Procesos de Wiener

Ulises ■ Cárcamo ■ Cárcamo ■

Originados a partir de la necesidad de explicar un fenómeno mecánico, constituyen hoy en día una herramienta muy poderosa para explicar el comportamiento de fenómenos tan diferentes como los mercados financieros y la difusión de partículas en un medio.

1. EL MOVIMIENTO BROWNIANO

En 1827, el botánico Robert Brown (1773 - 1858) descubrió, a través del microscopio que, pequeñísimas partículas, originadas a partir de granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento vigoroso, irregular e incesante, como si fueran pequeños seres vivientes. El mismo Brown observó que

---

Ulises Cárcamo Cárcamo. Profesor Dpto. de Ciencias Básicas. Universidad EAFIT.

partículas muy finas de varios minerales, seguían el mismo movimiento.

El descubrimiento causó perplejidad a los científicos de su tiempo. Fueron muchos los intentos por explicar este *Movimiento Browniano*, como se le llamó después. Aunque se creía firmemente en una relación entre el movimiento *observado* y el movimiento de las moléculas del agua, en aquella época la composición atómica de la materia no era reconocida como una realidad.

La primera explicación científica de este fenómeno la realizó Albert Einstein en 1905. Einstein ignoraba que el fenómeno había sido observado por Brown, mucho antes. Con su trabajo, Einstein asentó las bases teóricas y experimentales de la teoría atómica de la materia e influenció el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos.

2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS CON INDICE TEMPORAL

Un Proceso estocástico con índice temporal es una familia $\{\xi_t, t \in T\}$ de variables aleatorias cuyo índice representa un conjunto de instantes en el tiempo. Si T es un subconjunto de **Z**, el conjunto de los enteros, se dice que el proceso es de *parámetro discreto*, si T es un intervalo, se dice que el proceso es de *parámetro continuo*. El conjunto de todos los valores que pueden tomar las variables aleatorias se llama el *Espacio de Estado* del proceso estocástico.

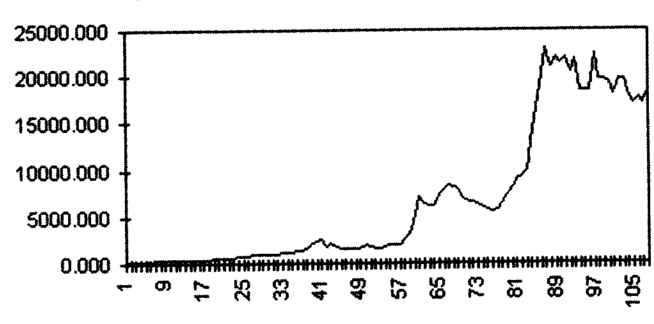
Por ejemplo, consideremos el precio de cierre, cada día, de un tipo de acción y el nivel del agua en un embalse en cada instante. En general es posible considerar que el precio de cierre de una acción, un día dado y el nivel del agua de un embalse en un instante dado, pueden ser modelados mediante variables aleatorias continuas.

Se puede modelar la sucesión de todos los precios de cierre de la acción, cada día del año, como un proceso estocástico de parámetro discreto $\{P_1, P_2, \ldots, P_{365}\}$, llamado también una sucesión aleatoria.

El conjunto de todos los precios observados al cierre de cada día, durante el año, constituye una trayectoria o función muestral del proceso. Dado que el precio de cierre puede tomar muchos valores, infinitos en teoría, entonces existe una infinidad de trayectorias posibles para este proceso. Si en lugar de observar los precios de cierre, consideramos los precios en cada instante, entonces se tiene un proceso de índice continuo, de tiempo continuo o de trayectorias continuas.

El conjunto de todos los niveles de agua en cada instante, durante un año o cualquier otro intervalo de tiempo, se puede modelar mediante un proceso estocástico de parámetro continuo. El conjunto de todos los niveles observados, cada instante durante ese intervalo de tiempo, constituye una de todas las posibles trayectorias.

TRAYECTORIA CONTINUA DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO



2.1 PROCESOS MARKOVIANOS

Supongamos que podemos describir el comportamiento, a través del tiempo, de cierto sistema por medio de un proceso estocástico que tenga la siguiente característica:

Supuesto que conocemos el estado del sistema en el presente, el agregar información sobre los estados del sistema en el pasado no causa efecto en el conocimiento de las probabilidades de la evolución del sistema en el futuro.

La primera explicación científica de este fenómeno la realizó Albert Einstein en 1905. Einstein ignoraba que el fenómeno había sido observado por Brown, mucho antes. Con su trabajo, Einstein asentó las bases teóricas y experimentales de la teoría atómica de la materia e influenció el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos.

De los sistemas que poseen esta propiedad se dice que son Sistemas Markovianos y a la propiedad, se le llama **Propiedad de Markov**.

Son muchos los sistemas que se pueden modelar mediante procesos de Markov. Por ejemplo, bajo ciertas circunstancias se puede considerar que el precio de cierre que tendrá una acción mañana, no depende de los precios que tuvo antes, sino del precio que tiene hoy. El número de aparatos en una línea de montaje en este instante, depende sólo del número de aparatos en la línea en el instante anterior, y no de cuántos habían en instantes anteriores a ese.

