Algunos Modelos Matemáticos de la Teoría de la Confiabilidad I

José ▪ E. ▪ Valdés
Jairo ▪ A. ▪ Villegas
Rómulo ▪ I. ▪ Zequeira

Con el presente trabajo iniciamos el examen de algunos modelos simples de problemas fundamentales de la Teoría de la Confiabilidad haciendo uso sólo de conceptos matemáticos elementales. De esta manera pretendemos mostrar, aunque naturalmente de manera parcial, el significado y la aplicación de la matemática en los análisis de confiabilidad, y también la importancia de la Probabilidad Aplicada en la solución de problemas reales.

José E. Valdés Castro, Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, Cuba.
Jairo A. Villegas Gutiérrez, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.
Rómulo I. Zequeira, Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, Cuba.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las concepciones y técnicas para el *análisis de confiabilidad de componentes, equipos y sistemas* ha estado asociado al desarrollo de tecnologías complejas y de alto riesgo, tales como la aeronáutica, militar y nuclear. Las primeras preocupaciones surgieron en el sector aeronáutico. Antes de la Segunda Guerra Mundial se realizaron cálculos de seguridad para aviones polimotores capaces de volar con uno o más motores parados.

Durante la guerra de Corea el Departamento de Defensa de los Estados Unidos realizó estudios de fiabilidad de equipos electrónicos militares, cuyos fallos estaban ocasionando graves pérdidas económicas y disminución de la efectividad militar. La relación entre confiabilidad, costos y mantenimiento adquirió gran importancia. Las compras de equipos electrónicos por las fuerzas armadas de los Estados Unidos fueron reglamentadas según especificaciones de confiabilidad de los equipos.

El desarrollo de las concepciones y técnicas para el *análisis de confiabilidad de componentes, equipos y sistemas* ha estado asociado al desarrollo de tecnologías complejas y de alto riesgo, tales como la aeronáutica, militar y nuclear.

En la década de 1950 comenzó el desarrollo de la industria nuclear, y los conceptos relacionados con la confiabilidad fueron usados de forma creciente en el diseño de las plantas nucleares y de sus sistemas de seguridad.

Hasta principios de los años 60 los estudios teóricos y prácticos sobre confiabilidad eran realizados fundamentalmente en los Estados Unidos y la Unión Soviética. En esta década los estudios se extienden hacia otros países y también hacia otras tecnologías. Tiene lugar además un gran desarrollo de los fundamentos y de los conceptos teóricos relacionados con la confiabilidad, se produce la consolidación de una *Teoría de la Confiabilidad*. En esta época se expone por primera vez una *teoría matemática de la confiabilidad* (Barlow and Proschan (1964, 1975) y Gnedenko et al. (1965)).

El campo de aplicación de la Teoría de la Confiabilidad se amplía constantemente. *Todos los sistemas de ingeniería, simples y complejos, pueden beneficiarse de la aplicación integrada de los conceptos de esta teoría en sus fases de planeación, diseño y operación*. En la fase de operación y de mantenimiento de los equipos, *los estudios de confiabilidad ayudan en la toma de decisiones sobre la calidad y frecuencia de los mantenimientos*.

Un aumento de la confiabilidad conlleva, en general, el aumento a corto plazo de los costos. Pero este aumento de la confiabilidad puede revertirse en ganancia en un plazo mayor, y puede significar, por otra parte, una disminución de riesgos para la salud y la vida de las personas, y para el medio ambiente.

A continuación se analizan, el problema de la determinación del procedimiento óptimo de búsqueda de fallos en los equipos, y el problema de la planificación óptima de la realización de pruebas periódicas para la detección de fallos en los equipos.

Todos los sistemas de ingeniería, simples y complejos, pueden beneficiarse de la aplicación integrada de los conceptos de esta teoría en sus fases de planeación, diseño y operación.

