Probabilidades en nuestro Mundo

Ulises ■ Cárcamo

Un acercamiento vivencial a las probabilidades puede hacerse con unos pocos elementos: Series geométricas, derivadas, una hoja electrónica, un paquete de computador para cálculo simbólico y ganas de aprender.

Para muchas personas la probabilidad atañe sólo a una serie de problemas que aparecen en los cursos de Estadística y que son ajenos a nuestro entorno inmediato; sin embargo, existen muchas situaciones cotidianas que, analizadas detenidamente, nos pueden llevar rápidamente a los terrenos de la probabilidad

ULISES CÁRCAMO. Licenciado en educación, área de matemáticas, Universidad de Medellín. Máster en matemáticas aplicadas, Universidad EAFIT.
E-mail: ucarcamo@sigma.eafit.edu.co

elemental. Allí, el conocimiento de un poco de aritmética, de las series geométricas y del cálculo elemental nos es de gran ayuda para vislumbrar esos aspectos de nuestro mundo a través de la lente del análisis probabilístico fundamental. La Teoría de Probabilidad es una rama del Análisis Matemático aplicado; para la completa comprensión de muchos de sus temas es necesario el conocimiento de varios conceptos y resultados de la Teoría de la Medida, de la Topología y del Análisis Matemático en general, pero un acercamiento elemental bien puede hacerse a partir de la Aritmética, y posteriormente, a partir de Cálculo que se estudia en los primeros cursos universitarios. Así como la Estadística hace uso de muchos resultados de la teoría de probabilidades para ir más allá de lo simplemente descriptivo, el estudio de las probabilidades puede hacer uso de los datos estadísticos, convenientemente filtrados y depurados, para estimar probabilidades de eventos, aproximar distribuciones o para contrastar una supuesta distribución que parece explicar un fenómeno. Todo este proceso se da paso a paso. Es posible trabajar con las distribuciones más conocidas para explicar ciertos fenómenos, pero algunas veces el estudio de un fenómeno lleva al establecimiento de una distribución de probabilidad, de la misma forma en la que el estudio de ciertos fenómenos determinísticos lleva a la creación de nuevas funciones. Los siguientes ejemplos nacieron de la profundización en sendos problemas sencillos y se presentan como una ayuda que nuestros profesores pueden usar como casos para ilustrar los conceptos básicos de las probabilidades.

Para muchas personas la probabilidad atañe sólo a una serie de problemas que aparecen en los cursos de Estadística y que son ajenos a nuestro entorno inmediato; sin embargo, existen muchas situaciones cotidianas que, analizadas detenidamente, nos pueden llevar rápidamente a los terrenos de la probabilidad elemental. Allí, el conocimiento de un poco de aritmética, de las series geométricas y del cálculo elemental nos es de gran ayuda para vislumbrar esos aspectos de nuestro mundo a través de la lente del análisis probabilístico fundamental.

CASO I:
¿Qué tan probable es ganar un examen por puro azar?

Una vieja historia

Todos hemos escuchado la historia de un estudiante que no se ha preparado lo suficiente para un examen que consta de preguntas cuya respuesta es sólo Falso (F) o Verdadero (V), toma una moneda y comienza a contestar con base en los resultados de la moneda, por ejemplo contestar “V” en todas las preguntas donde el lanzamiento resulte Cara y “F” en aquéllas donde resulte Sello.

Pero, si alguien actúa así, ¿Qué tan probable es que acierte el número suficiente de preguntas como para ganar el examen?

Para comenzar, consideremos una prueba evaluativa típica de 10 preguntas con Falso y Verdadero, donde el estudiante contesta totalmente el azar y la moneda no está cargada, de tal manera que la probabilidad de acertar sea ½.