Se puede suponer que los activos financieros se comportan de tal manera que toda la información sobre el comportamiento de sus precios está contenida en el precio actual, de tal manera que, para conocer el comportamiento futuro, no importa el comportamiento de los precios en el pasado. A ésta suposición se le llama "Eficiencia Débil" de un mercado.

Los procesos markovianos son los análogos probabilísticos de los Problemas de Valor Inicial asociados con ecuaciones determinísticas. En estos últimos se conocen un valor inicial para el sistema y una ecuación diferencial que muestra cómo es la variación del sistema, en un instante cualquiera, respecto al tiempo.

2.2 PROCESOS GAUSSIANOS

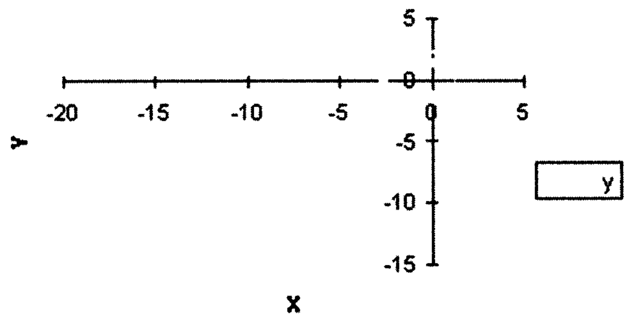
Un proceso estocástico $\{X_t\}$ es un Proceso Gaussiano o un Proceso Normal, si para todo n, y todo $t_1, t_2, \ldots, t_n$, se cumple que la distribución conjunta de las n variables aleatorias $x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}$ es una normal n-variada. La definición anterior equivale a enunciar: Para todo $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y todo conjunto de constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la combinación lineal $a_1 x_{t_1} + a_2 x_{t_2} + \ldots + a_n x_{t_n}$ tiene distribución normal. (Se puede considerar que las constantes son variables aleatorias con distribución normal y varianza cero).

2.3 PASEOS ALEATORIOS (RANDOM WALKS)

A los procesos de Wiener se les puede considerar como el caso límite de ciertos procesos llamados Paseos Aleatorios o Caminatas Aleatorias.

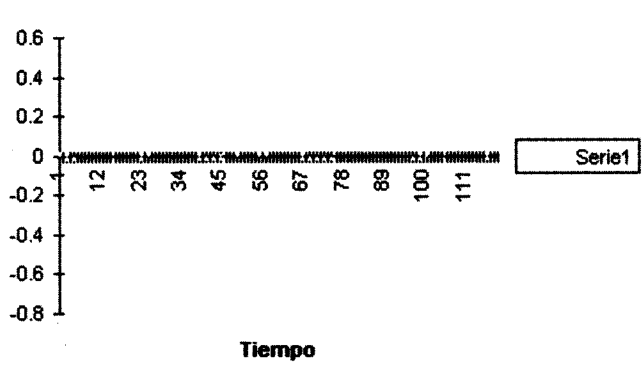
Considere una partícula situada en el plano, inicialmente en el punto (x_0, y_0), y que en cada instante de tiempo t = 1,2,3, . . . recorre una distancia fija D, pero en una dirección seleccionada al azar , tal como lo haría una persona totalmente embriagada: este es un ejemplo de un paseo aleatorio bidimensional.

PASEO ALEATORIO BIDIMENSIONAL



Consideremos un jugador que tiene una cantidad inicial de dinero D_0, y que comienza una serie de apuestas donde, en cada una de ellas, la probabilidad de ganar es **p** y la de perder es **1-p**, sean D_1, D_2, . . . , las cantidades de dinero después de apostar 1, 2, . . ., veces, respectivamente. Entonces la familia de variables aleatorias $\{D_i\}$ es un proceso estocástico markoviano, que es a su vez, un paseo aleatorio unidimensional. Si graficamos la cantidad que posee el jugador en función del tiempo obtendremos la imagen de una trayectoria.

TRAYECTORIA DE UN PROCESO UNIDIMENSIONAL DE WIENER



2.4 PASO AL LÍMITE Y PROCESOS WIENER

Consideremos ahora que el paseo aleatorio se realiza de tal manera que en cada instante del tiempo se toma una dirección. Obviamente, al reducirse el tiempo entre dos cambios de dirección consecutivos a cero, la distancia recorrida tiende a cero también. El proceso resultante $\{ W_t \}$ es lo que se llama Proceso de Wiener.

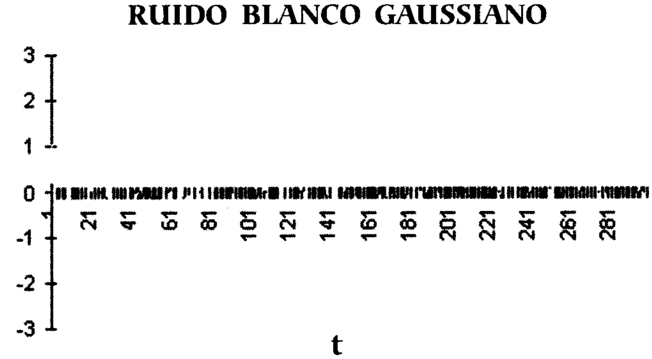
Las trayectorias de los procesos de Wiener son curvas que son continuas, pero que no son derivables en ningún punto.

