Ecuación
Diferencial $X'(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t)$
Un método de solución

Jorge Iván Castaño

RESUMEN

Para la ecuación diferencial $X'(t)=A(t)X(t) + X(t)B(t)$ sujeta a $X(0)=C$ donde $X(t)$, $A(t)$ y $B(t)$ son funciones matriciales, se conocen soluciones aproximadas las cuales utilizan el método matricial de un solo paso y las funciones matriciales B-spline lineales que interpolan la solución numérica en una malla de puntos.

En este articulo se construye una solución aproximada para problemas de valor inicial utilizando el método de desarrollos de FER, el cual consiste en encontrar una solución aproximada en términos de funciones exponenciales matriciales.

En primer lugar se dan algunos conceptos básicos que son utilizados posteriormente para encontrar soluciones aproximadas de las ecuaciones $Y'(t)=A(t)Y(t)$ y $Z'(t)=Z(t)B(t)$ sujetas a las condiciones iniciales $Y(0)=I$ y $Z(0)=I$ donde I es la matiz identidad. Con estos resultados se construye la solución que se pretende y al final se hace un análisis de la convergencia.

INTRODUCCIÓN

La ecuación diferencial $X'(t)=A(t)X(t)+X(t)B(t)$ sujeta a $X(0)=C$, con $a £ t £ b$ surge en muchos campos de ciencia e ingeniería, principalmente en problemas de optimizacion en teoría de control lineal.

La ecuación en cuestión ha sido estudiada por muchos autores para el caso de coeficientes constantes, sin embargo para el caso donde los coeficientes son variables, tal ecuación tiene poco tratamiento.

> **La ecuación diferencial $X'(t)=A(t)X(t)+X(t)B(t)$ sujeta a $X(0)=C$, con $a £ t £ b$ surge en muchos campos de ciencia e ingeniería, principalmente en problemas de optimización en teoría de control lineal.**

Se sabe que la solución teórica de dicha ecuación esta dada por $X(t)=Y(t)CZ(t)$ donde Y(t) y Z(t) son las soluciones de las ecuaciones diferenciales $Y'(t)=A(t)Y(t)$ y $Z'(t)=Z(t)B(t)$ con las condiciones iniciales $Y(0)=I$ y $Z(0)=I$. Infortunadamente, la solución exacta de estas ecuaciones no son calculables por la vía analítica y esto motiva la búsqueda de soluciones aproximadas analíticas y cotas de error en términos de los datos del problema.

JORGE IVÁN CASTAÑO BEDOYA. Profesor Ciencias Básicas, Universidad EAFIT. Matemático, Universidad Nacional. Magister Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT.
email: icastano@sigma.eafit.edu.co

Para que las ecuaciones verifiquen las condiciones de Lipschitz se exige que $A(t)$ y $B(t)$ sean continuas y acotadas en $[a, b]$. Esto permite la existencia de una única función matricial diferenciable.

CONCEPTOS BÁSICOS

Para el desarrollo de la solución aproximada de la ecuación diferencial considerada, se utilizarán los siguientes resultados y definiciones:

1. Si M es una matriz en C^{Pxq}, entonces definimos la norma de M por $\|M\| =\{½z½,$ z es un valor propio de $M^H M\}$ donde M^H es la transpuesta conjugada de la matriz M.
2. Para la misma ecuación del numeral 1) se tiene que: $\max \left|m_{ij}\right| \leq \|M\| \leq \sqrt{pq}\, max \left|m_{ij}\right|$
3. Si $N(t)$ es una función matricial de tamaño C^{rxr}, entonces:
   a. $N(t)e^{SN(t)} = e^{SN(t)}N(t)$
   b. $\frac{\partial}{\partial s} e^{SN(t)} = N(t)e^{SN(t)}$
   c. $e^{N(t)}e^{SN(t)} = e^{(1+S)N(t)}$
4. $\left(e^{-N(t)}\right)' = \int_0^{-1} e^{SN(t)}N'(t)e^{-SN(t)}ds\, e^{-N(t)}$
5. Si P y Q son matrices de C^{rxr} entonces llamaremos conmutador de P y Q a la expresión $[P,Q] = PQ-QP$.
6. La matriz identidad de C^{rxr} se denota por I.

