Error en la Solución de Problemas de Elasticidad con el Método de los Elementos Finitos

Jorge ▪ Luis ▪ Restrepo ▪ O.

Una parte imprescindible en un análisis con el Método de los Elementos Finitos, MEF, es la evaluación del error inherente a la solución. Para un problema real, el error exacto no se puede obtener, salvo en casos especiales, pero existen algunos procedimientos que permiten hacer una estimación del error para determinar la calidad de la solución.

Los errores en la solución de un problema de elasticidad cuando se emplea el MEF se pueden clasificar como:

Jorge Luis Restrepo O. Profesor de la Universidad EAFIT. Ingeniero Mecánico de la Universidad Nacional, Facultad de Minas. PH.D. en Diseño Mecánico de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia, España.

- **Errores de modelado**. Aparecen debido a la diferencia que existe entre el sistema físico y su modelo matemático.
- **Errores de discretización**. Aparecen debido a la representación que se hace del sistema continuo, con un número infinito de grados de libertad, en un sistema discreto con N grados de libertad (gdl).
- **Errores de redondeo y manipulación matemática**. Aparecen debido a la utilización de algoritmos aproximados en algunas fases de la solución y al almacenamiento y operación de números reales.

Suponiendo una buena aproximación del modelo físico y con el empleo de los sistemas modernos, el error predominante en la solución de un problema utilizando el MEF es el error de discretización.

Suponiendo una buena aproximación del modelo físico y con el empleo de los sistemas modernos, el error predominante en la solución de un problema utilizando el MEF es el error de discretización.

Con el MEF se pueden obtener soluciones con mucha precisión siempre y cuando se tenga un número relativamente grande de gdl, sin embargo se debe considerar que, por un lado, los mismos datos o hipótesis del problema (geometría, material y acciones externas) son imprecisos y esta imprecisión es heredada por la solución y por otro lado, que el costo de una solución con el MEF se incrementa al aumentar el número de gdl. No tiene pues sentido buscar una solución con una precisión mayor que la que puedan ofrecer los datos e hipótesis simplificativas del problema siendo lo más razonable, por razones de disminución de costos, solucionar el problema empleando un modelo con pocos gdl pero que represente satisfactoriamente el problema y buscar una forma de estimar el error en la solución. Si el error estimado es mayor que un valor permisible se representa el modelo empleando un mayor número de gdl y se soluciona de nuevo y así sucesivamente hasta lograr una precisión mejor o igual a la deseada.

A continuación se presentan las definiciones de error de discretización empleadas en los problemas de elasticidad, las características de la convergencia asintótica de este error y los métodos empleados actualmente para estimar el valor del error en la solución de un problema con el MEF.

1. ERROR EXACTO

En los problemas de elasticidad y suponiendo que se conoce la solución exacta del mismo, el error en la solución se puede determinar, para cada punto del modelo, restando los valores de las soluciones exactas y del MEF. Esta evaluación del error puede hacerse en desplazamientos, tensiones o en cualquier otra variable del problema. Si se representa por u_{ex} el valor del desplazamiento exacto en un punto y por u_{ef} el valor del desplazamiento en la solución con el MEF del mismo punto, el error absoluto en desplazamientos de la solución con el MEF, e_{uex}, para dicho punto, será:

$$e_{u\,ex} = u_{ex} - u_{ef} \qquad (1)$$

Con fines comparativos suele hablarse de los errores relativos más que de los errores absolutos. El error relativo, η_{uex}, se calcula dividiendo el error absoluto por el valor exacto de la solución

$$\eta_{u\,ex} = \frac{e_{u\,ex}}{u_{ex}} \quad (2)$$

Si se consideran las tensiones, el error absoluto en la solución, $e_{\sigma ex}$ y el error relativo, $\eta_{\sigma ex}$ se definen por las relaciones:

$$e_{\sigma\,ex} = \sigma_{ex} - \sigma_{ef} \quad (3)$$

$$\eta_{\sigma\,ex} = \frac{e_{\sigma\,ex}}{\sigma_{ex}} \quad (4)$$

donde σ_{ex} y σ_{ef} son las tensiones exactas y del MEF para un punto cualquiera del dominio.

