=1$ no podemos concluir que $v(\neg A)=1$ o que $v(\neg A)=0$.

i. $v(A \wedge B)=1 \leftrightarrow v(A)=1$ y $v(B)=1$.

ii. $v(A \vee B)=1 \leftrightarrow v(A)=1$ o $v(B)=1$.

iii. $v(A \rightarrow B)=1 \leftrightarrow v(A)=0$ o $v(B)=1$.

Para el axioma C1(9),

iv. $v(B^{o})=v(A \rightarrow B)=v(A \rightarrow \neg B)=1 \rightarrow v(A)=0$.

Para el axioma C1(10),

v. $v(A^{o})=v(B^{o})=1 \rightarrow v((A \wedge B)^{o})= v((A \vee B)^{o})= v((A \rightarrow B)^{o})=1$.

Para los axiomas C1(11) y C1(12),

vi. $v(A)=0 \rightarrow v(\neg A)=1$.

vii. $v(\neg\neg A)=1 \rightarrow v(A)=1$.

Algunas consecuencias son las siguientes:

a. $v(A)=0 \leftrightarrow v(\sim A)=1$[18].

b. $v(A^{o})=0 \leftrightarrow v(A)=1$ y $v(\neg A)=1$.

c. $v(A) \neq v(\neg A)$ y $v(B) \neq v(\neg B) \rightarrow v((A \wedge B)^{0})= v((A \vee B)^{0})= v((A \rightarrow B)^{0})=1$.

d. $\Gamma \vdash A \leftrightarrow \Gamma \models A$[19].

Da Costa & Alves (1977) presentan un procedimiento de decisión para C1 llamado quasi-matrices y cuya construcción para una fórmula A sigue los pasos del siguiente algoritmo:

1. Escriba en una línea una lista de las variables que intervienen en A.

2. Disponga bajo la línea anterior líneas sucesivas conteniendo todas las combinaciones posibles de 0 y 1 que puedan ser atribuidas a las variables.

3. Escriba en una nueva columna, la lista de todas las negaciones de las variables proposicionales; y para cada negación y para cada línea:

3.1 Escriba 1 si en aquella línea la variable negada toma el valor 0.

3.2 Bifurque la línea y escriba 0 en una parte y 1 en la otra si en aquella línea la variable negada toma el valor 1.

4. Haga una lista de las subfórmulas de A en orden creciente de complejidad y de la negación de las subfórmulas propias de A para cada subfórmula B y cada línea:

4.1 Si B no es una subfórmula negada, proceda como en la tabla de verdad de CPC.

4.2 Si $B=\neg C$, y si C toma el valor 0 escriba 1, si C toma el valor 1:

4.2.1 Si $C=\neg D$, verifique si D y $\neg D$ toman valores diferentes, en este caso escriba 0, en caso contrario bifurque la línea y escriba 0 en una parte y 1 en la otra.

4.2.2 Si $C=D \wedge \neg D$, escriba 0.

4.2.3 Si $C=D \wedge E$ o $C= D \vee E$ o $C=D \rightarrow E$, verifique por un lado que D y $\neg D$ toman valores diferentes y por otro lado que E y $\neg E$ toman valores diferentes, en este caso escriba 0, en caso contrario bifurque la línea y escriba 0 en una parte y 1 en la otra.

Consecuencias de lo anterior:

a. Toda valoración paraconsistente corresponde a alguna línea de la quasi-matriz.

b. Dada una línea cualquiera de la quasi-matriz, existe una valoración paraconsistente que a ella corresponde.

c. Una fórmula A es un teorema de C1 si la última columna de su quasi-matriz contiene solamente 1.

En las décadas de los 50 y los 60, en Brasil Newton da Costa construyó jerarquías infinitas de cálculos lógicos paraconsistentes, cálculos proposicionales, cálculos de predicados de primer orden con y sin identidad, cálculos de descriptores y teorías de conjuntos paraconsistentes.

