Algunos elementos sobre la teoría de **Ultradistribuciones**

Jairo Alberto Villegas Gutiérrez

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Distribuciones es una de las áreas de más rápido desarrollo en el Análisis Funcional. Sus aplicaciones en la física moderna, ecuaciones diferenciales y análisis armónico, hacen de este campo uno de los focos de mayor investigación actualmente. El objetivo que se pretende con este trabajo es dar a conocer algunos elementos de la Teoría de Distribuciones Generalizadas.

Históricamente los fundamentos de la teoría de Distribuciones se dan alrededor de los años veinte con los trabajos del físico Dirac, él introdujo la "función δ", definida en IR con las siguientes propiedades:

a) $\delta(x)=0 \quad \text{para } x\neq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$

c) $f(a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(a-x)dx, \quad a\in \mathrm{IR}$ y $f\in C(\mathrm{IR})$.

Desde el punto de vista del rigor matemático todo esto no tenía sentido. Para el mismo Dirac δ no es una función en el sentido clásico de la palabra, él observó que δ actuaba como un "operador" en la función f. Tomó aproximadamente treinta años descubrir los fundamentos matemáticos de una formulación correcta de la definición y propiedades de la "función δ". Fué Laurent Schwartz en 1944 quién con base en los trabajos de Cartan, Sovolev, Dieudonné, Grothendieck, etc. descubre la teoría de Distribuciones. También los matemáticos rusos Gelfand y Shilov contribuyeron fuertemente en el desarrollo de una teoría coherente.

La Teoría de Distribuciones es una de las áreas de más rápido desarrollo en el Análisis Funcional. Sus aplicaciones en la física moderna, ecuaciones diferenciales y análisis armónico, hacen de este campo uno de los focos de mayor investigación actualmente.

La teoría de distribuciones extiende el cálculo diferencial a ciertas *formas lineales continuas* definidas en un espacio topológico de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, denotado $D(\Omega)$,donde $\Omega\subset \mathrm{IR}^n$ es un abierto no vacío. Además las seminormas

$$p_N(f)=max\{|D^\alpha f(x)|: x\in K_N, |\alpha|\leq N\}, \qquad N=1,2,3\ldots$$

definen una topología metrizable localmente convexa sobre $C^\infty(\Omega)$ (funciones infinitamente diferenciables). Acá,

---

JAIRO ALBERTO VILLEGAS G. Departamento de Ciencias Básicas. Escuela de Ciencias y Humanidades, Universidad EAFIT. Medellín, Colombia.
e-mail: javille@sigma.eafit.edu.co

K_N, $N = 1,2,3\ldots$ son conjuntos compactos tales que $K_N \subset K^{o}_{N+1}$ (interior de K_{N+1}) y $\bigcup K_N = \Omega$.

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

es un multiíndice y $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ es su longitud.

Esas formas lineales continuas se llaman *funciones generalizadas o distribuciones.* Además esta clase de funciones, es mucho más amplia que la clase de funciones diferenciables en el sentido ordinario. Una de las características más importantes de esta teoría es que permite aplicar técnicas de transformación de Fourier a muchos problemas de ecuaciones en derivadas parciales que no pueden ser resueltos por métodos clásicos.

El impacto de las Distribuciones de Schwartz sobre la teoría de ecuaciones diferenciales parciales es hoy un hecho bien reconocido. No hay exageración en señalar que esta teoría ha revolucionado la matemática aplicada en los últimos cincuenta años, con los trabajos Malgrange, Ehrenpreis y Hörmander.

2. PRELIMINARES DE ULTRADISTRIBUCIONES

En 1961 en un seminario en Stanford, Beurling presenta los fundamentos de cierta teoría más general que la teoría de distribuciones, las *ultradistribuciones* o distribuciones generalizadas. Más tarde Björck con base en los trabajos de Beurling, desarrolla en forma coherente esta teoría, ver (Björck, 1965). También hay otros trabajos sobre teoría de ultradistribuciones como son los de Komatsu, Roumieu y últimamente los de Braun, Meise y Taylor, ver (6).

Los preliminares de la teoría de ultradistribuciones podemos considerarlos que comienzan con el siguiente problema:

Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $sopf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ (soporte de la función f) es un conjunto compacto, entonces por el *Teorema de Paley-Wiener-Schwartz,* ver (8), f es una función analítica entera de tipo exponencial, donde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las distribuciones temperadas, es decir, el dual topológico del espacio de las funciones de decrecimiento rápido S, en el cual la colección numerable de seminormas

$$q_N(f) = \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^N |D_\alpha f(x)| < \infty, \quad N = 1,2,3\ldots,$$

define una topología localmente convexa, $D_\alpha = (i)^{-|\alpha|} D^\alpha$

Si f está en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq \infty$, entonces se sabe que para cualquier multiíndice α,

$$\|D^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad 0 < p \leq q \leq \infty \quad \textbf{(1)}$$

La expresión **(1)** es una desigualdad del tipo Plancherel-Polya-Nikol´skij.