Una conocida, no tan vieja, distribución

Si los lanzamientos son completamente independientes, el proceso puede describirse mediante un experimento binomial con 10 pruebas y probabilidad de éxito ½. En estas circunstancias, la probabilidad de ganar el examen será igual a la probabilidad de acertar 6, 7, 8, 9 ó 10 de las preguntas, o, equivalentemente, la probabilidad de fallar sólo en 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 de ellas. Un cálculo elemental basado en la distribución binomial nos lleva a:

$$\binom{10}{6}(0.5)^{10}+\binom{10}{7}(0.5)^{10}+\binom{10}{8}(0.5)^{10}+\binom{10}{9}(0.5)^{10}+\binom{10}{10}(0.5)^{10} = \sum_{k=0}^{5}\binom{10}{k}(0.5)^{10} = 1\text{-}0.623 = 0.377.$$

Esto significa que, en circunstancias similares, un estudiante ganará el examen en sólo, aproximadamente, 38 de cada 100 casos.

Ahora, considérese una prueba evaluativa de múltiple escogencia con 20 preguntas, tal que cada una de ellas tiene 5 alternativas: a, b, c, d y e. Para nuestro caso, supongamos también que el estudiante ignora todo sobre lo que se le pregunta, de tal manera que debe usar algún dispositivo aleatorizador para encontrar la respuesta (en el caso de 6 alternativas se usaría, por ejemplo, un dado, pero los tests de 6 alternativas no son tan comunes); supóngase también que el dispositivo es tal que a cada una de las alternativas se le puede asignar la probabilidad 1/5 = 0.2 de ser seleccionada. Para este caso, el estudiante deberá acertar por lo menos 12 preguntas y ahora la probabilidad de no acertar es 0.8. Haciendo suposiciones similares al caso anterior y utilizando una distribución binomial con 20 pruebas y probabilidad de éxito de 0.2 se obtiene:

$\sum_{k=12}^{20}\binom{20}{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20\text{-}k} = 1 - \sum_{k=0}^{11}\binom{20}{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20\text{-}k} = 1 - 0.99989827 = 0.0001017$, esto quiere decir que, en circunstancias iguales, de cada diez mil pruebas presentadas, ganaría a lo sumo una.

Un análisis más completo de esto necesita del estudio de expresiones de la forma

$\sum_{k=0}^{\frac{3n}{5}-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n\text{-}k}$, en el caso en el que n sea divisible por 5, y $\sum_{k=0}^{[\![\frac{3n}{5}]\!]}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n\text{-}k}$, en el caso en el que n no sea divisible por 5, con los exámenes que siguen un sistema de calificación semejante a aquél de 5 preguntas en el que se gana contestando al menos 3. $[\![x]\!]$ denota la parte entera del número x.

Ambas expresiones dependen de dos variables, así n, el número de preguntas y a, el número de alternativas para cada pregunta.

Las hojas electrónicas en acción

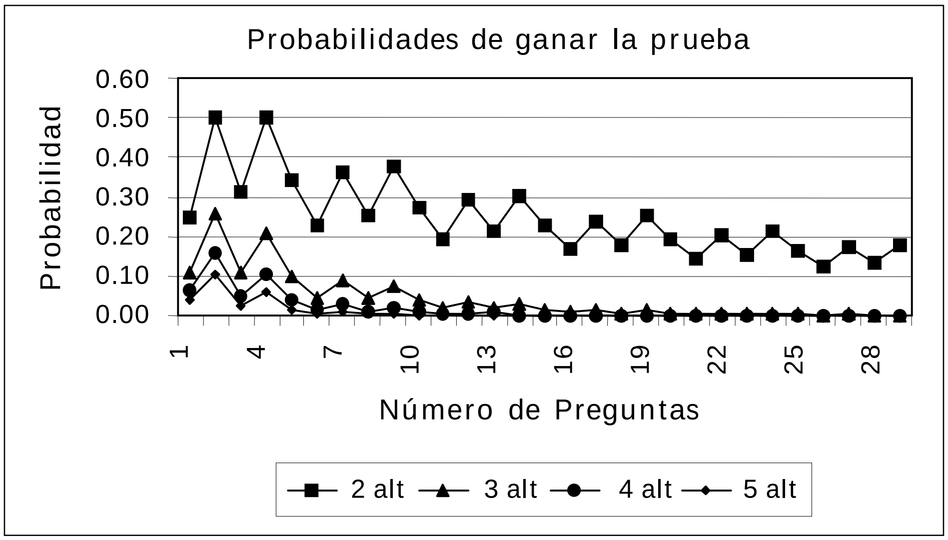
La siguiente tabla fue calculada mediante este tipo de expresiones y con una hoja electrónica. En ella se muestran las probabilidades de ganar un examen por puro azar; los exámenes tienen un número de preguntas entre dos y treinta y cada pregunta tiene un número de alternativas entre 2 y 6.