2. BÚSQUEDA DE FALLOS

Se considera un equipo constituido por dos componentes en serie, es decir, el equipo falla cuando falla al menos uno de sus componentes. Se supone que es conocida la probabilidad q_i de que habiendo fallado el equipo, el fallo haya sido causado por el fallo del componente i, $i = 1, 2$, y se asume que ambos componentes no pueden fallar simultáneamente. Entonces $q_1 + q_2 = 1$. Sea c_i el costo por chequeo y reparación en caso de fallo del componente i, i = 1, 2. Se pueden utilizar dos políticas para la búsqueda del fallo. La política 1 consiste en chequear primero el componente 1, incurriéndose entonces en el gasto c_1 independientemente de que haya fallado o no este componente; si el componente 1 no falló, entonces falló el componente 2, el cual no será necesario chequear, pero se incurrirá en el gasto c_2 debido a su reparación. Con la política 2 la situación es análoga, se chequea primero el componente 2 y si éste no falló, entonces se repara el componente 1.

Cuando $c_1 = c_2$ es evidente que para incurrir en el menor costo de la búsqueda del fallo y reparación del equipo debe chequearse primero el componente 1, si $q_1 > q_2$, y primero el componente 2, si $q_1 < q_2$; en el caso $c_1 = c_2$ y $q_1 = q_2$, es indiferente cual componente se chequea primero. Cuando $c_1 < c_2$ y $q_1 \geq q_2$, o cuando $c_1 > c_2$ y $q_1 \leq q_2$, es también evidente cual componente debe chequearse primero para que el costo sea el menor. Pero, por ejemplo, si $c_1 < c_2$ y $q_1 < q_2$, ¿cuál es el "mejor" orden de chequeo de los componentes, es decir, la política óptima de búsqueda del fallo? Se examina una posible respuesta a esta pregunta.

Se denota por X_i el costo de reparación cuando se chequea primero el componente i, $i = 1, 2$. Se observa que la variable aleatoria X_1 toma el valor c_1 cuando el componente que falla es el componente 1, lo cual ocurre con probabilidad q_1, y toma el valor $c_1 + c_2$ cuando el componente que falla es el 2, lo cual ocurre con probabilidad q_2. Entonces, teniendo en cuenta que $q_1 + q_2 = 1$, el valor medio (esperanza matemática) EX_1 de esta variable aleatoria se calcula

$$\begin{aligned} EX_1 &= c_1 q_1 + (c_1 + c_2) q_2 \\ &= c_1 + c_2 q_2. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene el valor medio EX_2 de la variable aleatoria X_2

$$EX_2 = c_2 + c_1 q_1.$$

EX_1 y EX_2 son los costos medios de reparación del equipo cuando se usan las políticas 1 y 2, respectivamente. La política 1 será la óptima si $EX_1 < EX_2$. Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$C_1 (1 - q_1) < c_2 (1 - q_2),$$

la cual también puede escribirse de las siguientes formas

$$\frac{c_1}{q_1} < \frac{c_2}{q_2} \quad \text{y} \quad \frac{q_2}{q_1} < \frac{c_2}{c_1}.$$

La utilidad de este resultado queda clara si se interpreta la esperanza matemática de una variable aleatoria como aproximadamente igual a la media aritmética de los valores observados de esta variable, cuando el número de estos valores es grande. Se supone que es necesario reparar un número grande de equipos del tipo descrito. Si se cumple una de las desigualdades equivalentes obtenidas, y siempre se utiliza la política 1, entonces el costo promedio de la reparación de estos equipos será el menor posible.

Se considera, por ejemplo, que el costo de chequeo y reparación del componente 2 es tres veces superior al costo correspondiente para el componente 1, es decir, $c_2 = 3c_1$. Sean $q_1 = 0.3$ y $q_2 = 0.7$. Se obtiene

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{7}{3} < 3 = \frac{3c_1}{c_1}.$$

Luego en esta caso la política óptima es la 1.