EL MÉTODO

Para la solución de la ecuación diferencial se utiliza el método de FER.

Dada la ecuación diferencial $Z'(t)=Z(t)B(t)$ sujeta a $Z(0)=I$, llamaremos $G_0(t) = \int_0^t B(s)ds$ con $B(t) = g_0(t)$.

Si suponemos $Z(t)= Z_1(t)e^{G_0(t)}$, entonces

$Z_1(t) = Z(t)e^{-G_0(t)}$ con I. y derivando a Z(t) se tiene que:

$Z'(t) = Z_1'(t)e^{G_0(t)} + Z_1(t)(e^{G_0(t)})'$. Entonces:

$$Z_1'(t)= Z(t)G_0'(t)e^{-G_0(t)} - Z_1(t)\left\{\int_0^1 e^{SG_0(t)}G_0'(t)e^{-SG_0(t)}ds\right\}$$
$$= Ze^{-G_0}e^{G_0}G_0'e^{-G_0} - Z_1\left\{\int_0^1 e^{SG_0}G_0'e^{-SG_0}ds\right\}$$

Llamando $g_1 = \left\{e^{G_0}G_0'e^{-G_0} - \int_0^1 e^{SG_0}G_0'e^{-SG_0}ds\right\}$, tenemos que $Z_1'(t) = Z_1(t)g_1(t)$; la cual es una ecuación del mismo tipo que la dada inicialmente.

Ahora, sea $G_1(t) = \int_0^t g_1(t)ds$ y consideremos $Z_1(t) = Z_2(t)e^{G_1(t)}$; es decir $Z_2 = Z_1 e^{-G_1}$ donde $Z_2(0) = I$.

Derivando a $Z_1(t)$, tenemos:

$Z_1' = Z_2' e^{G_1} + Z_2(e^{G_1})'$ de donde

$$Z_2'(t) = \left\{Z_1' - Z_2\left\{\int_0^1 e^{SG_1}G_1'e^{-SG_1}ds\, e^{G_1}\right\}\right\}e^{-G_1}.$$

Entonces:

$$Z_2' = Z_1 e^{-G_1}e^{G_1}G_1'e^{-G_1} - Z_2\int_0^1 e^{SG_1}G_1'e^{-SG_1}ds$$
$$= Z_2 e^{G_1}G_1'e^{-G_1} - Z_2\int_0^1 e^{SG_1}G_1'e^{-SG_1}ds$$

Si llamamos $g_2(t) = e^{G_1}G_1'e^{-G_1} - \int_0^1 e^{SG_1}G_1'e^{-SG_1}ds$

entonces $Z_2' = Z_2 g_2$.

Por esta vía se puede llegar al siguiente resultado:

$$Z = Z_1 e^{G_0}$$
$$= Z_2 e^{G_1}e^{G_0}$$

……………………..

…………………………..

………………………………..

$$= Z_n e^{G_{n-1}}e^{G_{n-2}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; e^{G_0}.$$

Tomando $W(t) = e^{G_{n-1}}e^{G_{n-2}}\ldots\ldots\ldots\ldots e^{G_0}$, se concluye que $Z = Z_n W$ con $Z_n'(t) = Z_n(t)g_n(t)$ sujeta a $Z_n(0) = I$.

Además $G_n(t) = \int_0^t g_n(s)ds$ y

$$g_n(t) = e^{G_{n-1}}g_{n-1}e^{-G_{n-1}} - \int_0^1 e^{SG_{n-1}}g_{n-1}e^{-SG_{n-1}}ds \quad \textbf{(1)}$$

De una manera análoga se puede obtener el desarrollo de FER para la ecuación $Y'(t)=A(t)Y(t)$ sujeta a la condición $Y(0)=I$. Este análisis se puede obtener suponiendo que $Y(t) = e^{H_0}Y_1$; así $Y_1 = e^{-H_0}Y$ donde $Y_1(0)=I$ y además $H_0(t) = \int_0^t A(s)ds$