Un problema de interés en análisis de Fourier, es el de encontrar condiciones sobre las medidas de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ ν y λ, para las desigualdades de tipo Plancherel-Polya-Nikol´skij

$$\|D^\alpha f\|_{L^q(\nu)} \leq C \|f\|_{L^p(\lambda)} \quad 0 < p \leq q \leq \infty \quad \textbf{(2)}$$

sean válidas, donde f pertenece al conjunto:

$$\left\{ f \in S'_\omega(\mathbb{R}^n) : sop\hat{f} \subset \Omega \text{ y } \|f\|_{L^p(\lambda)} < \infty \right\}$$

acá $\hat{f}$ es la transformada de Fourier, Ω un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$, $0 < p < \infty$. Es una cuasi-norma si $0<p<1$ o una norma si $1 \leq p < \infty$.

Una de las características más importantes de esta teoría es que permite aplicar técnicas de transformación de Fourier a muchos problemas de ecuaciones en derivadas parciales que no pueden ser resueltos por métodos clásicos.

Se sabe que una desigualdad del tipo **(2)** dentro del marco de las distribuciones temperadas clásicas S', implica restricciones nada naturales sobre las medidas ν y λ. Por ejemplo, si $d\nu = d\lambda = \rho(x)dx$ con $\rho(x) = exp\left(\pm |x|^\beta\right)$, con $0 < \beta < 1$, el espacio es completamente inadecuado y se hace necesario trabajar con el espacio de las *Ultradistribuciones temperadas de Beurling* S'_ω(ω es un peso adecuado). Por este motivo se han introducido y estudiado, en análisis de Fourier, ver **(2)** cap.1, los espacios L_P *pesados de funciones analíticas enteras*

$$L_P^\Omega(\lambda) := \left\{ f \in S'_\omega(\mathbb{R}^n) : sop\hat{f} \subset \Omega \text{ y } \|f\|_{L^p(\lambda)} < \infty \right\}$$

y los correspondientes espacios mixtos, ver **(4)** cap. 1.

Se verán ahora algunas definiciones y propiedades que conducen al objetivo del trabajo.

En lo que sigue, $\mathbb{R}^n$ denota el n-espacio Euclídeo, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ y $|x|$ la distancia de x al origen.

Definición 2.1. Sea M la colección de funciones ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por $\omega(x)=\sigma(|x|)$, donde $\sigma(t)$ es una función creciente, cóncava, continua en $[0,\infty)$ y con las siguientes propiedades:

(a) $0=\sigma(0)\le\sigma(t)+\sigma(s)$, para todo $t\ge 0$ y $s\ge 0$.

(b) $\int_0^\infty \frac{\sigma(t)}{1+t^2}dt<\infty$ **(3).**

(c) Existen constantes reales c y d con d positivo tales que $\sigma(t)\ge c+d\,log(1+t),\ t\ge 0$ **(4).**

Definición 2.2. Si $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces la *Transformada de Fourier* se define por $(F\varphi)(\xi)=\hat{\varphi}(\xi)=\int_{R^n} e^{-ix.\xi}\varphi(x)d_m(x), \xi\in\mathbb{R}^n$, donde $d_m(x)=(2\pi)^{-n/2}dx$ **(5)**.

La *Transformada inversa de Fourier* se define por

$$(F^{-1}\varphi)(x)=\int_{R^n} e^{ix.\xi}\hat{\varphi}(\xi)d_m(\xi),\ x\in\mathbb{R}^n \quad \textbf{(6).}$$

Definición 2.3. Sea $\omega\in M$, denotamos por D_ω la colección de todas las funciones $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $sop\varphi$ compacto tales que $\|\varphi\|_\omega^\lambda=\int_{R^n}|\hat{\varphi}(x)|e^{\lambda\omega(x)}dx<\infty,\quad \lambda>0$.

Los elementos de D_ω se llaman funciones de prueba.

Definición 2.4. Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\omega\in M$, entonces $D'_\omega(\Omega)$ denota el *espacio de todos los funcionales lineales continuos* en $D(\Omega)$.