Ejemplo:

Sea $A=\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg(q \vee p)$[21], no $\vdash$ A. Ver tabla 1.

---

18 Comportamiento clásico de $\sim$, pero no de $\neg$.

19 La noción de consecuencia semántica $\models$ es definida de la manera usual (Mendelson 1964).

20 $X \leftrightarrow Y=(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$

TABLA 1

p	q	p∨q	q∨p	¬p	¬q	¬(p∨q)	¬(q∨p)	A
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
					1	0	0	1
							1	0
						1	0	0
							1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1
				1	1	0	0	1
							1	0
						1	0	0
							1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1
					1	0	0	1
							1	0
						1	0	0
							1	1
				1	0	0	0	1
							1	0
						1	0	0
							1	1
					1	0	0	1
							1	0
						1	0	0
							1	1

CÁLCULOS TRIVALENTES L3, W3, J3

Cálculo L3

El cálculo L3 tiene la siguiente presentación axiomática (Wajsberg, 1931):

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
4. $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$

MP. $A,\ A \rightarrow B\ \therefore B$

Se definen:

$A \vee B = (A \rightarrow B) \rightarrow B$

$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$

$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$A \rightarrow_3 B = A \rightarrow (A \rightarrow B)$

$IA = A \leftrightarrow \neg A$ (A es indeterminado)

Las tablas de verdad que caracterizan L3 son construidas evaluando las fórmulas en $\{1, ½, 0\}$ (Prior 1955, 1997):

$v(A \wedge B) = \min\{v(A), v(B)\}$

$v(A \vee B) = \max\{v(A), v(B)\}$

$v(A \rightarrow B) = \min\{1, 1 - v(A) + v(B)\}$

$v(\neg A) = 1 - v(A)$

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	1	1/2	0
[illegible]	1/2	1/2	0
[illegible]	0	0	0

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	1	1	1
[illegible]	1	1/2	1/2
[illegible]	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

[illegible]	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	0	1/2	1

$\rightarrow_3$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

[illegible]	[illegible]
[illegible]	0
[illegible]	1/2
[illegible]	1

[illegible]	[illegible]
[illegible]	0
[illegible]	1
[illegible]	0

Donde 1 es el único valor distinguido. 1 significa verdadero, 0 significa falso y ½ significa neutro o indeterminado.

$A\vee\neg A$, $\neg(A\wedge\neg A)$ no son teoremas de L3, pero en L3 se tiene el *principio de trivalencia o ley del cuarto excluido*: $A\vee\neg A\vee IA$, vale el teorema de deducción para $\rightarrow_3$, vale la siguiente forma de la regla de sustitución de equivalentes: Si $A\leftrightarrow B$ y $IA\leftrightarrow IB$ entonces A puede ser sustituido por B en cualquier fórmula. Cuando eliminamos el valor ½, nos quedan las tablas de verdad clásicas, es decir, L3 es un fragmento de CPC.

Algunas consecuencias en L3

a. $(A\rightarrow B)\rightarrow((\neg A\rightarrow B)\rightarrow B)$, $\neg(A\leftrightarrow\neg A)$ no son teoremas en L3.

b. Vale el teorema de deducción para $\rightarrow_3$, pero no para $\rightarrow$.

c. Si $A\leftrightarrow B$ y $IA\leftrightarrow IB$ entonces podemos sustituir A por B en cualquier fórmula.

d. El teorema de sustitución por equivalencia no tiene validez general.

e. $A, B \vdash A\wedge B$

f. $A\wedge B \vdash B\wedge A$

g. $A, A\rightarrow_3 B \vdash B$

h. $A\wedge B \vdash A$

Cálculo J3

El cálculo J3 tiene la siguiente presentación axiomática (D´Ottaviano 1982):