2.5 RUIDO BLANCO

A pesar de lo enunciado anteriormente es posible considerar los procesos estocásticos desde el punto de vista de las funciones generalizadas (o distribuciones) que siempre tienen derivada y llegar a la conclusión que la derivada de un proceso de Wiener, es un proceso gaussiano $\{\xi_t\}$ conocido como Ruido Blanco Gaussiano (cuando ambos se consideran como procesos estocásticos generalizados) y que tiene la propiedad de que para todo t, el valor esperado $E(\xi_t)$, cumple que $E(\xi_t) = 0$.

La relación entre los dos tipos de procesos estocásticos $\{ W_t \}$ y $\{\xi_t\}$ se representa simbólicamente mediante la expresión $dW_t = \xi_t\, dt$.

RUIDO BLANCO GAUSSIANO



2.6 INTEGRALES ESTOCÁSTICAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

En el estudio de los sistemas dinámicos determinísticos continuos, la noción de diferencial juega un papel muy importante. Este indica el comportamiento del sistema en un intervalo de tiempo muy corto.

Por ejemplo, si C es capital acumulado en una cuenta bancaria que paga un interés del 5 % compuesto continuamente, la variación instantánea de C está determinada por el diferencial $dC = 0.05\ C\ dt$. Si además de este diferencial tenemos una condición inicial, por ejemplo la cantidad depositada originalmente (digamos, C_0) entonces se tiene el problema de valor inicial $dC = 0.05\ C\ dt$ sujeto a $C(0) = C_0$.

Análogamente, en el estudio de muchos sistemas dinámicos estocásticos se presentan problemas de valor inicial del tipo $dX(t) = \mu\left[t, X(t)\right] dt + \sigma\left[t, X(t)\right] dW_t$, $X(0) = a$, donde $X(t)$ es el proceso bajo estudio, μ y σ son funciones determinísticas de t y $X(t)$ y dW_t es el diferencial de un proceso de Wiener. El primer término del lado derecho se llama el *termino de tendencia* (local) y el segundo, el *término de difusión*.

La solución de este tipo de problemas es tema del estudio de la rama derivada del análisis aplicado llamada, Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

En tal estudio, es necesaria la noción de Integral Estocástica $\int_0^t g(s)\, dW_s$ para cierto tipo de procesos estocásticos $\{g(s)\} = \{g_s\}$. dW_s es la expresión que denota el comportamiento límite de $W(t + \Delta t) - W(t)$ cuando $\Delta t \to 0$.

A principios de los años 50, Kiyosi Itô publicó los primeros trabajos referentes al Cálculo Diferencial Estocástico. Allí presentó la fórmula que hoy conocemos como, **Fórmula de Itô**, fundamental para la solución de muchas ecuaciones diferenciales estocásticas.

Si $Z = f(t, X(t))$ es una función del proceso X y X tiene un diferencial dado por $dX(t) = g(t)\ dt + h(t)\ dW(t)$, entonces, bajo condiciones más o menos generales, el diferencial de Z se puede expresar como:

$$dZ(t) = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + g.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\} dt + h.\frac{\partial f}{\partial x}.dW(t)$$

Esta es la Fórmula de Itô.

2.7 EL MODELO DE BLACK - SCHOLES

Una de las aplicaciones más conocidas de las ecuaciones diferenciales estocásticas a las finanzas es el Modelo de Black-Scholes.

Se puede modelar la sucesión de todos los precios de cierre de la acción, cada día del año, como un proceso estocástico de parámetro discreto $\{P_1, P_2, \ldots, P_{365}\}$, llamado también una sucesión aleatoria.

Consideremos un mercado financiero, simplificado, libre de arbitraje y que consta sólo de dos tipos de activos: Un activo, libre de riesgo, cuyo precio puede representarse mediante un proceso estocástico B, y regido por la ecuación $dB(t) = r(t)\ B(t)\ dt$ y un tipo de acción, cuyo precio puede ser modelado mediante un proceso estocástico S, regido por la ecuación $dS(t) = S(t)\ \alpha(t, S(t))dt + S(t)\ \sigma(t,S(t))dW(t)$, donde, de nuevo $W(t) = W_t$ es un proceso de Wiener, σ es la volatilidad de $S(t)$.