Se nota que si no sólo se conoce la proporción entre los costos $\frac{c_2}{c_1}$, sino también el valor de c_1 y c_2, entonces podrá calcularse además el costo medio al realizar la política óptima. Si en nuestro ejemplo anterior es conocido que $c_1 = 5$ y $c_2 = 15$, se tiene

$$Ex_1 = 5 + 15 \,.\, 0.7 = 15.5.$$

En el caso $c_1 = c_2 = 1$, los costos medios EX_1 y EX_2 pueden interpretarse como el número medio de chequeos que se realizan al aplicar las políticas 1 y 2, respectivamente. La política 1 será la óptima si $q_1 > q_2$. Con los datos de nuestro ejemplo, $q_1 = 0.3$, $q_2 = 0.7$, la política óptima es la 2 y el número medio de chequeos al utilizar esta política se calcula

$$Ex_2 = q_2 + 2q_1 = 1.3.$$

No es difícil generalizar el análisis hecho para un equipo constituido por dos componentes en serie, al caso de un equipo constituido por un número arbitrario de componentes. Se supone que el equipo tiene n componentes en serie y sean como antes, q_i y c_i, $i=1,2\ldots,n$, respectivamente, la probabilidad de fallo y el costo de chequeo asociado al componente i. La política óptima de búsqueda del fallo en este equipo consiste en chequear los componentes de acuerdo al orden de crecimiento de la sucesión $\frac{c_i}{q_i}$, $i=1,2,\ldots,n$. Si, por ejemplo, el valor menor de esta sucesión corresponde a $\frac{c_3}{q_3}$, entonces se chequea primero el componente 3; si el valor de la sucesión que sigue en orden de crecimiento es el correspondiente a $\frac{c_5}{q_5}$, entonces el próximo componente a chequear será el 5, y así sucesivamente.

Un aumento de la confiabilidad conlleva, en general, el aumento a corto plazo de los costos. Pero este aumento de la confiabilidad puede revertirse en ganancia en un plazo mayor, y puede significar, por otra parte, una disminución de riesgos para la salud y la vida de las personas, y para el medio ambiente.

Se ha examinado el modelo correspondiente a un equipo muy simple. Cuando el equipo o sistema donde se busca el fallo está constituido por una gran cantidad de componentes, chequear componente por componente no es económico y en ocasiones resulta técnicamente imposible. El sistema puede dividirse entonces en bloques para el chequeo, y en este caso surge el siguiente problema: ¿de qué manera conformar los bloques y en qué orden deben ser chequeados éstos, para que el número medio de componentes chequeados hasta la detección del fallo sea mínimo? Por otra parte, si la estructura del sistema no es una estructura serie, como la que se ha considerado, el fallo del equipo o sistema puede ser causado por el fallo de más de un componente y entonces será necesario sustituir o reparar todos los componentes que han fallado. Obviamente, en este último caso la solución del problema de optimización de la búsqueda de fallos en el sistema es mucho más compleja.

3. PRUEBAS PERIÓDICAS

Con el propósito de determinar si los parámetros que caracterizan el funcionamiento correcto de un equipo se hallan en los niveles requeridos, es decir, si puede considerarse que el equipo ha fallado o no, deben ser realizadas pruebas de su capacidad de trabajo. Si estas pruebas se llevan a cabo en intervalos de tiempo distantes, entonces el tiempo que transcurre entre el instante de fallo y el instante de detección de este puede ser grande. Luego parece conveniente efectuar las pruebas frecuentemente. Sin embargo, si durante la realización de las pruebas el equipo no puede cumplir sus funciones o cada prueba tiene un costo elevado, entonces tampoco será recomendable que estas se efectúen muy frecuentemente. Por lo tanto, es conveniente elegir los plazos de realización de las pruebas de forma tal que se haga óptimo algún coeficiente o función de pérdida convenientemente construido.

Se examinan dos casos, el primero cuando durante la prueba el equipo no cumple sus funciones y el segundo cuando durante la prueba el equipo si cumple estas funciones.

3.1 DURANTE LA PRUEBA EL EQUIPO NO CUMPLE FUNCIONES

Se considera que durante la prueba el equipo no cumple funciones, pero opera tal como si estuviera trabajando. Esto significa que durante ese intervalo de tiempo el equipo puede fallar, y además que la realización de la prueba no afecta la distribución de probabilidades de su tiempo de vida.