	Número de alternativas por pregunta				
	2	3	4	5	6
2	0.250000	0.111111	0.062500	0.040000	0.027778
3	0.500000	0.259259	0.156250	0.104000	0.074074
4	0.312500	0.111111	0.050781	0.027200	0.016204
5	0.500000	0.209877	0.103516	0.057920	0.035494
6	0.343750	0.100137	0.037598	0.016960	0.008702
7	0.226563	0.045267	0.012878	0.004672	0.002004
8	0.363281	0.087944	0.027298	0.010406	0.004609
9	0.253906	0.042422	0.009995	0.003066	0.001136
10	0.376953	0.076564	0.019728	0.006369	0.002438
11	0.274414	0.038629	0.007561	0.001965	0.000629
12	0.193848	0.018758	0.002782	0.000581	0.000156
13	0.290527	0.034655	0.005649	0.001246	0.000345
14	0.211975	0.017434	0.002154	0.000382	0.000088
15	0.303619	0.030828	0.004193	0.000785	0.000188
16	0.227249	0.015945	0.001644	0.000248	0.000050
17	0.166153	0.008008	0.000625	0.000076	0.000013
18	0.240341	0.014434	0.001244	0.000159	0.000028
19	0.179642	0.007424	0.000484	0.000050	0.000007
20	0.251722	0.012973	0.000935	0.000102	0.000015
21	0.191655	0.006807	0.000372	0.000032	0.000004
22	0.143139	0.003487	0.000144	0.000010	0.000001
23	0.202436	0.006193	0.000283	0.000021	0.000002
24	0.153728	0.003230	0.000112	0.000007	0.000001
25	0.212178	0.005600	0.000215	0.000014	0.000001
26	0.163470	0.002966	0.000086	0.000004	0.000000
27	0.123894	0.001540	0.000034	0.000001	0.000000
28	0.172464	0.002707	0.000066	0.000003	0.000000
29	0.132465	0.001425	0.000026	0.000001	0.000000
30	0.180797	0.002458	0.000050	0.000002	0.000000

Esa historia sí pudo haber sido verdadera

Estos resultados muestran que la historia del estudiante sí pudo ser cierta pero el examen debió estar compuesto de 3 ó de 5 preguntas, cada una con sólo dos alternativas.

FIGURA No. 1
Probabilidades de ganar un test según el número de preguntas y el número de alternativas por pregunta



Nota: Obsérvense las oscilaciones tanto para número de preguntas como para y número de preguntas impar.

Probabilidades condicionales

Las probabilidades antes mencionadas son probabilidades condicionales del tipo Probabilidad de que gane "dado que está adivinando"; ahora, supóngase que uno de sus estudiantes gana, ¿podrá determinarse cuál es la probabilidad de que haya adivinado? Para contestar esta pregunta debe hacerse uso de la Regla de Bayes: si A es el evento "el estudiante adivinó" y G el evento, "el estudiante ganó", se tiene que $P(A / G) = \frac{P(G / A)}{P(G)}$.

¿Cómo estimar P(G)? Se podría suponer que P(G) está relacionada con el porcentaje de estudiantes que ganaron el examen. Según esta idea, si un grupo de 30 estudiantes presenta un examen de 20 preguntas con 4 alternativas cada una y lo ganan 20 de ellos, la proporción de estudiantes que gana el examen es 2/3 y dado que P(G/A) = 0.000183, entonces se podría concluir que P(A/G) = 0.000183/(2/3) = 0.000275, bastante baja.

¿Pero, es este procedimiento correcto? Naturalmente no.

Podemos suponer una proporción de ésas como una probabilidad cuando cada uno de los estudiantes tenga la misma probabilidad de ganar el examen, pero en realidad el ganar el examen depende de varios factores y es, en general, imposible afirmar que todos tienen la misma probabilidad de ganarlo, salvo en circunstancias extraordinarias; el estudiar el tema adecuadamente aumenta las probabilidades de ganarlo y, si todos estudian adecuadamente es muy posible, que todos ganen. Un examen no es una lotería.