Una definición equivalente es la siguiente: $D'_\omega(\Omega)$ es el espacio de todos los funcionales lineales $u\in D(\Omega)$ tales que para todo conjunto compacto $K\subset\Omega$, existe $\lambda>0$ y una constante C positiva tal que

$$|u(\varphi)|\le C\|\varphi\|_\lambda^\omega\ ,\ \text{para todo}\ \varphi\in D_\omega(K).$$

$D'_\omega(\Omega)$ está dotado de la topología débil, ésto es, la topología dada por las seminormas $u\to|u(\varphi)|$, donde φ es cualquier elemento D_ω.

De igual manera, S_ω denota la colección de todas las funciones $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\varphi,\hat{\varphi}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y verifican

$$p_{\alpha,\lambda}(\varphi)=\sup_{x\in R^n} e^{\lambda\omega(x)}|D^\alpha\varphi(x)|<\infty \quad \textbf{(7)}$$

y

$$q_{\alpha,\lambda}(\varphi)=\sup_{x\in R^n} e^{\lambda\omega(x)}|D^\alpha\hat{\varphi}(x)|<\infty \quad \textbf{(8)}$$

Para todo multiíndice α y todo $\lambda>0$.

La topología localmente convexa de S_ω, es definida por las seminormas $p_{\alpha,\lambda}$ y $q_{\alpha,\lambda}$.

El dual topológico S_ω de se denota por S'_ω. Los elementos de S'_ω se llaman *ultradistribuciones temperadas.*

Nota: Recuerde que el dual topológico de S_ω es la colección de todos los funcionales lineales continuos sobre S_ω.

Observación. Algunos hechos importantes que se resaltan son los siguientes:

- Si $\omega(x)=log(1+|x|)^d$, $d>0$, entonces $D_\omega=D$, el espacio de las funciones de prueba y $S_\omega=S$, el espacio las funciones de decrecimiento rápido de Schwartz.

- La condición (4) asegura que D_ω y S_ω son subespacios de D y S, respectivamente.

- Si $\omega(x)=\sigma(|x|)$, donde $\sigma(t)$ es una función creciente, cóncava y continua en $[0,\infty)$ con $\sigma(0)=0$, entonces D_ω es no trivial si y solo si la condición (3) se tiene, es decir, no existen funciones $\varphi(x)\in D_\omega$ nulas.

3. ESPACIOS L_P PESADOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS ENTERAS

Cuando se trabaja con espacios pesados en análisis de Fourier, las *ultradistribuciones* son una herramienta natural y poderosa. Las propiedades globales de admisibilidad de funciones peso apropiadas $\rho(x)$, en particular condiciones de crecimiento en el infinito, son descritas muy bien usando el lenguaje de las ultradistribuciones. A continuación se describen algunos resultados básicos sobre estos espacios.

Definición 3.1. Sea $\omega\in M$, $R(\omega)$ denota la colección de todas las funciones reales ρ medibles Borel sobre $\mathbb{R}^n$, tales que existe una constante positiva c con la siguiente propiedad:

$$0<\rho(x)\le c\rho(y)e^{\omega(x-y)} \quad \textbf{(9)}$$

para todo x, y en $\mathbb{R}^n$

Cuando se trabaja con espacios pesados en análisis de Fourier, las *ultradistribuciones* son una herramienta natural y poderosa.

Definición 3.2. Sea h > 0, M^h denota la colección de todas las medidas μ de Borel en IR^n, con la propiedad $\mu(Q_j^h)=1$ para todo cubo $Q_j^h=\{x:x\in \mathrm{IR}^n \ ,hj_k\leq x_k<h(j_k+1),k=1,...,n\}$, donde $j\in Z_n$.

Definición 3.3. Sea $\omega\in \mathrm{M}$, $\rho(x)\in \mathrm{R}(\omega)$ y $\mu\in M^h$, $K_h(\rho,\mu)$ denota la colección de todas las funciones reales κ, medibles Borel en IR^n, con las siguientes propiedades:

(a) existe una constante positiva c tal que

$$0\leq\kappa(x)\leq c\rho(x) \quad \textbf{(10).}$$

para todo $x\in \mathrm{IR}^n$.

(b) existen dos constantes positivas δ y r, y un subconjunto G medible Borel de IR^n con $\mu(G\cap Q_j^h)\geq\delta$ para todo cubo Q_j^h y $r\rho(x)\leq\kappa(x)$ para todo $x\in G$.

Nota: Si $\omega\in \mathrm{M}$ entonces $\rho(x)=e^{\omega(x)}\in \mathrm{R}(\omega)$, en particular,

$$\rho(x)=(1+|x|)^d\in \mathrm{R}\left(\log(1+|x|)^d\right),\ d>0$$

y

$$\rho(x)=e^{|x|^\beta}\in \mathrm{R}\left(|x|^\beta\right),\ 0<\beta<1.$$

Estos son dos ejemplos interesantes, pues el primero puede ser tratado en el sentido usual de las distribuciones, mientras el segundo no. Éste último conlleva a las ultradistribuciones de Gevrey.