1. $(\sim A\wedge 0A)\leftrightarrow\neg A$
2. $\sim\sim A\leftrightarrow A$
3. $0(\neg A)$
4. $((A\wedge B)\wedge 0(A\wedge B))\leftrightarrow((A\wedge 0A)\wedge(B\wedge 0B))$
5. $(\sim A\wedge 0A)\rightarrow 0(A\rightarrow B)$
6. $(B\wedge 0B)\rightarrow 0(A\rightarrow B)$

(MP) $A, A\rightarrow B \therefore B$

Donde se definen:

$0A=\neg(\neg(A\rightarrow(A\wedge\neg A))\wedge\neg(\sim A\rightarrow(A\wedge\neg A)))=\Box A\vee\Box\sim A=\neg(\Diamond A\wedge\Diamond\sim A)$

$\Diamond A=\neg(A\rightarrow(A\wedge\neg A))$

$A\equiv B=(A\leftrightarrow B)\wedge(\sim A\leftrightarrow\sim B)$

$A\vee B=\sim(\sim A\wedge\sim B)$

$\Box A=\sim(\Diamond\sim A)$

$A\leftrightarrow B=(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

$\neg A=\sim\Diamond A$

$\neg$ es la negación fuerte o clásica, $\sim$ es la negación débil, $\Diamond$ es el operador posibilidad, $\Box$ es el operador necesidad, 0 es el operador clásico, $\equiv$ es la equivalencia fuerte.

J3 está caracterizado por las siguientes matrices (D´Ottaviano & da Costa 1970)[21]:

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

$\leftrightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	1

[illegible]	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	1/2	0
0	0	0	1

[illegible]	$\neg$
1	0
1/2	0
0	1

[illegible]	$\sim$
1	0
1/2	½
0	1

[illegible]	0
1	1
1/2	0
0	1

[illegible]	[illegible]
1	1
1/2	0
0	0

[illegible]	0
1	1
1/2	1
0	0

Donde los valores designados son 1 y ½. 1 significa verdadero, 0 significa falso, ½ significa provisional.

En J3 tenemos las siguientes consecuencias:

a. Valen las leyes de De Morgan:

~(A∧B)→(~A∨~B), ~(A∧~B)→(~A∨B), ~(~A∧B)→(A∨~B), ~(~A∧~B)→(A∨B), ~(A∨B)→(~A∧~B), ~(A∨~B)→(~A∧B), ~(~A∨B)→(A∧~B), ~(~A∨~B)→(A∧B), (~A∨~B)→ ~(A∧B), (~A∨B)→~(A∧~B), (A∨~B)→ ~(~A∧B), (A∨B)→ ~(~A∧~B), (~A∧~B)→~(A∨B), (~A∧B)→ ~(A∨~B), (A∧~B)→ ~(~A∨B), (A∧B)→~(~A∨~B).

b. Valen las siguientes formas de la implicación-disyución:

(A→B)→(~A∨B), (A→~B)→(~A∨~B), (~A→B)→(A∨B), (~A→~B)→(A∨~B), ~(~A∨B)→ ~(A→B), ~(~A∨~B)→ ~(A→~B), ~(A∨B)→ ~(~A→B), ~(A∨~B)→ ~(~A→~B), ~ (A→B)→ ~(~A∨B), ~(A→~B)→ ~(~A∨~B), ~(~A→B)→ ~(A∨B), ~(~A→~B)→ ~(A∨~B).

c. No valen las siguientes formas de la implicación-disyución:

(~A∨B)→(A→B), (~A∨~B)→(A→~B), (A∨B)→(~A→B), (A∨~B)→(~A→~B).

d. Valen las siguientes formas de la implicación-conjunción:

(A→B)→ ~(A∧~B), (A→~B)→ ~(A∧B), (~A→B)→~(~A∧~B), (~A→~B)→~(~A∧B), ~(A→B)→(A∧~B), ~(A→~B)→(A∧B), ~(~A→B)→(~A∧~B), ~(~A→~B)→(~A∧B). (A∧~B)→ ~(A→B), (A∧B)→~(A→~B), (~A∧~B)→ ~(~A→B), (~A∧B)→ ~(~A→~B).

i. No valen las siguientes formas de la implicación-conjunción:

~(A∧~B)→(A→B), ~(A∧B)→(A→~B), ~(~A∧~B)→(~A→B), ~(~A∧B)→(~A→~B)

j. No valen las siguientes formas de la contraposición:

(A→B)→(~B→~A), (A→~B)→(B→~A), (~A→B)→(~B→A), (~A→~B)→(B→A).