¿Probabilidad de ganar un examen?

¿Qué tipo de información podría entonces servir para este propósito? Es muy difícil decirlo, salvo en casos particulares, pero supongamos que "la probabilidad de ganar el examen", si es que es posible definirla, está en el intervalo cerrado [0.5, 0.9], como se podría suponer "razonablemente". Entonces P(G/A) estará en el intervalo [0.000203333, 0.000366], así que, en definitiva, es muy poco probable ganar adivinando totalmente y es mejor tener algún conocimiento del tema. Ahora, si P(G/A) = 0.5, como es el caso en el que se tienen 3 ó 5 preguntas con sólo dos alternativas, si la probabilidad de ganar el examen está en el intervalo [0.5, 0.9], la probabilidad de que haya adivinado dado que ganó estará en el intervalo [0.555, 1]; lo anterior indica que, en éste caso, mientras más difícil sea el examen hay una mayor probabilidad de que quien ganó haya adivinado.

Moraleja: "No colocar exámenes de sólo Falso y Verdadero con tres o cinco preguntas".

Afortunadamente, en nuestro medio no es muy común este tipo de exámenes y, usualmente, cuando se colocan preguntas de falso y verdadero se indaga por una sustentación de la respuesta.

CASO II:
(De cómo el profundizar en un jueguito nos lleva a los terrenos de las distribuciones de probabilidad)

JUEGOS EN LOS QUE EL PRIMERO EN ACTUAR TIENE MAYOR PROBABILIDAD DE SER EL GANADOR

Otra historia

Considérese la historia en la que dos personas, Juan y María, participan en un singular juego: lanzan una moneda legal de manera consecutiva y gana quien saque la primera cara. Si juegan en ese orden, primero Juan y luego María ¿Cuáles son las probabilidades de ganar de cada uno?

El cálculo de las probabilidades de ser el ganador

La probabilidad de que Juan gane está dada por la suma de las probabilidades de los siguientes eventos que son mutuamente excluyentes: J_1 ="Juan gana en el primer lanzamiento", J_3 = "Juan pierde en el primer lanzamiento, María pierde el segundo y Juan Gana en el tercero", J_5 = "Juan Pierde el primero y el tercer lanzamientos, María pierde el segundo y cuarto lanzamientos y Juan gana en el quinto",. .. J_{2K+1} = "Juan pierde los lanzamientos 1, 3, 5,. . ., 2k-1, María pierde los lanzamientos 2, 4, 6,. . ., 2k y Juan gana en el 2k+1",. . .. Suponiendo la legalidad de la moneda y la independencia entre los lanzamientos se obtiene:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\cdots\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

Aunque a partir de este resultado, con una simple resta, puede deducirse la probabilidad de que María gane, se hará la deducción en aras de ir deduciendo un método general:

La probabilidad de que María gane está dada por la suma de las probabilidades de los siguientes eventos, que son mutuamente excluyentes: J_2 = “Juan pierde el primer lanzamiento y María gana en el segundo”, J_4 = “Juan pierde el primer lanzamiento, María pierde el segundo, Juan pierde el tercero y María gana en el cuarto”, J_6 = “Juan Pierde el primero, el tercer y el quinto lanzamientos, María pierde el segundo y cuarto lanzamientos pero gana en el sexto”,. .. J_{2K} = “Juan pierde los lanzamientos 1, 3, 5,. .. y 2k-1, María pierde los lanzamientos 2, 4, 6,. . .y 2k-2 pero gana en el 2k”,. .. Suponiendo la legalidad de la moneda y la independencia entre los lanzamientos se obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\cdots\ =\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Así, claramente la ventaja la tiene el primero que apuesta: tiene el doble de probabilidad de ganar.

Una estrategia de María: “Invitemos a jugar a un tercero”

Supóngase ahora que María, cansada de tanto perder, le pide a Juan que inviten a Carlos a jugar, en el tercer turno, ¿cómo cambian las probabilidades?