Para terminar se mencionarán algunos casos interesantes en el estudio de los espacios L_P pesados, como es el análisis de desigualdad del tipo Plancherel-Polya-Nikol´skij

$$\|\kappa_1 D^\alpha f\|_{L^q(\nu)}\leq C\|\kappa_2 f\|_{L^p(\lambda)} \quad 0<p\leq q\leq\infty.$$

para todo $f\in S_\omega^\Omega$, donde $S_\omega^\Omega=\{f:f\in S_\omega \text{ y } sop\hat{f}\subset\Omega\}$ y $\kappa_i\in K_h(\rho,\mu)$, $i=1,2$ con $\rho(x)\in \mathrm{R}(\omega)$ y $\omega\in \mathrm{M}$.

Un primer paso consiste en analizar el caso particular donde las medidas ν y λ son de la forma $d\nu=d\lambda=\kappa_1(x)d\mu_1=\kappa_2(x)d\mu_2=\rho(x)dx$ con $\rho(x)\in \mathrm{R}(\omega)$ y $\omega\in \mathrm{M}$, acá dx es la medida de Lebesgue.

Otro resultado interesante que se presenta es cuando se extiende el caso a medidas ν del tipo $d\nu=\kappa(x)d\mu$, donde la medida $\mu\in M^h$ tiene la estructura de retículo y regula el comportamiento local, mientras el peso $\kappa(x)\in K_h(\rho,\mu)$ controla el crecimiento.

Por último, el caso donde las medidas ν y λ son de la forma $d\nu=\kappa_1(x)d\mu_1$, $d\lambda=\kappa_2(x)d\mu_2$ con $\mu_i\in M^h$, $\kappa_i(x)\in K_h(\rho,\mu_i)$, para $i=1,2$, y $\rho(x)\in \mathrm{R}(\omega)$, y el espacio pesado es de la forma

$$L_P^\Omega(\kappa,\mu):=\left\{f: f\in S_\omega'(\mathrm{IR}^n), sop\hat{f}\subset\Omega \text{ y } \|\kappa f\|_{L^p(\mu)}<\infty\right\},$$
$$0<p\leq\infty$$

el cual es más general que el espacio S_ω^Ω.

El espacio $L_P^\Omega(\kappa,\mu)$ es cuasi-Banach, es decir, un espacio cuasi-normado y completo.

Es un espacio de Banach si $1\leq p\leq\infty$.

Nota: Si μ es una medida de Borel en IR^n, entonces

$$\|f\|_{L^p(\mu)}=\left(\int_{R^n}|f(x)|^p d\mu\right)^{1/p},\ 0<p<\infty \quad \textbf{(*)}$$

y

$$\|f\|_{\infty,\mu}=\mu-ess\sup_{x\in R^n}|f(x)| \quad \textbf{(**)}$$

Si $0\leq p\leq\infty$ entonces **(*)** y **(**)** son normas.

Si 0 < p< 1, entonces **(*)** es una cuasi-norma. Recordemos que una cuasi-norma $\|\cdot\|_A$ en un espacio lineal complejo A, cumple las siguientes propiedades:

(a) $\|a\|_A>0$, si $a\neq 0$

(b) $\|\beta a\|_A=|\beta|\|a\|_A$ si $a\in A$ y $\beta\in C$

(c) Existe una constante ϵ tal que $\|a+b\|_A\leq\varepsilon(\|a\|_A+\|b\|_A)$ para todo $a\in A$ y $b\in A$.

4. REFERENCIAS

Björck. G. (1965) Linear partial differential operators and generalized distributions. Ark. Mat. 6, 351-407.

Braun, R.,W. R. Meise, B.A. Taylor. (1990). Ultradifferentiable functions and Fourier Analysis. Results in Mathematics 17, 206-237.

Hormander, L. (1983). *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.*

(Distribution Theory and Fourier Analysis). Berlin: Springer-Verlag .

Triebel, H. (1977). *Fourier Analysis and Function Spaces.* Leipzig: Teubner.

Triebel, H. (1977). Spaces of distributions with weights. Multipliers in L_P - Spaces with weights. *Math. Nachr.* 78, 339-355.

Triebel, H. (1980). Maximal inequalites, Fourier multipliers, Littlewood-Paley theorems and approximation by entere analytic functions in weighted spaces. Anal.Math 6, 87-103.

Triebel. H. and J.H Schmeisser (1987). *Topics in Fourier Analysis and function Spaces.* New York. John Wiley & Sons.

Rudin, W. (1973) Functional Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, New York.