$A(t) = h_0(t)$

$$h_n(t) = e^{-H_{n-1}} h_{n-1} e^{H_{n-1}} + \int_0^{-1} e^{S H_{n-1}} h_{n-1} e^{-S H_{n-1}} ds \quad \textbf{(2)}$$

$$H_n(t) = \int_0^t h_n(s) ds$$

De los anteriores resultados se puede concluir que el desarrollo de FER para la solución del problema original está dado por:

$$X(t) = e^{H_0} e^{H_1} \ldots\ldots\ldots\ldots e^{H_{n-1}} Y_n C Z_n e^{G_{n-1}} e^{G_{n-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots e^{G_0}.$$

Si $V(t) = e^{H_0} e^{H_1} \ldots\ldots\ldots\ldots e^{H_{n-1}}$, entonces la solución aproximada de la ecuación diferencial original será: $\overline{X}(t) = V(t)CW(t)$ con $Y(t) = V(t)Y_n(t)$.

Ahora si cambiamos s por en la expresión **(1),** tenemos: $g_n(t) = e^{G_{n-1}} g_{n-1} e^{-G_{n-1}} + \int_1^0 e^{(1-u)G_{n-1}} g_{n-1} e^{-(1-u)G_{n-1}} du$

$$= e^{G_{n-1}} \left\{ g_{n-1} - \int_0^1 e^{-uG_{n-1}} g_{n-1} e^{uG_{n-1}} du \right\} e^{-G_{n-1}}$$

$$= e^{G_{n-1}} \left\{ \int_0^1 \left(g_{n-1} - e^{-uG_{n-1}} g_{n-1} e^{uG_{n-1}} du \right) \right\} e^{-G_{n-1}}$$

$$= e^{G_{n-1}} \left\{ - \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial s} \left[e^{-SG_{n-1}} g_{n-1} e^{SG_{n-1}} \right] ds \right) du \right\} e^{-G_{n-1}}$$

$$= e^{G_{n-1}} \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^u e^{-SG_{n-1}} \left[G_{n-1}, g_{n-1} \right] e^{SG_{n-1}} ds \right) du \right\} e^{-G_{n-1}}$$

Nótese que la expresión del corchete en la última igualdad es el conmutador de las funciones involucradas. Así $g_n(t) = \int_0^1 \left\{ \int_0^u e^{(1-S)G_{n-1}} \left[G_{n-1}, g_{n-1} \right] e^{-(1-S)G_{n-1}} ds \right\} du$.

Por otro lado , cambiando s por u *-1* en la expresión **(2)**:

$$h_n(t) = e^{-H_{n-1}(t)} h_{n-1}(t) e^{H_{n-1}(t)} + \int_1^0 e^{(u-1)H_{n-1}(t)} h_{n-1}(t) e^{-(u-1)H_{n-1}(t)} du$$

$$= e^{-H_{n-1}(t)} \left\{ h_{n-1}(t) - \int_0^1 e^{uH_{n-1}(t)} h_{n-1}(t) e^{-uH_{n-1}(t)} du \right\} e^{H_{n-1}(t)}$$

$$= e^{-H_{n-1}(t)} \left\{ \int_0^1 \left(h_{n-1}(t) - e^{uH_{n-1}(t)} h_{n-1}(t) e^{-H_{n-1}(t)} \right) du \right\} e^{H_{n-1}(t)}$$

$$= e^{-H_{n-1}(t)} \left\{ - \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial s} \left[e^{SH_{n-1}(t)} h_{n-1}(t) e^{-SH_{n-1}(t)} \right] ds \right) du \right\} e^{H_{n-1}(t)}$$

$$= e^{-H_{n-1}(t)} \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^u e^{SH_{n-1}(t)} \left[h_{n-1}(t), H_{n-1}(t) \right] e^{-SH_{n-1}(t)} ds \right) du \right\} e^{H_{n-1}(t)}$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^u e^{-(1-S)H_{n-1}(t)} \left[h_{n-1}(t), H_{n-1}(t) \right] e^{(1-S)H_{n-1}(t)} ds \right\} du$$

Con el anterior desarrollo es de observarse que las funciones G, g, H, h son funciones de t.

ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA

Supongamos que $A(t)$ y $B(t)$ son matrices acotadas y que $\|A(t)\|$ y $\|B(t)\|$ son funciones continuas tales que $\|A(t)\| \le k(t) = k_0(t)$ y $\|B(t)\| \le q(t) = q_0(t)$. De forma recursiva se puede conseguir: $\|g_n(t)\| \le q_n(t)$ y $\|h_n(t)\| \le k_n(t)$ con $0 \le t \le b$.

Si llamamos $K_n(t)=\int_0^t k_n(t)$ y $Q_n(t)=\int_0^t q_n(t)$, entonces se tiene que: $K_n(t)\geq\int_0^t\|h_n(s)\|ds\geq\|H_n(t)\|$ y $Q_n(t)\geq\int_0^t\|g_n(s)\|ds\geq\|G_n(t)\|$.

Después de n pasos suponemos que $Y_n(t) = I$ y $Z_n(t) = I$; así se obtienen aproximaciones $V(t)$ y $W(t)$ para las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales $Y'(t)=A(t)Y(t)$ con $Y(0)=I$ y $Z'(t)=Z(t)B(t)$ con $Z(0)=I$.

De la referencia #1 se tiene que $K_0(t)$ £ r = 0.8604065 **(3)**
y $Q_0(t)$ £ r = 0.8604065 **(4)**

De esta manera si $K_0(t) < r$ y $Q_0(t) < r$ entonces: $K_n(t) < K_{n-1}(t) < \ldots\ldots < K_0(t)$ y
$Q_n(t) < Q_{n-1}(t) < \ldots\ldots < Q_0(t)$ donde
$K_n(t)$ y $Q_n(t)$ tienden a cero.

Ahora, sea δ un número real entre 0 y b y $t\in[0,\delta]$ tal que **(3)** y **(4)** se cumplan; es decir $[0,\delta]$ es el dominio donde los desarrollos de FER para $Y(t)$ y $Z(t)$ convergen.

Para analizar el error cuando Y(t) y Z(t) son aproximados por V(t) y W(t) en el mismo dominio, partimos de la expresión $Z(t)=Z_n(t)W(t)$: $Z(t)-W(t)=Z(t)-Z_n^{-1}(t)Z(t)$

$$= \left[I-Z_n^{-1}(t)\right]Z(t)$$

$$= D_n(t)Z(t) \text{ donde } D_n(t)=I-Z_n^{-1}(t) \qquad \textbf{(5)}$$

Derivando la expresión $Z_n(t)Z_n^{-1}(t)=I$ y despejando $(Z_n^{-1}(t))'$ se tiene: $\left(Z_n^{-1}(t)\right)' = -Z_n^{-1}(t)Z_n'(t)Z_n^{-1}(t)$

$$= -Z_n^{-1}(t)Z_n(t)g_n(t)Z_n^{-1}(t)$$

$$= -g_n(t)Z_n^{-1}(t) \text{ con } Z_n(0)=I$$

Ahora, de **(5)**: $D_n'(t)=-\left(Z_n^{-1}(t)\right)'$

$= g_n(t)Z^{-1}_n(t)$ e integrando esta ultima expresión se consigue que: $D_n(t)=\int_0^t g_n(s)Z_n^{-1}(s)ds$.

Tomando norma en **(5),** se observa que: $\|Z(t)-W(t)\|\leq\|D_n(t)\|\,\|Z(t)\|$. Además por la referencia #4:

$$\|Z(t)\|\leq e^{\int_0^t\|B(s)\|ds}\leq e^{\int_0^\delta\|B(s)\|ds}\leq e^{Q_0(\delta)} \text{ y}$$

$$\|Z_n^{-1}(t)\|\leq e^{\int_0^t\|g_n(s)\|ds}\leq e^{\int_0^\delta\|g_n(s)\|ds}\leq e^{Q_n(\delta)}.$$

Entonces: $\|D_n(t)\|=\left\|\int_0^t g_n(s)Z_n^{-1}(s)ds\right\|\leq\int_0^\delta\|g_n(s)\|\,\|Z_n^{-1}(s)\|ds$ y

$$\|D_n(t)\|\leq e^{Q_n(\delta)}\int_0^\delta\|g_n(s)\|ds\leq e^{Q_n(\delta)}Q_n(\delta)$$

Por lo tanto $\|Z(t)-W(t)\|\leq e^{Q_0(\delta)}e^{Q_n(\delta)}Q_n(\delta)$.