2. NORMA DEL ERROR

Lo más práctico, en un análisis de Elementos Finitos, es medir los errores de discretización utilizando una norma que proporcione una magnitud del error en términos de una magnitud escalar. Con una norma del error se calcula, en cierta forma, un valor promediado de las magnitudes de los errores en todo el dominio. La norma del error se puede calcular en forma absoluta o en forma relativa. En problemas de elasticidad se utiliza ampliamente la norma energética porque se relaciona directamente con la energía del sistema, sin embargo en otras aplicaciones puede tener más sentido físico otro tipo de norma. A continuación se describen algunas de las normas empleadas en la estimación de errores de las soluciones por el MEF.

- **Valor absoluto máximo del error**. Con esta norma se determina el valor absoluto máximo de los errores y puede plantearse en desplazamientos, tensiones, etc. Considerando los desplazamientos, el error absoluto, $\|e_{u\,ex}\|_{max}$, en esta norma se define por la relación:

$$\|e_{u\,ex}\|_{max} = \text{máximo}\,|e_{u\,ex}| \quad (5)$$

donde $|e_{u\,ex}|$ es el valor absoluto máximo de los errores en desplazamiento. El error relativo en esta norma considerando los desplazamientos se define por la expresión:

$$\eta_{u\,ex\,(max)} = \frac{\|e_{u\,ex}\|_{max}}{|u_{ex}|} \quad (6)$$

donde $|u_{ex}|$ es el valor absoluto del desplazamiento en el punto correspondiente al máximo valor del error.

Lo más práctico, en un análisis de Elementos Finitos, es medir los errores de discretización utilizando una norma que proporcione una magnitud del error en términos de una magnitud escalar. Con una norma del error se calcula, en cierta forma, un valor promediado de las magnitudes de los errores en todo el dominio.

- **Norma L2**. Esta norma representa la longitud euclidiana del campo de errores o el valor cuadrático medio del error. Puede igualmente plantearse en desplazamientos, tensiones, deformaciones, etc. El valor del error en esta norma en forma absoluta y considerando los desplazamientos, $\|e_{u\,ex}\|_{L2}$, se obtiene con la expresión:

$$\|e_{u\,ex}\|_{L2} = \left(\int_V \{e_{u\,ex}\}^T \cdot \{e_{u\,ex}\}\,dV\right)^{1/2} \quad (7)$$

siendo $\{e_{u\,ex}\}$ el error en desplazamiento expresado en forma vectorial, (las componentes de este vector son los errores en los desplazamientos calculados para cada uno de los grados de libertad en un punto), $\{e_{u\,ex}\}^T$, es la transpuesta del vector de errores y la integral se evalúa sobre todo el dominio o volumen, *V*, del problema. El error relativo en esta norma considerando los desplazamientos se define por la expresión:

$$\eta_{u\,ex\,(L2)} = \frac{\|e_{u\,ex}\|_{L2}}{\|u_{ex}\|_{L2}} \qquad \textbf{(8)}$$

siendo $\|u_{ex}\|_{L2}$ el valor de la norma L2 de los desplazamientos exactos que se calcula con la expresión:

$$\|u_{ex}\|_{L2} = \left(\int_V \{u_{ex}\}^T \cdot \{u_{ex}\}\,\mathbf{dV}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(9)}$$

- **Norma energética**. Esta norma está definida como la raíz cuadrada de la energía de deformación del error, (estrictamente es el doble de la energía pues no se considera la constante ½ en la integral). La expresión analítica para la evaluación del error absoluto en esta norma, $\|e_{ex}\|$, es:

$$\|e_{ex}\| = \left(\int_V \{e_{\sigma\,ex}\}^T \cdot [\mathbf{D}]^{-1} \cdot \{e_{\sigma\,ex}\}\,\mathbf{dV}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(10)}$$

siendo $\{e_{\sigma\,ex}\}$ el error en tensiones y $[D]$ la matriz de constantes elásticas que permite relacionar las tensiones y deformaciones.