Nuevas probabilidades

Ahora la probabilidad de que Juan gane es:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\cdots\ =\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{10}}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}.$$

¿Por qué?: Se deja la inquietud al lector atento.

La probabilidad de que María gane es:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\cdots\ =\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$$ y la probabilidad de que Carlos gane es:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\cdots = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}.$$

Otra decepción

Al conocer de este cálculo, María se siente decepcionada: Aunque la probabilidad de que Juan gane disminuyó un poco, todavía esa probabilidad duplica a la suya.

¿Qué tal si hubiera más jugadores?

María, aunque decepcionada, se siente aún optimista, pero, en vez de hacer cálculos con un cuarto jugador, los hace de manera más general:

Si hubiera k jugadores, Juan siguiera en primer lugar y María en segundo, la probabilidad de que Juan ganara sería $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{3k+1}}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^k}}=\frac{2^{k-1}}{2^k-1}$ y la probabilidad de que María ganara sería $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{2^{2k+2}}+\frac{1}{2^{3k+2}}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2^k}}=\frac{2^{k-2}}{2^k-1}$, que es también la mitad de la de Juan.

(¿Cómo se obtienen estos resultados?): Otra inquietud que se deja al lector atento.

En conclusión, no es (sólo) el número de jugadores lo que le da la ventaja a Juan.

"Mejor juguemos con un dado"

Ya segura de sus desventajas en el juego original, María pide a Juan que jueguen sólo ellos dos pero no con una moneda sino con un dado (legal, o sea no cargado). Juan acepta, pero, contento como está con su ventaja, pone como condición seguir siendo el primero.

La Ventaja de Juan se Reduce

En estas nuevas condiciones la probabilidad de que Juan gane es

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\cdots = \frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\cdots\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{6}{11}$$

probabilidad de que María gane será

$$\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\cdots = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\cdots\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k+1} = \frac{5}{11},$$

que se pudo calcular simplemente como $1-\frac{6}{11}$. La ventaja se redujo del doble a solo 1.2.

¡Invitemos a Carlos!

Entusiasmada por que la diferencia entre las probabilidades de ganar se ha reducido, María logra que Juan invite de nuevo a Carlos como tercer participante.

Las probabilidades quedan ahora así:

Para Juan:

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\cdots = \frac{1}{6}(1+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\cdots) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k} = \frac{36}{91} \approx 0.395604,$$

Para María:

$$\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\cdots = \frac{1}{6}(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\cdots) = \frac{1}{6}\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{125}{216}} = \frac{30}{91}$$

» 0.32967033 y para Carlos $(1-\frac{36}{91}-\frac{30}{91})=\frac{25}{91}$.

María, quien no se deja confundir por los números, quiere determinar en cuánto se redujo la ventaja de Juan cuando se introdujo a Carlos: $\frac{\frac{36}{91}}{\frac{30}{91}}=\frac{6}{5}$ = = 1.2. ¡No se redujo en nada!

Volvamos a generalizar

Dispuesta a seguir su investigación, la astuta chica vuelve a preguntarse. ¿Qué pasaría si hubiera k jugadores?

En estas nuevas circunstancias la probabilidad de que Juan gane sería $\frac{1}{6}(1+\left(\frac{5}{6}\right)^{k}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}+...)=\frac{1}{6}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k}}$. Lo anterior indica que aunque aumente de manera indefinida el número de jugadores, la probabilidad de que Juan gane estará siempre por encima de $\frac{1}{6}$.

Por otro lado, la probabilidad de que María gane será $\frac{5}{6}\frac{1}{6}(1+\left(\frac{5}{6}\right)^{k}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}+...)=\frac{5}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k}}$ y, cuando k sea grande, tenderá a $\frac{5}{36}$.

El tercer jugador tendrá probabilidad de ganar $\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}(1+\left(\frac{5}{6}\right)^{k}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}+...)=\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k}}$; al crecer k, esta probabilidad tenderá a $\frac{25}{216}$. Así podemos continuar hasta concluir que el k-ésimo jugador tendrá una probabilidad, que, al crecer k estará cercana a $\frac{5^{k-1}}{6^{k}}$.