El comportamiento del precio B del activo libre de riesgo durante un intervalo de tiempo corto, dt, es semejante al comportamiento del capital C, del ejemplo anterior, pero en éste r, el porcentaje de variación instantánea, en general, varia con el tiempo (por eso la notación r(t)). Las funciones α y σ son funciones determinísticas, conocidas, respectivamente, como *la tasa promedio de retorno local de S* y *la volatilidad de S*. El caso más común (y más importante) se presenta cuando r, α y σ son constantes determinísticas, en éste caso se tiene el sistema

$$dB(t) = rB(t)dt$$
$$dS(t) = \alpha\, S(t)dt + \sigma S(t)\, dW(t)$$

Utilizando la Fórmula de Itô y consideraciones apropiadas de la teoría relacionada con los derivados financieros se deduce la ecuación en derivadas parciales que rige el precio de los derivados (**Ecuación de Black-Scholes**):

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^{2}S^{2}\frac{\partial^{2}F}{\partial S^{2}}+r.S-rF=0, \text{ acá } F=F(t,s)$$

depende del tipo de derivado.

El premio Nobel de Economía de 1997 fué concedido a Robert C. Merton and Myron S. Scholes, como reconocimiento a la importancia de su fórmula para dar precio a las opciones.

Aunque se puede tener cierta idea intuitiva de algunos aspectos relacionados con los procesos de Wiener, esta comprensión será siempre limitada. Para comprender completamente todos los aspectos relacionados con los procesos de Wiener, es necesario un estudio más detallado y profundo, teniendo como base un conocimiento profundo de la teoría elemental de probabilidades. A continuación se hará una breve presentación de los resultados relacionados con los procesos estocásticos que están más relacionados con los procesos de Wiener. El lector que quiera acercarse a estos temas deberá consultar la bibliografía que se presenta al final del artículo.

Son muchos los sistemas que se pueden modelar mediante procesos de Markov. Por ejemplo, bajo ciertas circunstancias se puede considerar que el precio de cierre que tendrá una acción mañana, no depende de los precios que tuvo antes, sino del precio que tiene hoy. El número de aparatos en una línea de montaje en este instante, depende sólo del número de aparatos en la línea en el instante anterior, y no de cuántos habían en instantes anteriores a ese.

3. UN ESTUDIO MÁS DETALLADO

3.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Sean (Ω_1, A_1, P) un espacio de probabilidad (Ω_1 es el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, A_1 es una sigma-álgebra de subconjuntos de Ω_1 y P una medida de probabilidad definida en A_1) y (Ω_2, A_2) un espacio medible (Ω_2 es, en general, un conjunto de resultados asociados con los elementos del espacio muestral Ω_1 y A_2 una sigma-álgebra de subconjuntos de Ω_2). La función $\xi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ ($\xi = \xi(\omega)$) es una variable aleatoria, si para todo elemento D de Ω_2 se tiene que $\xi^{-1}(D)$es un elemento de Ω_1 . Una familia de variables aleatorias $\{\xi_t\} = \{\xi_t(\omega)\} = \{\xi(t,\omega)\}$, definidas todas en el mismo espacio de probabilidad (Ω_1, A_1, P) se llama **proceso estocástico**. Si todas las variables aleatorias del proceso tienen un recorrido común Ω_2, a éste se le llama el **Espacio de Estado** del proceso. Para $\omega \in \Omega_1$ fijo, $\xi(\omega,t)$ se llama una **trayectoria** o **función muestral** del proceso.

3.2 PROCESOS DE SEGUNDO ORDEN Y FUNCIONES DE PROMEDIO Y COVARIANZA

Consideremos un proceso estocástico $\{\xi_t\} = \{\xi(t)\}$ con índice continuo $t \in T$, $T \subseteq \mathbf{R}$, decimos que éste es un **proceso de segundo orden**, si cumple que $E(\xi_t^2) < \infty$ para todo $t \in T$ ($E(X)$ es el valor esperado de X). Es decir, un proceso estocástico es de segundo orden, si cada una de sus variables aleatorias tiene segundo momento, respecto al origen, finito. Para los procesos de segundo orden se definen la ***función de media*** $\mu_\xi(t)$, mediante $\mu_\xi(t) = E(\xi(t))$ y la ***función de covarianza*** o función de ***auto-covarianza*** $r_\xi(s,t)$, mediante $r_\xi(s, t) = Cov(s, t) = E(\xi(s).\xi(t)) - E(\xi(s)).E(\xi(t))$.

El paseo aleatorio se realiza de tal manera que en cada instante del tiempo se toma una dirección. Obviamente, al reducirse el tiempo entre dos cambios de dirección consecutivos a cero, la distancia recorrida tiende a cero también. El proceso resultante $\{W_t\}$ es lo que se llama Proceso de Wiener.

Un Proceso estocástico de segundo orden es ***estacionario en sentido amplio*** si sus variables aleatorias tienen segundos momentos que son invariantes bajo desplazamientos de tiempo. Es decir, $\xi(t)$ es estacionario en sentido amplio, si $E(\xi(t+h)) = E(\xi(t))$ y $Cov(s + h, t + h) = Cov(s, h)$. Naturalmente, si todas las $\xi(t)$ tienen la misma distribución y son independientes, el proceso es estacionario en sentido amplio.