El error relativo en esta norma se define por la expresión:

$$\eta_{ex} = \frac{\|e_{ex}\|}{\|u_{ex}\|} \qquad \textbf{(11)}$$

siendo $\|u_{ex}\|$ el valor de la norma energética, raíz cuadrada de la energía de deformación, de la solución exacta que se define por la expresión:

$$\|u_{ex}\| = \left(\int_V \{\sigma_{ex}\}^T \cdot [\mathbf{D}]^{-1} \cdot \{\sigma_{ex}\}\,\mathbf{dV}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(12)}$$

donde $\{\sigma_{ex}\}$ es el valor de la tensión de la solución exacta.

Como se ha dicho previamente, la norma energética es la medida de error más utilizada en problemas de elasticidad debido a que esta norma está directamente asociada con el planteamiento, en desplazamientos, del MEF que minimiza la energía de deformación del error. La norma energética posee una propiedad muy interesante que permite estimar la energía de deformación exacta a partir de la energía de deformación obtenida en la solución con el MEF:

$$\|u_{ex}\|^2 \approx \|u_{ef}\|^2 + \|e_{ex}\|^2 \qquad \textbf{(13)}$$

La relación anterior establece que la energía de deformación exacta se puede calcular sumando la energía de deformación de la solución del MEF y la energía de deformación del error. La afirmación anterior se cumple con más precisión a medida que los errores van haciéndose más pequeños, es decir cuando se incrementa el número de gdl del problema.

3. CONVERGENCIA ASINTÓTICA DEL ERROR

En los problemas de elasticidad los errores exactos en desplazamientos son del orden $O(h^{p+1})$, y los errores exactos en tensiones y deformaciones son del orden $O(h^p)$, siendo p el grado del polinomio utilizado en la interpolación de los desplazamientos. Este resultado se puede comprender si se considera que la solución exacta del problema, dentro de un elemento, se puede desarrollar en serie de Taylor.

Si dentro del elemento de tamaño h, se utiliza una expansión polinómica local de grado p, como $(x - x_i)$ y $(y - y_i)$ son del orden de magnitud de h, el error será $O(h^{p+1})$. Las tensiones y las deformaciones se obtienen derivando una vez el campo de desplazamientos y en consecuencia se tendrán polinomios de un grado menor y el error resultante será del orden $O(h^p)$.

Para asegurar la convergencia en la solución es necesario que la interpolación hecha en desplazamientos cumpla determinadas condiciones. En el caso de elasticidad, es necesario que haya continuidad en las funciones de desplazamientos en la frontera entre elementos y que en los términos del desarrollo polinómico, para la interpolación de los desplazamientos, se incluyan los elementos constantes y lineales para poder simular correctamente los movimientos de cuerpo rígido y los estados de deformación constante. Adicionalmente en la evaluación numérica de las matrices de los elementos se debe emplear un esquema de integración numérica apropiado (ver Strang 1993).

Si se cumplen las condiciones mínimas, previamente enunciadas, es posible asegurar que la solución con el MEF tiende a la solución exacta a medida que se refina la malla y por ende se incrementa el número de gdl del modelo. El error en la solución tenderá pues a cero en forma asintótica, dependiendo la velocidad de dicha convergencia de algunos factores, (ver Babuska 1982) como son: el grado del polinomio utilizado en la interpolación de desplazamientos, la forma y estrategia con que se incremente el número de gdl del problema y la variable en que se mida el error.

Considerando los errores en la norma energética y suponiendo que el refinamiento de la malla se basa en una disminución uniforme del tamaño de los elementos (refinamiento h-uniforme), el error en la solución del MEF, (ver Babuska 1982), está acotado por:

$$\|e_{ex}\| \leq \mathbf{C} \cdot \mathbf{h}^{\alpha} \qquad \textbf{(14)}$$

siendo $\|e_{ex}\|$, el error exacto en la norma energética; **C**, una constante positiva que depende del problema estudiado; **h**, el tamaño equivalente del elemento y α, una constante positiva que representa el orden o velocidad de la convergencia del error en función del tamaño del elemento.