Nueva decepción y abandono

Los cálculos anteriores muestran que, dado un jugador fijo, mientras más jugadores haya en turnos previos, en el orden del juego, menos probabilidad de ganar tendrá.

Además, aunque las probabilidades disminuyen, para todos, al aumentar el número de jugadores, ¡la relación entre las probabilidades del primero y el segundo sigue siendo 1.2!. Definitivamente, no depende del número de jugadores sino de la probabilidad de ganar.

Ante tales circunstancias, María abandona su empeño y decide no volver a jugar, a no ser que ella sea la primera.

Una nueva generalización y posibles aplicaciones

Aunque la historia del juego de Juan y María puede parecer algo trivial y una simple curiosidad de revista, la generalización de la estructura subyacente al problema puede conducirnos a una experiencia creativa y bastante edificante: La construcción de una distribución de probabilidad.

Comencemos alejándonos un poco de los referentes originales

En vez de hablar de “el k-ésimo jugador” podemos hablar de “la k-ésima componente de un sistema” y en vez de hablar de “probabilidad de ganar” podemos hablar de la “probabilidad de falla de cada una de esas componentes”; de ésta manera, podemos aplicar estos resultados al cálculo de la probabilidad de que fallen las componentes de un sistema en que aquellas quedan expuestos a cierto entorno una tras otra y siempre en el mismo orden. Con estos sistemas están relacionados, entre otros, las cadenas de las bicicletas, las orugas de un bulldozer y los sistemas envasadores giratorios. Este tipo de situaciones se estudia con mayores detalles en la Teoría de la Confiabilidad.

Calculemos en general

Si hay k componentes, $k>1$, en el sistema y la probabilidad de que se presente una falla de una cualquiera de las componentes cuando está expuesta al entorno es p, $0<p<1$, entonces, haciendo $q = 1-p$, la probabilidad de que falle la primera componente está dada por $p(1+q^k+q^{2k}+q^{3k}+\ldots)=\dfrac{p}{1-q^k}=\dfrac{p}{1-(1-p)^k}$; la probabilidad de que falle la segunda es $\dfrac{pq}{1-q^k}=\dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^k}$, y la probabilidad de que falle la k-ésima $\dfrac{pq^{k-1}}{1-q^k}=\dfrac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^k}$.

Considérese la siguiente función dada por $f(s)=\dfrac{p(1-p)^{s-1}}{1-(2-p)^k}$, que representa la probabilidad de que falle la s-sima componente, cuando s es un entero positivo, y en donde $0<p<1$ y p es fijo.

$f'(s)=\dfrac{p(1-p)^{s-1}\ln(1-p)}{1-(1-p)^k}<0$; en consecuencia esta función es decreciente y por tanto, su máximo valor se dará para $s=1$ y su mínimo para $s=k$. Esto indica que si el sistema siempre “expone” sus componentes en el mismo orden, la primera componente será la más propensa a fallar, esto podría solucionarse mejorando la calidad (o la resistencia) de éste elemento o diseñando un método para alternar la componentes que inician el proceso.

Construcción de una distribución de probabilidades

Fácilmente se puede encontrar que $\frac{p}{1-q^k}+\frac{pq}{1-q^k}+\ldots+\frac{pq^{k-1}}{1-q^k}=1.$

Naturalmente, esto permite definir una distribución de probabilidad. Una variable aleatoria discreta X tiene este tipo de distribución si su función de masa de probabilidad está dada por: $P(X=s)=P(s)=\frac{pq^{s-1}}{1-q^k}+\frac{p(1-p)^{s-1}}{1-(1-p)^k}$ para s = 1, 2, 3,. . .,k, y 0 en todo otro caso. El valor esperado de esta variable aleatoria está dado por $E(X)=\frac{(1-p)^k\,(k.p+1)^{-1}}{p((1-p)^k-1)}$ y su varianza. es $V(X)=E(s^2)-(E(s))^2 = -\frac{-(1-p)^{2k+1}+(1-p)^k(k^2p^2-2(p-1))+(p-1)}{p^2((1-p)^k-1}$. Estos cálculos se hicieron utilizando Derive ®. Con esta misma herramienta se puede encontrar que $\lim_{k\to\infty} E(X)=\frac{1}{p}$ y $\lim_{k\to\infty} V(X)=\frac{1-p}{p^2}$, lo que significa que, cuando aumentan el número de las componentes, el valor esperado y la varianza dependen sólo de la probabilidad de que una componente falle. Además puede demostrarse fácilmente que, en este caso, el valor 1 está (para todos los valores de p) entre la media menos una desviación estándar, que siempre es menor que 1, y la media más una desviación estándar. Por tanto éste valor es uno de los más probables.