3.3 PROCESOS DE WIENER. DEFINICIÓN FORMAL

Sea $W = W(t)$, definido para $-\infty < t < \infty$, un proceso estocástico que satisface las siguientes propiedades:

1. $W(0) = 0$
2. $W(t)-W(s)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza $\sigma^2(t-s)$, donde σ es una constante positiva, para todo $s \leq t$. Es decir, el proceso tiene diferencias con distribución normal $N(0, \sigma^2(t-s))$
3. $W(t_2)-W(t_1)$, $W(t_3)-W(t_2)$, . . ., $W(t_n)-W(t_{n-1})$ son independientes, para $t_1 \leq t_2 \leq \ldots t_{n-1} \leq t_n$.
4. Las trayectorias de W son continuas.

Entonces se dice que W es un **Proceso, unidimensional, de Wiener con Parámetro** σ^2. Si $\sigma^2 = 1$, el **Proceso de Wiener** es **unidimensional Estándar**.

Como consecuencias de la definición se pueden deducir:

a. Para cada $t > 0$, $W(t)$ tiene distribución normal estándar con media 0 y varianza $\sigma^2 t$ es decir, la f.d.p de $\xi(t)$ está dada por

$$f(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}$$

b. Para todo t_1, t_2, t_3 y t_4 se tiene

$$E[(W(t_2)-W(t_1))(W(t_4)-W(t_3))] = 0.$$

c. W no es un proceso estacionario

d. W es un proceso gaussiano

e. La función de densidad de $\xi(t)$, $f(t,x)$ satisface le ecuación de difusión

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2},$$

para $t \geq 0$ y $-\infty < x < \infty$

f. $E\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{|h|}$

Como ejemplo, se hará la deducción de la propiedad f:

Sabemos que $Var(\xi(t)) = E(\xi(t))^2 - E^2(\xi(t))$ para todo proceso de segundo orden $\xi(t)$. De la propiedad 2 sabemos que $W(t+h) - W(t)$ tiene distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2|h|$. Así:

$$Var\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)$$

$$= E\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)^2 - E^2\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)$$

de acá se concluye que

$$E\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)^2 = \frac{1}{h^2}\sigma^2|h|. = \sigma^2/|h|.$$

3.4 SUPOSICIONES BÁSICAS

En el estudio del cálculo de procesos estocásticos $\xi(t)$ de parámetro continuo, son necesarios los siguientes supuestos básicos:

1. $\xi(t)$ es un proceso de segundo orden.

2. $\mu_\xi(t)$, la función de media, es una función continua de t.

3. $r_\xi(s, t) = Cov(s, t)$, la función de autocovarianza es una función continua, tanto de t como de s.

4. $\xi(t)$ tiene trayectorias continuas $\xi(\omega, t)$.
   Si este último requisito no se cumple, se exigen estos tres.

5. La función $\xi(\omega, t)$ $t \in T$ tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad en cualquier intervalo cerrado y acotado, es decir, $\xi(\omega, t)$ es continua a trozos allí.

6. $\xi(\omega, s) \to \xi(\omega, t)$, cuando s tiende a t por la derecha.

7. $\xi(\omega, s)$ tiene un límite finito cuando s tiende a t por la izquierda.

Por ejemplo, si C es capital acumulado en una cuenta bancaria que paga un interés del 5 % compuesto continuamente, la variación instantánea de C está determinada por el diferencial $dC = 0.05\,C\,dt$. Si además de este diferencial tenemos una condición inicial, por ejemplo la cantidad depositada originalmente (digamos, C_0) entonces se tiene el problema de valor inicial $dC = 0.05\,C\,dt$ sujeto a $C(0) = C_0$.

Estos supuestos son adecuados para describir muchos de los procesos que aparecen en la práctica y tienen consecuencias bastante importantes. Por ejemplo, se puede deducir que si un proceso de parámetro continuo de segundo orden satisface las condiciones 1 y 2, entonces es un proceso continuo en media cuadrática, es decir

$$\lim_{s \to t} E(\xi(s) - \xi(t))^2 = 0, \text{ para todo } t \in T$$

3.5 INTEGRACIÓN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Consideremos un proceso de segundo orden con parámetro continuo $\xi(t)$ que satisface las suposiciones básicas, sea $f = f(t)$ una función continua a trozos con $a \leq t \leq b$, donde $[a, b] \subseteq T$. Para cada $\omega \in \Omega_1$, $\xi(t, \omega)$ es continua a trozos para $a \leq t \leq b$, y por lo tanto el producto $f(t).\ \xi(\omega, t)$ es continuo a trozos allí y la integral ordinaria $\int_a^b f(t).\ \xi(\omega,t)\,dt$ está bién definida para cada $\omega \in \Omega_1$.

Es posible probar que para cada $c \in \mathbf{R}$, el conjunto $\{\omega \in \Omega_1 / \int_a^b f(t).\ \xi(\omega,t)\,dt \leq c\}$ es medible, por lo tanto $\int_a^b f(t).\ \xi(\omega,t)\,dt$, es una variable aleatoria. Para esta variable aleatoria se pueden probar los siguientes resultados:

1. $E[\int_a^b f(t).\ \xi(\omega,t)\,dt] = \int_a^b f(t).\ E[\xi(\omega,t)]\,dt = \int_a^b f(t).\ \mu_\xi(t)dt$

2. Si f y g son continuas a trozos en [a, b] y [c, d], respectivamente,

$$Cov(\int_a^b f(t).\ \xi(\omega,t)\,dt, \int_a^b g(t).\ \xi(\omega,t)\,dt) = \int_a^b f(s).(\int_a^b g(t).\ r\xi(s\ ,\ t)dt)ds$$

3. Si $\xi(\omega,t) = \xi(t)$ es un proceso gaussiano, entonces $\int_a^B f(t).\ \xi(t)\,dt$, tiene una distribución normal.