Si se cumplen las condiciones mínimas, previamente enunciadas, es posible asegurar que la solución con el MEF tiende a la solución exacta a medida que se refina la malla y por ende se incrementa el número de gdl del modelo.

Para fines comparativos se acostumbra expresar esta ley en función del número de gdl. Para el problema en dos dimensiones se tiene:

$$N^{-1/2} \cong \mathbf{h} \qquad \textbf{(15)}$$

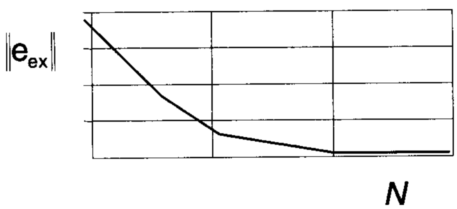
siendo N, el número de gdl. Substituyendo la relación anterior en la expresión que acota los errores en la norma energética se obtiene:

$$\|e_{ex}\| \leq \mathbf{C}\cdot(N)^{-\frac{1}{2}\alpha} \tag{16}$$

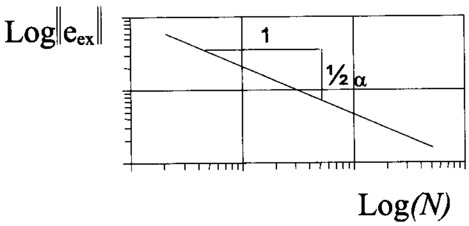
Si se representa en un gráfico el valor que acota la norma del error exacto, $\|e_{ex}\|$, en función del número de grados de libertad, N, figura 1-a, se observa la característica asintótica de la relación. Y la representación gráfica del logaritmo de la norma del error en función del logaritmo de N, produce una línea recta de pendiente negativa, figura 1-b. La pendiente de esa línea es la velocidad asintótica de convergencia en función del número de gdl, (½α).

FIGURA 1

a) Convergencia asintótica del error



b) Velocidad de convergencia del error



En elasticidad 2D, α es igual al grado mayor del polinomio en la función de interpolación si la solución no presenta puntos singulares. Cuando se consideran problemas con singularidades en la solución, la velocidad de convergencia puede verse disminuida y para contemplar este caso la cota del error, en refinamiento h-uniforme, se expresa como, (ver Oliver1991, Szabo 1988):

$$\|e_{ex}\| \leq \mathbf{C}\cdot(N)^{-\frac{1}{2}\min(p,\mu)} \tag{17}$$

siendo p, el grado del polinomio completo utilizado en la interpolación y μ, una constante que caracteriza la intensidad de las singularidades.

Sin embargo, cuando se realiza un refinamiento adaptativo adecuado, distribuyendo el error absoluto entre los elementos de la malla, la velocidad de convergencia de error tiende a ser independiente del valor de la intensidad de la singularidad, μ, resultando en este caso:

$$\|e_{ex}\| \leq \mathbf{C}\cdot(N)^{-\frac{1}{2}p} \tag{18}$$

Aunque en los problemas reales no puede obtenerse un valor del error de discretización exacto, se han desarrollado procedimientos de estimación del error, confiables, que son utilizados para determinar la precisión de la solución y adicionalmente como criterio para modificar las mallas y mejorar la precisión de análisis posteriores.

4. ESTIMACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN

La mayor parte de los estimadores del error en la solución del MEF están enfocados a problemas estáticos donde la tendencia es a utilizar estimadores del error a posteriori que permitan evaluar los errores a nivel de elemento, (ver Zhong 1991). En otras aplicaciones el problema ha sido menos tratado y existe poca información sobre la forma de estimar los errores pero en algunos casos pueden utilizarse los estimadores del error del problema estático. A continuación se presenta una revisión de las principales técnicas de estimación del error de discretización en los análisis con el MEF.