Crear algunos gráficos

La mayoría de las veces los gráficos son muy importantes para identificar un tipo de distribución. Tenemos a continuación los gráficos de algunas distribuciones para valores particulares de p y k:

FIGURA No. 2

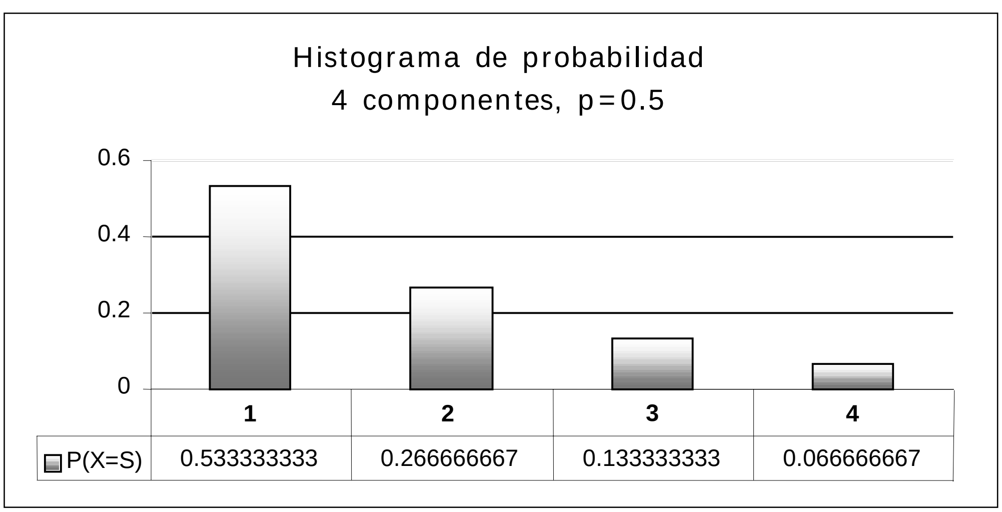
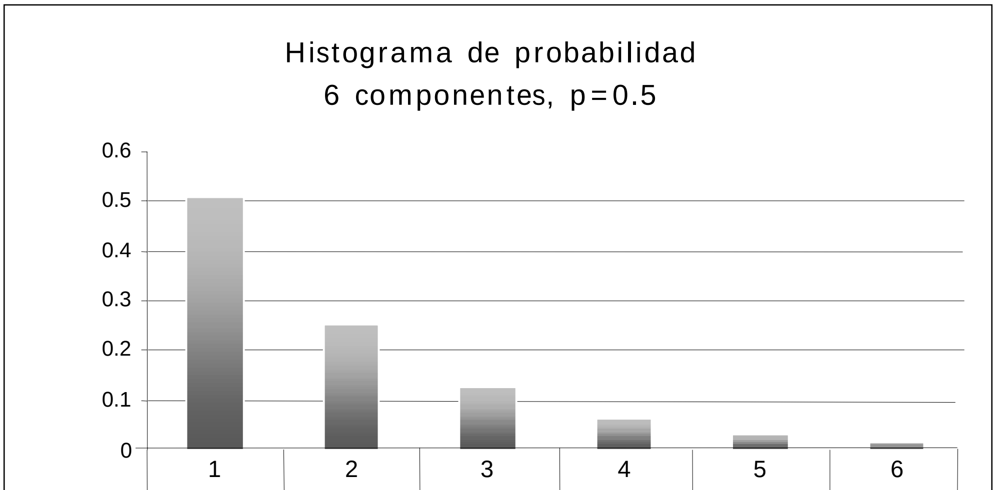


FIGURA No. 3



	1	2	3	4	5	6
P(X=S)	0.5079365	0.2539683	0.1269841	0.0634921	0.031746	0.015873

Construcción de tablas para calcular probabilidades

Después de todo esto, si queremos guardar un registro permanente de las probabilidades para una serie de valores para p y para diversos números de componentes, podemos registrarlos en tablas o en una pequeña rutina para computador. Optamos por las tablas. Acá la hoja electrónica presta una muy valiosa ayuda.