4. Si f son continuas y tienen derivadas continuas en [a , b] y $W = W(t)$ es el proceso de Wiener con parámetro σ^2, $-\infty < t < \infty$. entonces

$$E[\int_a^b f'(t)(W(t) - W(a))dt \int_a^b g'(t)(W(t) - W(a))dt] = \sigma^2 \int_a^b (f(t) - f(b)).(g(t) - g(b))dt$$

Si hacemos $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = g(t) = t$, en el resultado 4 se obtiene,

$$E(\left(\int_0^1 W(t)\,dt\right)^2 = \sigma^2 \int_0^1 (t-1)^2 dt = \sigma^2/3$$

Además $E(\int_0^1 W(t)\,dt) = \int_0^1 E(W(t))dt = 0$,

apoyados en el resultado 3 y los dos anteriores, se puede deducir que la variable aleatoria $\int_0^1 W(t)\,dt$, tiene una distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2/3$.

3.6 DERIVACIÓN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Consideremos un proceso estocástico $\xi(t)$, de segundo orden y parámetro continuo que satisface las suposiciones básicas 1), 2) y 3).

Se dice que ξ es *diferenciable*, si existe un proceso ϕ, de segundo orden, que satisface las suposiciones básicas 1), 2), 3), 5), 6) y 7) y que además cumple que , para $t_0 \in T$ $\xi(t) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds$, $t \in T$. Si existe tal proceso ϕ, se dice que ϕ *es la derivada del proceso* ξ y esto se denota mediante $\xi'(t) = \phi(t)$, $t \in T$.

Si $\xi'(t) = \phi(t)$, $t \in T$, se tiene entonces que $\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \xi'(s)\,ds$, $t \in T$.

Puede demostrarse fácilmente que si un proceso es diferenciable, entonces:

a. tiene trayectorias continuas.

b. $\frac{d}{dt}(\xi(t)) = \xi'(t) = \phi(t)$, excepto en los puntos de discontinuidad de $\xi'(t)$.

c. $\mu_{\xi'}(t) = \frac{d}{dt}\mu_\xi(t)$, $t \in T$

d. La función de covarianza del proceso $\xi'(t)$ está dada por

$$r_{\xi}' = \frac{\partial^2 r_\xi(s,t)}{\partial s \partial t}$$

3.7 LA NO DIFERENCIABILIDAD DE LOS PROCESOS DE WIENER

Supongamos que el proceso de Wiener W(t) es diferenciable para $t \in T$, entonces existe un proceso de segundo orden W'(t) tal que,

$\frac{dW(t)}{dt} = W'(t)$ para $t \in T$, de acá puede deducirse que

$$\lim_{h \to 0} E\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} - W'(t)\right)^2 = 0,$$

implicando que

$$\lim_{h \to 0} E\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)^2 = E(W'(t))^2, \text{ pero}$$

según 3.3.f, $\lim_{h \to 0} E\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right)^2 = \infty$.

Esta contradicción muestra que en realidad, un proceso de Wiener es no diferenciable.

Es interesante hacer notar que cada trayectoria de un proceso de Wiener es continua pero no diferenciable en ningún punto, por lo tanto, nuestros dibujos de esas trayectorias son sólo aproximaciones, ninguno podrá representarlas exactamente.

El premio Nobel de Economía de 1997 fué concedido a Robert C. Merton and Myron S. Scholes, como reconocimiento a la importancia de su fórmula para dar precio a las opciones.

3.8 INTEGRALES ESTOCÁSTICAS DEPENDIENTES DE UN PROCESO DE WIENER

Ya que un proceso de Wiener es no diferenciable, integrales de la forma

$\int_a^b f(t).\, dW(t) = \int_a^b f(t).\, W'(t)$ no existen en el sentido ordinario.

Para definirlas, debemos recurrir a una definición por paso al límite apropiada. Por ejemplo, se puede utilizar el límite

$\lim_{h \to 0} \int_a^b f(t).\left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right).dt$. No es muy difícil demostrar que este límite existe y es igual a $f(b).W(b) - f(a).W(a) - \int_a^b f'(t).W(t)\, dt$. Así podemos establecer la definición

$$\int_a^b f(t).\, dW(t) = \int_a^b f(t).\, W'(t) = f(b).W(b) - f(a).W(a) - \int_a^b f'(t).W(t)\, dt.$$

Se puede observar claramente la semejanza entre la ecuación anterior y la Fórmula de Integración por Partes del cálculo elemental.