Aunque en los problemas reales no puede obtenerse un valor del error de discretización exacto, se han desarrollado procedimientos de estimación del error, confiables, que son utilizados para determinar la precisión de la solución y adicionalmente como criterio para modificar las mallas y mejorar la precisión de análisis posteriores.

4.1 ANÁLISIS DUAL

Fraeijs de Veubeke, (Fraeijs 1972), fue el primero en dar un método de estimación del error global. El método se basa en obtener un límite superior y otro inferior de la energía de deformación exacta. Estos límites se calculan utilizando dos métodos diferentes en la solución del problema, uno con el principio de mínima energía potencial y otro con el principio de mínima energía complementaria.

Llamando $\mathbf{U}_{ep}$, al doble de la energía de deformación obtenida con el principio de mínima energía potencial, $\mathbf{U}_{ec}$, al doble de la energía de deformación obtenida con el principio de mínima energía complementaria y $\mathbf{U}_{ex}$, al doble de la energía de deformación exacta, Γ_u la zona del contorno con condiciones de desplazamiento impuestas, Γ_t la zona del contorno con condiciones de tensión impuestas; si el sistema es lineal y está en equilibrio se cumple que:

a. Si las condiciones de desplazamiento impuestos son homogéneas ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en Γ_u donde $\mathbf{u}$ son los desplazamientos) entonces:

$$\mathbf{U}_{ep} \leq \mathbf{U}_{ex} \leq \mathbf{U}_{ec} \qquad (19)$$

b. Si las condiciones de tensión impuestas son homogéneas ($\mathbf{t} = \mathbf{0}$ en Γ_t donde $\mathbf{t}$ son las tracciones superficiales) y las fuerzas por unidad de volumen son nulas, entonces:

$$\mathbf{U}_{ec} \leq \mathbf{U}_{ex} \leq \mathbf{U}_{ep} \qquad (20)$$

Por tanto se puede estimar que:

$$\mathbf{U}_{ex} \approx \mathbf{0.5}\ [\mathbf{U}_{ep} + \mathbf{U}_{ec}] \qquad (21)$$

Algunos inconvenientes de este planteamiento son:

- No se puede aplicar a problemas con condiciones mixtas.
- La evaluación del error resulta costosa ya que hace falta realizar un análisis para calcular cada uno de los límites.
- No se puede obtener el error a nivel de elemento. Se puede aplicar indirectamente a nivel local para construir ciertos estimadores de error a posteriori.

4.2 EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Este método comprende las siguientes etapas:

a. Selección de una ley de convergencia empírica, como por ejemplo:

$$\mathbf{U}_{ex} - \mathbf{U}_{ef} = \mathbf{C} \cdot \left(\frac{1}{N} \right)^{2\alpha} \qquad \mathbf{(22)}$$

donde N, es el número de grados de libertad; **C**, es una constante a determinar experimentalmente; α, es la velocidad de convergencia del error total; $\mathbf{U}_{ex}$, es la energía de deformación exacta y $\mathbf{U}_{ef}$, es la energía de deformación de la solución del MEF.

b. Efectuar una serie de análisis de elementos finitos:

$$\begin{array}{cccc} N_1, & N_2, & N_3, & \dots \\ (\mathbf{U}_{ef})_1, & (\mathbf{U}_{ef})_2, & (\mathbf{U}_{ef})_3, & \dots \end{array} \qquad \mathbf{(23)}$$

c. Determinar la velocidad de convergencia por vía teórica o numérica:

Por vía teórica:

$$\alpha = \alpha(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \qquad \mathbf{(24)}$$

donde **d**, es la dimensión espacial del problema y **p** es el grado del polinomio de aproximación de elementos finitos.