21 Las tablas de ∧, ∨, ~ y 0 en J3 son las mismas de ∧, ∨, ¬ y la contraria de I en L3.

k. No valen: $\sim A \to (A \to B)$,
$(A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$,
$(A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$,
$((A \vee B) \wedge \sim A) \to B$, $(A \wedge \sim A) \to B$,
$(A \leftrightarrow B) \to (\sim B \leftrightarrow \sim A)$.

l. Valen: $\sim(A \wedge \sim A)$, $A \vee \sim A$,
$(A \wedge \sim A \wedge 0A) \to B$, $\sim(A \vee \sim A \vee 0A) \to B$,
$\sim(\sim A \wedge \sim B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$,
$(A \wedge \sim A \wedge 0A) \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$.

m. La regla de sustitución de equivalentes no vale en general, sólo vale para la equivalencia fuerte.

n. Vale el teorema de deducción.

o. Valen $A \wedge B \to B$, $A \wedge B \to B \wedge A$

p. $A, B \vdash A \wedge B$

q. $A, B \vdash C$ sii $\vdash A \wedge B \to C$

r. Valen $(\sim A \wedge 0A) \leftrightarrow \neg A$, $\sim\sim A \leftrightarrow A$,
$0(\neg A)$, $(B \wedge 0B) \to 0(A \to B)$,
$((A \wedge B) \wedge 0(A \wedge B)) \leftrightarrow ((A \wedge 0A) \wedge (B \wedge 0B))$,
$(\sim A \wedge 0A) \to 0(A \to B)$,

Tenemos que J3 es indudablemente un cálculo paraconsistente.

Cálculo W3

El cálculo trivalente W3 está caracterizado por las siguientes matrices:

	1	1	0
	1/2	1/2	0
	0	0	0

	1	1/2	0
	1	1/2	0
	0	0	0

	1	1/2	0
	1	1/2	0
	1/2	1/2	0
	0	0	0

	1	1/2	0
	1	1	1
	1/2	1/2	1/2
	1	1	0

	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1	1/2	1
0	1	1/2	0

	1	1/2	0
	1	1/2	1
	1/2	1/2	1/2
	1	1/2	0

	1	1	0
	1/2	1/2	0
	1	1	1

	1	1/2	0
	1	1/2	0
	1	1/2	1

	1	1/2	0
	1/2	1/2	0
	1	1/2	1

	0
	0
	1

	0
	½
	1

Donde 1 y ½ son los valores distinguidos, 0 significa falso, 1 significa verdadero y ½ significa verdadero por defecto, esto es, por falta de evidencia de lo contrario. Una fórmula con un valor ½ puede tornarse verdadera en el futuro, en este caso su negación debe ser 0, esto es capturado por la ***negación local*** $\neg_L$. Una fórmula con un valor ½ puede continuar como está; en este caso su negación debe ser ½. Esta idea es capturada por la ***negación continua*** $\neg_C$.