Se asume que el tiempo de vida T del equipo tiene distribución exponencial de parámetro λ.. Supongamos que el fallo sólo se puede detectar al finalizar la prueba, la cual tiene una duración Δ. Finalizada una prueba, si el componente no ha fallado, el inicio de la próxima prueba se planifica al cabo del tiempo θ. Si al finalizar una prueba el equipo falló, entonces este se sustituye instantáneamente por otro idéntico. Se llama *ciclo* al tiempo que transcurre entre el inicio de una prueba y el inicio de la prueba siguiente. Se nota que la duración de cada ciclo es igual a $\Delta+\theta$. De la suposición de distribución exponencial para el tiempo de vida del equipo se deduce que este no envejece (Barlow and Proschan 1975), en otras palabras, en el inicio de cada prueba el componente se encontrará como nuevo.

Se denota por Z el tiempo de trabajo útil del equipo durante un ciclo. Entonces Z será igual a T si el fallo del equipo ocurre antes del comienzo de la prueba de turno, y será igual a θ si el equipo no falla antes del comienzo de la prueba, pues durante la prueba el equipo no cumple funciones. Es decir

$$Z = \begin{cases} T & \text{si } T < \theta \\ \theta & \text{si } T > \theta \end{cases} .$$

Resulta natural considerar la fracción de tiempo medio de trabajo útil del equipo en un ciclo, que se denomina *coeficiente de utilización*, como medida de la eficiencia en el uso del equipo. Esta fracción, denotada por $K(\theta)$, se expresa

$$K(\theta) = \frac{EZ}{\Delta + \theta},$$

donde EZ denota la esperanza matemática de la variable aleatoria Z.

Desde el punto de vista del coeficiente de utilización la mayor eficiencia en el uso del equipo se alcanza cuando este coeficiente toma su valor máximo. Por lo tanto el problema consiste ahora en determinar el valor de θ que hace máximo $K(\theta)$.

Se denota por $f(t)$ la densidad de probabilidad de la variable aleatoria T. Puesto que esta variable aleatoria tiene distribución exponencial de parámetro λ, y entonces $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t>0$, después de algunos cálculos sencillos, se obtiene

$$\begin{aligned} EZ &= \int_0^{\theta} tf(t)dt + \int_{\theta}^{\infty} \theta f(t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right), \end{aligned}$$

de donde

$$K(\theta) = \frac{1 - e^{-\lambda\theta}}{\lambda(\Delta + \theta)}.$$

Obsérvese que $K(0)=0$ y $K(+\infty)=0$, es decir, en los casos extremos en que el equipo se prueba constantemente y en que al equipo no se le realiza ninguna prueba, el coeficiente de utilización es nulo. En el primer caso este coeficiente es nulo porque el equipo no cumple nunca sus funciones, debido a que siempre está probándose, y en el segundo caso porque no se detecta su fallo y entonces nunca se sustituye por un equipo nuevo.

El valor de θ que hace óptimo $K(\theta)$ debe satisfacer la condición $\frac{dK(\theta)}{d\theta} = 0$, la cual equivale a la ecuación

$$1 + \lambda\theta - e^{\lambda\theta} + \lambda\Delta = 0 \cdot$$

Denotando $g(\theta) = 1 + \lambda\theta - e^{\lambda\theta} + \lambda\Delta$, la ecuación anterior se escribe

$$g(\theta) = 0 .$$

Puesto que $\frac{dg(\theta)}{d\theta} > 0$, para $\theta > 0$, $g(0) = \lambda\Delta > 0$ y $g(\infty) = -\infty$, entonces se concluye que existe una única solución de la ecuación $g(\theta) = 0$ y por lo tanto un único punto de extremo de la función $K(\theta)$, además es el valor de θ que maximiza esta función.

La ecuación $g(\theta) = 0$ no tiene solución analítica y debe resolverse aproximadamente, para valores de θ y Δ dados, utilizando algún método numérico. No obstante, si $\lambda\theta << 1$, entonces podemos hallar una solución general aproximada de esta ecuación. Sustituyendo la expresión

$$e^{\lambda\theta} \approx 1 + \lambda\theta + \frac{(\lambda\theta)^2}{2}$$

en la ecuación $g(\theta) = 0$, se obtiene la siguiente ecuación aproximada

$$\frac{(\lambda\theta)^2}{2} \approx \lambda\theta,$$

de donde se halla

$$\theta \approx \sqrt{\frac{2\Delta}{\lambda}}.$$

Obsérvese que como el parámetro λ de una distribución exponencial es igual al inverso de su valor medio, entonces la condición $\lambda\theta << 1$ significa que el tiempo entre las pruebas es mucho menor que el tiempo medio de vida del equipo, lo cual constituye una suposición natural en algunas situaciones prácticas.