Por vía numérica, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\frac{N_i^{-2\alpha} - N_j^{-2\alpha}}{N_j^{-2\alpha} - N_k^{-2\alpha}} = \frac{(\mathbf{U}_{ef})_i - (\mathbf{U}_{ef})_j}{(\mathbf{U}_{ef})_j - (\mathbf{U}_{ef})_k} \qquad \mathbf{(25)}$$

Determinar la constante **C** por medio de la fórmula:

$$\mathbf{C} = \left[(\mathbf{U}_{ef})_i - (\mathbf{U}_{ef})_j \right] \frac{(N_i - N_j)^{2\alpha}}{N_i^{-2\alpha} - N_j^{-2\alpha}} \qquad \mathbf{(26)}$$

Estimar la energía total exacta por medio de la ecuación:

$$\mathbf{U}_{ef} \approx (\mathbf{U}_{ef})_i + \left(\frac{1}{N_i} \right)^{2\alpha} \qquad \mathbf{(27)}$$

Para obtener buenos resultados es conveniente tomar las siguientes precauciones:

- Es preferible utilizar una serie de mallas sucesivamente refinadas de forma uniforme a partir de un mallado inicial, con el fin de que la energía de deformación calculada mediante el MEF se ajuste mejor a la ley empírica.
- Conviene utilizar la velocidad de convergencia calculada numéricamente.
- Para el cálculo de α, **C** y **U**, es preferible utilizar los resultados del MEF correspondientes a los últimos mallados de la serie.
- Las mallas no deben ser excesivamente refinadas ya que en este caso podrían aparecer otras fuentes de error que podrían falsear los resultados.

Algunos inconvenientes de este planteamiento son:

- Se debe asegurar que la ley de convergencia seleccionada es válida para el sistema en concreto que se quiere analizar, lo cual es difícil de juzgar en muchas ocasiones.
- Son necesarios al menos dos análisis (tres en el caso en que la velocidad de convergencia se calcule numéricamente) para calcular el error.
- No se puede calcular el error a nivel de elemento.
- No se puede aplicar a modelos híbridos.

El método de Extrapolación de Richardson para la estimación del error de discretización se usa a veces para evaluar la fiabilidad de los estimadores de error, a posteriori, aplicados a problemas donde la solución exacta es desconocida.

4.3 ESTIMADORES DE ERROR A POSTERIORI A NIVEL DE ELEMENTO

Para estimar el error de la solución de elementos finitos mediante las técnicas expuestas en el numeral anterior, hacen falta al menos dos análisis de elementos finitos del problema planteado. Se han desarrollado técnicas de estimación del error tanto a nivel global como a nivel de elemento y a nivel puntual que consiguen estimar el error con un solo análisis de elementos finitos reduciendo los tiempos de cálculo.

4.3.1 Estimadores de Error Residual

Estos estimadores están basados en el cálculo de los residuos de la solución de Elementos Finitos y pueden ser de tres tipos:

- Residuo de equilibrio en el elemento, **r**.
- Residuo o salto de tensiones en las interfaces entre elementos, J.
- Residuo o salto de tensiones en el contorno Γt, **G**.

A finales de los 70, Babuska, (ver Babuska 1978 y Babuska 1982), demostró matemáticamente que existe una relación entre el error en el elemento y el residuo del equilibrio en el elemento, **r**, en el caso de problemas de transferencia de calor unidimensional. Se puede estimar un límite superior de la norma energética de este error, $\mathbf{e}^{(e)}_{ef}$, por medio de:

$$\mathbf{e}^{(e)}_{ef} \le \frac{\left(\mathbf{h}^{(e)}\right)^2}{\pi^2 \mathbf{p}^2 \mathbf{a}_{min}} \mathbf{r}^{(e)\,2} \qquad \textbf{(28)}$$

donde $\mathbf{h}^{(e)}$, es el tamaño del elemento, $\mathbf{a}_{min}$, es el mínimo de la conductividad térmica del elemento, **p**, es el grado del polinómio en las funciones de forma.

Gago, (ver Gago 1983), aplicó la idea de Babuska y estima el valor del error a través de los saltos de tensiones en las interfaces entre elementos **J**, proponiendo una fórmula para elementos de grado mayor que dos, $\mathbf{p} \ge \mathbf{2}$, en problemas de elasticidad en 2D. Existen también expresiones análogas a la ecuación (28) para estimar los errores utilizando el residuo de las tensiones en el contorno **G**.