Dos Componentes

s\p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.5263	0.5556	0.5882	0.625	0.6667	0.7143	0.7692	0.8333	0.9091
2	0.5263	0.4444	0.4118	0.375	0.3333	0.2857	0.2308	0.1667	0.0909

Tres Componentes

s\p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.369	0.4098	0.4566	0.5102	0.5714	0.641	0.7194	0.8065	0.9009
2	0.3321	0.3279	0.3196	0.3061	0.2857	0.2564	0.2158	0.1613	0.0901
3	0.2989	0.2623	0.2237	0.1837	0.1429	0.1026	0.0647	0.0323	0.009

Cuatro Componentes

s\p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.2908	0.3388	0.3948	0.4596	0.5333	0.6158	0.7057	0.8013	0.9001
2	0.2617	0.271	0.2764	0.2757	0.2667	0.2463	0.2117	0.1603	0.09
3	0.2355	0.2168	0.1934	0.1654	0.1333	0.0985	0.0635	0.0321	0.009
4	0.212	0.1734	0.1354	0.0993	0.0667	0.0394	0.0191	0.0064	0.0009

Cinco Componentes

s\p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.2442	0.2975	0.3606	0.4337	0.5161	0.6062	0.7017	0.8003	0.9
2	0.2198	0.238	0.2524	0.2602	0.2581	0.2425	0.2105	0.1601	0.09
3	0.1978	0.1904	0.1767	0.1561	0.129	0.097	0.0632	0.032	0.009
4	0.178	0.1523	0.1237	0.0937	0.0645	0.0388	0.0189	0.0064	0.0009
5	0.1602	0.1218	0.0866	0.0562	0.0323	0.0155	0.0057	0.0013	9E-05

Seis Componentes

s\p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.2134	0.2711	0.34	0.4196	0.5079	0.6025	0.7005	0.8001	0.9
2	0.1921	0.2168	0.238	0.2517	0.254	0.241	0.2102	0.16	0.09
3	0.1729	0.1735	0.1666	0.151	0.127	0.0964	0.063	0.032	0.009
4	0.1556	0.1388	0.1166	0.0906	0.0635	0.0386	0.0189	0.0064	0.0009
5	0.14	0.111	0.0816	0.0544	0.0317	0.0154	0.0057	0.0013	9E-05
6	0.126	0.0888	0.0571	0.0326	0.0159	0.0062	0.0017	0.0003	9E-06

Naturalmente, si es necesario calcular más valores, por ejemplo para p=0.05, se harían tablas más completas.

La componente más importante

Procesos análogos se recorren en muchos trabajos serios sobre probabilidades: se comienza desde un problema particular y se termina construyendo una distribución que no sólo sirve para describir el fenómeno sino para muchos más. Ahora, aunque nuestro recorrido no fue muy trascendental, si nos da un ejemplo de cómo son esos trayectos.

Naturalmente nunca deber olvidarse el elemento más importante del proceso: El deseo de Aprender.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Edwards, C.H. Jr. y Penney, David E. (1996). Cálculo con Geometría Analítica. 4a. ed. México: Prentice Hall.

Freund, John E. y Walpone Ronald E. (1990). Estadística Matemática con Aplicaciones. 4a. ed. México: Prentice Hall.

Kapur, Kakash Chander y Lamberson, Leonard R. (1977). Reliability in Engineering Design. New York: John Wiley & Sons.

Kutzler, Bernhard. (1997). "Introduction to Derive For Windows". Viena: Bernhard Kutzler.

Leemis, Lawrence. (1995). "Reliability. Probabilistic Models and Statistical Methods". Londres: Prentice Hall.

Rojas Arias, Jaime. (1975). Introducción a la Confiabilidad. Santafé de Bogotá: Universidad de Los Andes.