En particular, si $f(t) = 1$, para $t \in [a, b]$ obtenemos, $= \int_a^b dW(t) = \int_a^b W'(t) = W(b)-W(a)$, pero, $dW(t) = W'(t)dt$, conocido como **Ruido Blanco**, no es un proceso estocástico en el sentido ordinario, bien podría considerarse como un funcional que asigna valores al valor de la integral $\int_a^b f(t).\, dW(t)$.

Naturalmente, esta integral es un proceso estocástico. Puede demostrarse que cumple las siguientes propiedades:

1. $E(\int_a^b f(t).\, dW(t)\ ) = 0$

2. $Var(\int_a^b f(t).\, dW(t)\ ) = \sigma^2 \int_a^b f^2(t).dt$

Si f y g son funciones continuas en los respectivos intervalos de integración, entonces,

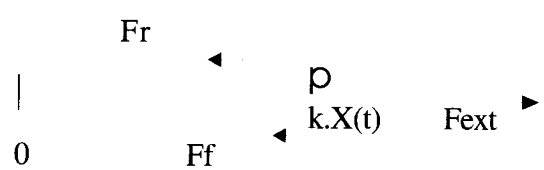
3. $E(\int_a^b f(t).\, dW(t) \int_a^d g(t).\, dW(t)\ ) = 0,\ a \le b \le c \le d$ y

4. $E(\int_a^b f(t).\, dW(t) \int_a^c f(t).g(t).\, d(t) = \sigma^2 \int_a^b f(t).g(t)\, dt\ ,\ b \le a \le c$

3.9 OTRAS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

Considérese una partícula de masa m que se mueve en una dimensión. Sea X(t) la posición de la partícula en el instante $t \in T$, entonces X '(t) y X "(t) serán, respectivamente, la velocidad y la aceleración de la partícula en t. Para muchos propósitos podemos considerar los siguientes tipos de fuerzas actuando sobre la partícula:

1. Una fuerza restauradora $F_r = -kX(t)$, cuya magnitud es proporcional a la distancia desde el origen a la posición actual de la partícula, pero de sentido opuesto a su desplazamiento.
2. Una fuerza de fricción $F_f = -\nu X'(t)$, proporcional a la velocidad pero con sentido opuesto.
3. Una fuerza exterior F_{ext}, independiente del movimiento de la partícula.



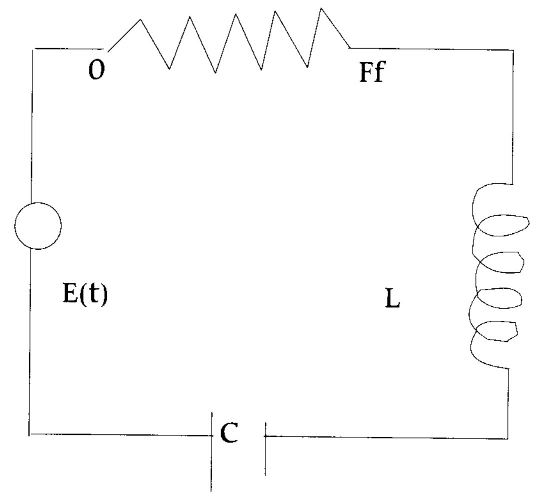
Es interesante hacer notar que cada trayectoria de un proceso de Wiener es continua pero no diferenciable en ningún punto, por lo tanto, nuestros dibujos de esas trayectorias son sólo aproximaciones, ninguno podrá representarlas exactamente.

Entonces el movimiento de la partícula puede ser modelado mediante la ecuación

$$m.X''(t) + \nu X'(t) + k.X(t) = F_{ext}.$$

Si la fuerza exterior se puede modelar mediante ruido blanco con un parámetro adecuado σ^2 (Por ejemplo si está relacionada con bombardeo molecular del exterior), entonces X, X' y X" son procesos estocásticos y la ecuación se convierte en la ecuación diferencial estocástica

$$m.X''(t) + \nu X'(t) + k.X(t) = W'(t).$$



De manera análoga, considérese un circuito L-R-C donde L es la Inductancia, R la resistencia y C la capacitancia y sea E = E(t) una fuente externa de voltaje. Sea X(t) la carga en el condensador en el instante t, entonces X'(t) es la corriente en el circuito en t. Aplicando la Segunda Ley de Kirchoff obtenemos la ecuación diferencial $L X''(t) + R X'(t) + 1/C X(t) = E(t)$. En algunas ocasiones se puede suponer que E(t) es Ruido Blanco. Por ejemplo, puede suceder que no hay voltaje exterior pero consideramos que hay Ruido Térmico debido a la agitación térmica de los electrones en el resistor. También en este caso X(t) y sus derivadas son procesos estocásticos y la ecuación diferencial apropiada para describir las variaciones de la carga y de la corriente en el circuito es

$$L X''(t) + R X'(t) + 1/C X(t) = W'(t).$$

Existen varias aplicaciones de este tipo de ecuaciones estocásticas al estudio de la dinámica de las poblaciones en biología.

En la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales estocásticas se utilizan técnicas especiales basadas en los resultados señalados en las secciones de integración y diferenciación de procesos estocásticos, algunas técnicas semejantes a las que se usan en la solución de ecuaciones diferenciales "determinísticas" y técnicas de la Teoría de la Estimación para predecir futuros valores de una solución de la e.d. estocástica. Además, algunas veces el uso de Transformadas de Fourier puede ser de mucha utilidad para calcular las funciones de covarianza de las soluciones.