Se supone que el tiempo medio de vida del equipo es 100 horas. Entonces $\lambda = 10^{-2}$. Se supone además que Δ=1 hora. De la fórmula aproximada anterior, se obtiene

$$\theta \approx \sqrt{2 \cdot 100} = 14.14 \cdot$$

Puesto que $\lambda\theta = 10^{-2} \cdot 14.14 = 0.1414$ es un valor no muy pequeño, entonces el valor de θ hallado puede ser una mala aproximación del verdadero valor de θ. Sin embargo, este valor aproximado puede ser utilizado como valor inicial en la aplicación de algún método numérico de solución de ecuaciones. Aplicando uno de estos métodos se obtiene θ = 13.8164. Es decir, para que el coeficiente de utilización del equipo sea máximo, cada prueba debe iniciarse aproximadamente 14 horas después de finalizada la prueba anterior.

3.2 DURANTE LA PRUEBA EL EQUIPO CUMPLE FUNCIONES

Se analiza ahora el problema planteado desde el punto de vista los costos. Se supone que c_1 es el costo de realización de cada prueba y que c_2, (c_2>0) es el costo por unidad de tiempo que el componente no cumple funciones, debido a que falló y aún no ha sido detectado el fallo. Para simplificar la exposición se supone que la duración de la prueba Δ es tan pequeña que puede despreciarse, es decir, $\Delta = 0$. Cada ciclo tendrá entonces duración θ. El costo medio por unidad de tiempo $C(\theta)$, correspondiente a cada ciclo se expresa

$$C(\theta) = \frac{c_1 + c_2(\theta - EZ)}{\theta}.$$

El problema consiste en hallar el valor de θ para el cual la función toma su valor mínimo. Pero, ¿existe tal valor mínimo?

En la sección 3.1 se obtuvo

$$EZ = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right).$$

Sustituyendo esta expresión en la expresión de $C(\theta)$, se tiene

$$C(\theta) = \frac{c_1 + c_2\left(\theta - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right)\right)}{\theta}.$$

Un valor de θ donde la función $C(\theta)$ alcance el valor mínimo debe satisfacer la condición $\frac{dC(\theta)}{d\theta} = 0$, la cual equivale a la ecuación $g(\theta) = 0$, donde

$$g(\theta)=\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda\theta}\right)-\theta e^{-\lambda\theta}-\frac{c_1}{c_2}=0.$$

Puesto que $\frac{dg(\theta)}{d\theta}>0, \text{para}\,\theta>0, g(0)=-\frac{c_1}{c_2}<0$ y $g(\infty)=\frac{1}{\lambda}-\frac{c_1}{c_2}$, entonces la ecuación $g(\theta)=0$ tiene solución (y única) si y sólo si $\frac{1}{\lambda}-\frac{c_1}{c_2}>0$.

Luego, cuando la razón entre los costos $\frac{c_1}{c_2}$ es mayor que el tiempo medio de vida del equipo, no existirá un valor óptimo de $C(\theta)$.

En el caso $\lambda\theta<<1$, utilizando la aproximación $e^{\lambda\theta}\approx 1+\lambda\theta$, se obtiene una solución aproximada de la ecuación $g(\theta)=0$:

$$\theta\approx\sqrt{\frac{c_1}{\lambda c_2}}.$$

En Valdés (1976) se hace un análisis general del problema expuesto en esta sección, considerando la realización de las pruebas no instantánea, e incluso con una duración aleatoria.

BIBLIOGRAFÍA

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1964). *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley .

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. Halt, Rinehart and Wiston, Inc.

Gnedenko, B.V., Beliaev, Yu. K. and Soloviev, A.D. (1965). Métodos Matemáticos de la Teoría de la Confiabilidad. Nauka, Moscú.

Valdés Castro, J. (1976). Determinación del plan de realización de chequeos a los equipos. *Investigación Operacional*, n.19. Universidad de La Habana.