Podemos definir en W3 todos los conectivos de J3:

$A \vee B = \neg_C((\neg_C A) \wedge_3 (\neg_C B))$
$\Diamond A = \neg_L \neg_L A$
$\sim A = \neg_C A$

Podemos definir en J3 los conectivos de W3:

$A \wedge_1 B = \sim(A \to \sim(\sim B \to B)))$
$A \wedge_2 B = B \wedge_1 A$
$A \wedge_3 B = B \wedge A$
$A \vee_1 B = (\sim A \to ((\sim B \to B) \to A)) \to A$
$A \vee_2 B = B \vee A$
$A \vee_3 B = (A \vee_1 B) \wedge (A \vee_2 B)$
$A \to_1 B = \sim((\sim B \to B) \to \sim((\sim A \to A) \to A))$
$A \to_2 B = (\sim A \to (\sim A \to (\sim B \to B))) \to B$
$A \to_3 B = (A \to_1 B) \wedge (A \to_2 B)$
$\neg_L A = \sim\Diamond A$
$\neg_C A = \sim A$

Ambas W3 y J3 tienen 1 y ½ como valores distinguidos, por lo tanto son deductivamente equivalentes. Podemos tomar $\{\neg_L, \neg_C, \wedge_3\}$ como conectivos primarios.

Semántica de traducciones posibles para C1

Se interpretarán las fórmulas de C1 utilizando las matrices de W3 (Carnielli y Marcos 1999).

Definimos un conjunto T de funciones de traducción (morfismos entre las fórmulas de C1 y las de W3). Para cada función * en T tenemos las siguientes restricciones:

Tr1. Para una variable atómica P:

$P^* = P$

$(\neg P)^* = \neg_C P$

Tr2. Para fórmulas del tipo A#B, con $\# = \wedge, \vee, \rightarrow$:

$(A \wedge \neg A)^* = A^* \wedge_3 (\neg A)^*$

$(A\#B)^* = A^* \#_1 B^*$ si $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ y $(\neg B)^* = \neg_L B^*$

$(A\#B)^* = A^* \#_2 B^*$ si $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ y $(\neg B)^* = \neg_C B^*$

$(A\#B)^* = A^* \#_3 B^*$ en los demás casos.

Tr3. Para fórmulas del tipo $\neg(A\#B)$, con $\# = \wedge, \vee, \rightarrow$:

$(\neg(A \wedge \neg A))^* = \neg_L (A \wedge \neg A)^*$

$(\neg(A\#B))^* = \neg_L (A\#B)^*$ si $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ y $(\neg B)^* = \neg_L B^*$

$(\neg(A\#B))^* \in \{\neg_L (A\#B)^*, \neg_C (A\#B)^*\}$ en los demás casos.

Tr4. Para fórmulas del tipo $\neg\neg A$:

$(\neg\neg A)^* = \neg_L (\neg A)^*$ si $(\neg A)^* = \neg_L A$

$(\neg\neg A)^* \in \{\neg_L (\neg A)^*, \neg_C (\neg A)^*\}$ en caso contrario.

Decimos que una fórmula de W3 es una ***traducción posible*** de una fórmula de C1 cuando aquella es una imagen de esta por medio de una función de traducción. Una ***semántica de traducciones posibles*** para C1 es una pareja TP=(W3, T). Una ***valoración*** de TP es una función que lleva fórmulas de W3 en elementos del conjunto de valores de verdad $\{1, ½, 0\}$. Decimos que una fórmula A es ***válida*** si para cada valoración w de TP, w(A) asume un valor distinguido. Decimos que una valoración w es un ***modelo*** para un conjunto Γ de fórmulas si w(A) asume un valor distinguido para todo $A \in \Gamma$. Decimos que ***Γ fuerza A*** en W3 (lo denotamos **$\Gamma \models_3 A$**) si para todo modelo w de Γ tenemos que w(A) asume un valor distinguido. Definimos la relación de ***forzamiento local*** ($\Gamma \models_{*TP} A$; lease Γ fuerza A sobre la traducción * en la semántica TP) por

$$\Gamma \models_{*TP} A \leftrightarrow \Gamma^* \models_3 A^*$$

Definimos la relación de *forzamiento global* ($\Gamma \models_{TP} A$; lease Γ forza A en la semántica TP) por

$$\Gamma \models_{TP} A \leftrightarrow \Gamma \models_{*TP} A \text{ para toda * en T}$$

Cuando Γ es vacío, $\models_{*TP} A$, se lee, A es posiblemente válido, $\models_{TP} A$, se lee, A es necesariamente válido.