Un resultado similar se puede obtener para la otra ecuación: $\|Y(t)-V(t)\|\leq e^{K_o(\delta)}e^{K_n(\delta)}K_n(\delta)$.

Utilizando los resultados anteriores podemos ver que si *P(t)* es una aproximación de *X(t),* entonces *X(t)-P(t)=Y(t)CZ(t)-V(t)CW(t);* que se puede escribir de la siguiente manera:

$$X(t)-P(t) = Y(t)C(Z(t) - W(t)) + (Y(t) - V(t))CZ(t) - (Y(t) - V(t))\, C(Z(t) - W(t)).$$

Tomando normas,

$$\|X - P\| \leq \|Y\|\|C\|\|Z - W\| + \|Y - V\|\|C\|\|Z\| + \|Y - V\|\|C\|\|Z - W\| \qquad \textbf{(6).}$$

Nuevamente utilizando la referencia #4 se tiene que:

$$\|Y(t)\| \leq e^{\int_0^t \|A(s)\| ds} \leq e^{\int_0^\delta \|A(s)\| ds} \leq e^{K_0(\delta)}$$

Así **(6)** queda: $\|X(t) - P(t)\| \leq e^{K_0(\delta)} \|C\| e^{Q_0(\delta)} e^{Q_n(\delta)} Q_n(\delta) + e^{K_0(\delta)} e^{K_n(\delta)} K_n(\delta) \|C\| e$

$$+ e^{K_0(\delta)} e^{K_n(\delta)} K_n(\delta) \|C\| e^{Q_0(\delta)} e^{Q_n(\delta)} Q_n(\delta) \cdot$$

Es decir: $\|X(t) - P(t)\| \leq \|C\| e^{K_0(\delta) + Q_0(\delta)} \left\{ e^{Q_n(\delta)} Q_n(\delta) + e^{K_n(\delta)} K_n(\delta) + e^{K_n(} \right.$.

Si llamamos $J = \|C\| e^{K_0(\delta) + Q_0(\delta)}$ y $F_n = \left\{ e^{Q_n(\delta)} Q_n(\delta) + e^{K_n(\delta)} K_n(\delta) + e^{K_n(\delta)} K_n(\delta) e^{Q_n(\delta)} Q_n(\delta) \right\}$, entonces se concluye que: $\|X(t) - P(t)\| \leq JF_n$.

Por último si suponemos que $\hat{\imath} > 0$ es un error posible y hacemos $JF_n < \in$, entonces el orden de la aproximación e FER se debe escoger de modo que $F_n \angle \frac{\in}{J}$.

De esta forma la aproximación construida verifica que $\|X(t) - P(t)\| < \in$.

CONCLUSIONES

Aunque existen otros métodos de solución para la ecuación considerada, la solución encontrada constituye una alternativa mas de aproximación para problemas que surgen en ingeniería especialmente en el área de control lineal.

El error que se comete al aproximar la solución exacta, depende únicamente de los datos del problema.

Como consecuencia del estudio realizado, se puede obtener un resultado similar para el caso donde la ecuación diferencial no sea homogénea.

Aunque existen otros métodos de solución para la ecuación considerada, la solución encontrada constituye una alternativa mas de aproximación para problemas que surgen en ingeniería especialmente en el área de control lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanes, S. and Jodar L.. Continuos numerical solutions of coupled mixed partial differential systems using Fer factorization, *Jour Com. And Appl. Math.* **101-1199.** pp. (189-202).

Blanes, S. (1998). Estudio de sistemas dinámicos clásicos y cuánticos utilizando métodos algebraicos. Ph.D. tesis U. de Valencia. Valencia: Universidad de Valencia.

Barnett, S. (1971). Matrix in control theory. London: Van Nostrand Reinhold.

Flett, T.M. (1980). Differential Analysis. New York: Cambridge Uni. Press .

Golub, G.H. and Van Loan, C.F. (1993). Matrix Computations. Baltimore: John Hopkins Uni. Press.

Reid, W.T. (1964). A matrix differential equations of Riccati type. *Amer. J. Math,* **No. 68,** pp. 237-246.