Estos estimadores son reglas empíricas que no se pueden demostrar matemáticamente y que, además, no son demasiado fiables. La principal aportación de Babuska y Gago es que definieron la forma que deberían tener los estimadores de error del tipo residual.

El método de Extrapolación de Richardson para la estimación del error de discretización se usa a veces para evaluar la fiabilidad de los estimadores de error, a posteriori, aplicados a problemas donde la solución exacta es desconocida.

4.3.2 Estimadores de Error basados en la Mejora de la Solución de Elementos Finitos

Un método completamente diferente a los descritos anteriormente para calcular el error a posteriori está basado en la idea de conseguir una mejor aproximación a la solución exacta. , $\{\mathbf{u}^*\}$, $\{\varepsilon^*\}$ y $\{\sigma^*\}$ a partir de la solución de elementos finitos, $\{\mathbf{u}_{ef}\}$, $\{\varepsilon_{ef}\}$ y $\{\sigma_{ef}\}$ y calcular su diferencia como una estimación del error exacto.

El método más utilizado para definir este campo mejorado, es hacerlo a partir del valor de las tensiones mejoradas en los nodos, $\{\sigma^*_i\}$ e interpolando a nivel de elemento:

$$\{\sigma^*\} = \sum_i \mathbf{N}_i \{\sigma^*_i\} \tag{29}$$

donde $\mathbf{N}_i$, es la función de forma del nodo usada en la interpolación de desplazamientos de elementos finitos.

Una vez obtenido el campo, $\{\sigma^*\}$, el error a nivel global o a nivel de elemento se calcula mediante una norma del error.

4.4 ESTIMADOR DE ZIENKIEWICZ-ZHU

El estimador de Zienkiewicz-Zhu, (ver Zienkiewicz 1987), está basado en la mejora de la solución del MEF. La idea básica de este estimador consiste en utilizar en la expresión del error en la norma energética, en lugar del campo de tensiones exacto, que es desconocido, un campo de tensiones mejorado obtenido a partir del campo de tensiones del MEF. El estimador de Zienkiewicz-Zhu, $\|\mathbf{e}_{es}\|$, tiene la forma:

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \left[\int_V (\{\sigma^*\} - \{\sigma_{ef}\})^T [\mathbf{D}]^{-1} (\{\sigma^*\} - \{\sigma_{ef}\}) dV\right]^{1/2} \tag{30}$$

donde $\{\sigma^*\}$, representa el campo de tensiones mejorado y $[\mathbf{D}]$ es la matriz de constantes elásticas.

El error estimado relativo, η_{es}, se obtiene sustituyendo el error exacto por el estimador de Zienkiewicz-Zhu y la energía de deformación exacta por la energía estimada:

$$\eta_{es} = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{u}_{es}\|} \tag{31}$$

donde $\|\mathbf{u}_{es}\|^2$, es una estimación de la energía de deformación mejor que la obtenida con el MEF, que se puede obtener aprovechando las propiedades de la norma energética:

$$\|\mathbf{u}_{es}\|^2 = \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 + \|\mathbf{e}_{es}\|^2 \tag{32}$$

siendo $\|\mathbf{u}_{ef}\|^2$, la energía de deformación de la solución del MEF.

A nivel de elemento podemos distinguir entre el error estimado relativo global:

$$\eta^{(e)}_{es\ global} = \frac{\|\mathbf{e}^{(e)}_{es}\|}{\|\mathbf{u}_{es}\|} \tag{33}$$

y el error estimado relativo local:

$$\eta^{(e)}_{es\ local} = \frac{\|\mathbf{e}^{(e)}_{es}\|}{\|\mathbf{u}^{(e)}_{es}\|} \tag{34}$$

donde el superíndice, $^{(e)}$, indica que la magnitud correspondiente se ha calculado en un elemento.