Algunas consecuencias son las siguientes:

a. $w(A^*)=0 \leftrightarrow w(\neg_L A^*)=1$

b. $w((A^o)^*)=0 \leftrightarrow w(A^*)=1/2$ y $w((\neg A)^*)=1/2$

c. $w((A^o)^*)=1 \leftrightarrow w(A^*)=0$ o $w((\neg A)^*)=0$

d. $[w(A^*)=0$ o $w((\neg A)^*)=0]$ y $[w(B^*)=0$ o $w((\neg B)^*)=0] \rightarrow w(((A\#B)^o)^*)=1$ donde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

e. $w(A^*)=0 \leftrightarrow w((\sim A)^*)=1$

f. $w((\neg_L A)^*)=1 \leftrightarrow w((\sim A)^*)=1$

g. $w((\sim A)^*) \in \{1, 0\}$

h. $w(\neg_L A^*) \in \{1, 0\}$

i. Dada una función de traducción * y una valoración w en TP, podemos encontrar una valoración paraconsistente v tal que para toda fórmula A en C1, $v(A)=1 \leftrightarrow w(A^*) \in \{1, ½\}$ (basta tomar $v(A)=1 \leftrightarrow w(A^*) \in \{1, ½\}$ y $v(A)=0 \leftrightarrow w(A^*)=0$).

j. Dada una valoración paraconsistente v podemos encontrar una función de traducción * y una valoración w en TP tal que para toda fórmula A en C1, $v(A)=1 \leftrightarrow w(A^*) \in \{1, ½\}$.

k. $\vdash A \leftrightarrow \models_{TP} A$

Se tiene un procedimiento de verificación: Dada una fórmula de C1, hacemos todas sus traducciones posibles luego calculamos sus valores de verdad usando las matrices de W3. Esto puede ser un trabajo arduo, para simplificar un poco podemos observar lo siguiente:

Ambas negaciones $\sim$ y $\neg_L$ producen el mismo efecto por lo que puede tenerse una nueva restricción para fórmulas de tipo $\sim A$, Tr5: $(\sim A)^* = \neg_L A^*$. Por otro lado, se observa que los conectivos de W3 extienden los conectivos clásicos, entonces cuando deseemos interpretar una fórmula cuyas subfórmulas sean siempre del tipo $A \wedge B$ o del tipo $A \vee B$ o del tipo $A \rightarrow B$ o del tipo $\sim A$, podemos usar directamente las matrices del cálculo proposicional clásico. También observamos que si una subfórmula A#B de una fórmula que queremos evaluar no aparece simultáneamente en el interior de una subfórmula negada, entonces no hay necesidad de recurrir a la traducción de la negación de A y de B para decidir la traducción de #, pues todas son equivalentes; podemos simplemente elegir una, digamos $\#_3$.

Ejemplo: no $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$

Tenemos 2 traducciones posibles para esta fórmula, $P \to_3 \neg_L \neg_C P$ y $P \to_3 \neg_C \neg_C P$

P	$\neg_C P$	$\neg_L \neg_C P$	$\neg_C \neg_C P$	$P \to_3 \neg_L \neg_C P$	$P \to_3 \neg_C \neg_C P$
1	0	1	1	1	1
½	½	0	½	0	½
0	1	0	0	1	1

Es importante resaltar que todos los resultados son constructivos. Combinando estos resultados tenemos por tanto, para cada fórmula, una forma de mapear su quasimatriz y también una tabla que producimos al verificar sus traducciones posibles según las matrices de W3.