3.10 LO "BLANCO" DEL RUIDO BLANCO

Se sabe que el valor esperado del ruido blanco es $E(dW(t)) = 0$, $-\infty < t < \infty$. Además, si hacemos

$$C(t) = E(\,dW(s).\,dW(s+t))\ \ \text{y}\ f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}C(t)\,dt,$$

$\lambda \in \mathbf{R}$, se puede encontrar que $f(\lambda) = \dfrac{K}{2\pi}$

para cierta constante K, $f(\lambda)$ se llama Función de Densidad Espectral y puede interpretarse, intuitivamente como una medida de la contribución de la "frecuencia" λ, al comportamiento oscilatorio de C(t). Dado que $f(\lambda)$ es la misma para todas las "frecuencias", esto indica que todas las frecuencias están presentes en el proceso en la misma forma. Esto es análogo a la forma en la que todas las frecuencias de luz están presentes en la luz blanca. Esto hace "blanco" al ruido blanco.

Un modelo apropiado para describir el movimiento observado por Brown es un proceso tridimensional de Wiener.

4. EXTENSIONES

4.1 EL PROCESO N-DIMENSIONAL DE WIENER

Considérese el proceso estocástico n-dimensional (o proceso estocástico vectorial) $\mathbf{W}(t) = \{W_1(t), W_2(t), \ldots, W_n(t)\}$, definido para $t \geq 0$, con R^n como su espacio de estado. Si sus componentes $W_j(t)$ son procesos unidimensionales estándar de Wiener, independientes, entonces $\mathbf{W}(t)$ es un proceso n-dimensional de Wiener.

Un modelo apropiado para describir el movimiento observado por Brown es un proceso tridimensional de Wiener.

4.2 PROCESOS DE DIFUSIÓN

Un proceso markoviano X(t) con conjunto de índices $[t_0, T]$, espacio de estados R^n y trayectorias contínuas (con probabilidad 1) se llama Proceso de Difusión. Las soluciones X(t) de las los problemas de valor inicial estocásticos de la forma

$dX(t) = f(t, X(t))\,dt + g(t, X(t)).dW(t)$,
$X(0) = X_0$ son procesos de difusión.

4.3 LAS INTEGRALES DE ITô Y STRATONOVICH

En general, no existe una única manera de definir una integral de la forma $\int G(t,X(t)).dW(t)$; de hecho, existen infinitas posibilidades, sinembargo sólo dos enfoques tienen amplia aceptación: los enfoques de Ito y Stratonovich (1966). Cada interpretación lleva a un tipo diferente de procesos de difusión. Por ejemplo, dado el diferencial estocástico

$dX = \alpha X\,dt + \beta X\,dW(t),\ X(0) = X_0$, que aparece en algunas aplicaciones financieras;

Normalmente, en finanzas, se utiliza el primer enfoque.

En los últimos años se ha generalizado aún más el concepto de procesos de Wiener, asociado con la noción generalizada de sistema dinámico: Un espacio de probabilidad con un grupo de transformaciones, del espacio muestral en sí mismo, que son medibles y preservan la medida de probabilidad.

Además, la integral de Itô es un tipo especial de proceso estocástico de la clase conocida como martingalas y la integral de Stratonovich, no es de este tipo. En general, el enfoque a elegir depende del tipo de problema que se está representando. En muchos casos ninguna de las dos aproximaciones es la adecuada para representar el fenómeno.

4.4 OTRO PASO MÁS ALLÁ

En los últimos años se ha generalizado aún más el concepto de procesos de Wiener, asociado con la noción generalizada de sistema dinámico: Un espacio de probabilidad con un grupo de transformaciones, del espacio muestral en si mismo, que son medibles y preservan la medida de probabilidad. Con base en conceptos tales como *Espacio de Hilbert, Operadores Auto-adjuntos, Generadores Infinitesimales, Sistemas Ergódicos, Espacios de Sobolev, Semigrupos Markovianos, Medidas Gaussianas* y *Operadores de Covarianza*, se definen los **Procesos Q-Wiener** como una generalización del proceso n-dimensional de Wiener, a partir de allí se definen la nociones de *Ecuación de Evolución Estocástica* y de *Medida Invariante* asociada a ésta ecuación.

Es realmente interesante observar hasta dónde nos ha llevado el intento por explicar el fenómeno aparentemente "sencillo" de corpúsculos moviéndose en el agua.

BIBLIOGRAFÍA

Da Prato G., Zabczyk J. 1996.Ergodicity for Infinite Dimensional Systems. Cambridge University Press. New York.

Gard Thomas C.1988. Introduction To Stochastic Differential Equations. Marcel Dekker, Inc. New York,

Hoel Paul G., Port Sydney.1972 Introduction to Stochastic Processes. Houghton Mufflin. Boston.

Björk Tomas, 1996. Arbitrage Theory in continuous time. Stockholm school of economics.