5. ÍNDICE DE EFECTIVIDAD DEL ESTIMADOR

Para estudiar la fiabilidad de los estimadores del error, se define el índice de efectividad, θ, como la relación entre el error estimado y el error exacto:

$$\theta = \frac{\mathbf{e}_{es}}{\mathbf{e}_{ex}} \tag{35}$$

Cuando se requiere hacer un estudio del comportamiento de un estimador de error, el error exacto, $\mathbf{e}_{ex}$, se suele calcular haciendo un análisis del problema con una malla muy fina de tal forma que los errores en la solución del MEF sean muy pequeños comparados con los errores de cualquier otra malla.

Un estimador del error se dice que es asintóticamente exacto si el índice de efectividad tiende a la unidad cuando el tamaño de los elementos tiende a cero, (ver Babuska 1992). Sin embargo, si el índice de efectividad tiende a un valor estable, diferente de la unidad, cuando el tamaño de los elementos tiende a cero, es posible definir un factor de corrección para el estimador del error que mejore la calidad de la estimación.

6. CONCLUSIONES

El empleo del MEF para la solución de problemas físicos requiere de un análisis de errores debido principalmente al factor de discretización, es decir, al hecho de haber representado un sistema continuo (con infinito número de gdl) por medio de un sistema discreto (con un número limitado de gdl). Y aunque, si se cumplen ciertas condiciones en el planteamiento de elementos finitos, se puede asegurar que la solución tiende a su valor exacto al incrementar el número de gdl, el costo del análisis y la incertidumbre en los datos e hipótesis hace que en la práctica solo se puedan resolver problemas utilizando una cantidad relativamente pequeña de gdl.

Aunque en los problemas reales no puede obtenerse un valor del error de discretización exacto, existen estimadores del error confiables cuyo comportamiento, índice de efectividad, mejora a medida que se refina la malla. Actualmente, en problemas de elasticidad, se utiliza casi exclusivamente el estimador del error basado en la norma energética cuya convergencia asintótica en función de los parámetros "tamaño del elemento y/o número de elementos", permite diseñar procedimientos de mejoramiento de la malla para incrementar la precisión de los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

Babuska, Y. and B. Szabo. (1982). On the Rates of Convergence of the Finite Element Method. Int. J. Numer. Meth. Engng. 18, 323-341.

Babuska, Y. and W. C. Rheinboldt. (1978). A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method. Int. J. Numer. Meth. Engng. 12, 1597-1659.

Babuska, Y.R. Duran and R. Rodriguez. (1992). Analysis of the efficiency of an a Posteriori Error Estimator for linear triangular Elements. SIAM J. Numer. Anal. 29, 947-964.

Fraeijs de Veubeke, B.M. and M.A. Hogge. (1972). Dual Analysis for Heat Conduction Problems by Finite Elements. Int. J. Numer. Meth. Engng. 5, 65-82.

Gago, J.P.D. W. Kelly, O. C. Zienkiewicz, Y. Babuska, and W.C. Rheinboldt. (1983). A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II – Adaptive Mesh Refinement. Int. J. Numer. Meth. Engng. 1621-1656.

Hughes, J.R. (1984). The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice Hall.

Oliver, J.L. (1991). Triangulación de Delaunay y Métodos Adaptativos de Elementos Finitos, Ph. D. Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, España.

Strang, G. and G. J. (1973). Fix. An Analysis of the Finite Element Method, Englewood Cliffs, N. J. Prentice Hall.

Szabo, B. and Y. Babuska, (1988). Computation of the Amplitude of Stress Singular Terms for Cracks and Reentrant Corners. ASTM Special technical publication 969.

Zhong, H.G. (1991). Estimateurs d'erreur a Posteriori et Adaptation de Maillages dans la Methode des Elements Finis. These de Doctorat d'etat, Universite de Liege, France.

Zienkiewicz, O.C. and J.Z. Zhu. (1987). A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. Int. J. Numer. Meth. Engng. 24, 337-357.