Ejemplo, para el caso de $P \to \neg\neg P$, tenemos:

Traducciones

***1** $= P \to_3 \neg_L \neg_C P$
***2** $= P \to_3 \neg_C \neg_C P$

Quasimatriz

P	$\neg P$	$\neg\neg P$	$P \to \neg\neg P$	Línea k
0	1	0	1	**k1**
1	0	1	1	**k2**
	1	0	0	**k3**
		1	1	**k4**

Semántica de traducciones posibles

P	$\neg_C P$	$\neg_L \neg_C P$	$\neg_C \neg_C P$	*1	*2	w
1	0	1	1	1	1	**w1**
½	½	0	½	0	½	**w2**
0	1	0	0	1	1	**w3**

Podemos partir de cualquier línea k de la quasimatriz y encontrar la valoración w y la traducción posible * correspondientes en la semántica de traducciones posibles.

Línea k	Valoración w	Traducción *
k1	w3	*1
k2	w1	*1
k3	w2	*1
k4	w2	*2

Recíprocamente, a partir de una valoración w y de una traducción posible * en TP, podemos encontrar la línea k correspondiente en la quasimatriz.

Línea k	*1	*2
w1	K2	k2
w2	K3	k4
w3	K1	k1

REFERENCIAS

Alves, E.H. (1976). *Lógica e inconsistencia: um estudo dos cálculos Cn.* Sao Paulo, 137p. Tese (Mestrado em Filosofia)- Faculdade de Filosofia, Letras e Ciencias Humanas, Universidade de Sao Paulo.

Alves, E. H., Queiroz, G. S. (1991). The construction of the calculi Cn of da Costa. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.8, n.2, p.67-78.

Arruda, A.I. (1964). *Consideracoes sobre os Sistemas Formais NFn*, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.

Bazhanov, V.A. *N.A.* (1989). *Vasilev*, Nauka, Moscu.

Carnielli, W. A., Marcos, J. (1999). Possible-translations semantics and dual logics. Por aparecer en *Soft Computing*, 16p.

- Limits for paraconsistent calculi. Submetido a publicacao, 1999b, 11p.

- Strngthening the notion of paraconsistency, 1999c. Por aparecer.

Da Costa, N.C.A. (1986). On paraconsistent set theory, *Logique et Analyse*, 115, 361-371.

Da Costa, N.C.A. (1964). Sur un systeme inconsistant de théorie des ensembles. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 258, 3144-3147.

Da Costa, N.C.A., Alves, E. H. (1977). A semantical analysis of the calculi Cn. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.18, n.4, 621-30.

Da Costa, N.C.A., Dubikajtis, L. (1968). Sur la logique discoursive de Jaskowski, Bull. Acad. Pol. Sc., 15, 551-557.

De Almeida, J.M. (1999). *Possible-translations semantics*. Campinas, 1999. xxv + 230p. Tese (Mestrado em Lógica e Filosofia da Ciencia)- Instituto de Filosofia e Ciencias Humanas, Universidade Estadual de Campinas.

De Araujo, A.L.; Alves, E.H.; Guerzoni, J.A.D. (1987). Some relations between modal and paraconsistent logic. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.4, n.2, p.33-44.

D´ Ottaviano, I.M.L. (1982). *Sobre una teoría de modelos trivalente*. Campinas, 1982. 98p. Tese (Doutorado em Matemática)- Instituto de Matemática, Estadística e Ciencia da computacao, Universidade Estadual de Campinas.

D´Ottaviano, I.M.L.; da Costa, N.C.A. (1970). Sur un probleme de Jaskowski. *Comtes Rendus de l´Academie de Sciences de Paris*, Series A-B, t.270, p.1349-53.

Loparic, A.; Alves, E.H. (1980). The semantics of the systems Cn of da Costa. In: *Brazilian conference on mathematical logic, 3, 1980*. A. I. Arruda, N. C. A. Da Costa, A. M. Sette (Ed.) Proceedings... Sao Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica. P.161-72.

Mendelson, E. (1964). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: Van Nostrand. 300p.

Sette, A.M. (1973). On the propositional calculus P1. *Mathematica Japonicae*, v.18, p.173-80.