Modelo Dinámico del Aprendizaje de la Matemática Aplicada: Una Propuesta

Ulises Cárcamo Cárcamo

***A**sí como el aprendizaje de movimientos complejos transforma la estructura de las redes neuronales físicas de un organismo animal, el aprendizaje de los conceptos matemáticos y su operatividad inherente, va configurando una red de conceptos, cada vez más compleja. Es necesaria una metodología especial para construir una red óptima y articularla con las redes de conocimiento ya existentes.*

Ulises Cárcamo Cárcamo. Licenciado en Educación, Área Matemáticas, de la Universidad de Medellín y Máster en Matemáticas Aplicadas de EAFIT. Actualmente es profesor asistente del Departamento de Ciencias Básicas de EAFIT.

E-Mail: ucarcamo@sigma.eafit.edu.co.

INTRODUCCIÓN

Mediante el aprendizaje de una destreza física, se conforman estructuras neuronales que permiten realizar comportamientos complejos. Mediante el entrenamiento, se van creando conexiones entre las neuronas correspondientes, poco a poco se intrinca la red, y las tareas que antes eran difíciles de realizar, se vuelven de fácil realización y se asimilan dentro de lo cotidiano. Observemos el aprendizaje de una habilidad en un gimnasta, o en un organismo sencillo.

Existe cierta analogía, entre este tipo de aprendizaje y el aprendizaje de las matemáticas. Mediante el aprendizaje de los conceptos matemáticos, de la operatividad inherente a ellos, y de las destrezas de aplicabilidad, se construye una red que comprende tres aspectos: el conceptual, el operativo y el representacional. Corresponde a un currículo adecuado, la creación, el crecimiento y el mantenimiento de tal red.

La gran diferencia entre el gimnasta y el estudiante de matemáticas es que, los nodos de la red, neuronas motoras o conceptos matemáticos, existen en el primero, pero deben ser construidos en el segundo.

Dado que la comprensión de muchos conceptos matemáticos requiere del aprendiz una cierta capacidad para operar con ellos y sobre ellos, el símil entre neurona y concepto matemático no es exacta.

Dentro de las elementos que se manejan en inteligencia artificial, el más adecuado para una representación de los nodos de nuestra red es el Objeto Logical. Un Objeto Logical contiene en sí mismo unos componentes, estáticos, y unos métodos o procedimientos para operar consigo mismo y con su entorno. Es fundamental dentro del concepto de Objeto, la noción de Herencia, que es una interpretación de la derivación de elementos específicos, a partir de objetos más generales, añadiendo propiedades o características especiales. Un ejemplo clásico es el siguiente: El objeto fundamental para cierto estudio de Entomología, puede ser ***Insecto***; son características de éstos, su división corporal en tres partes: cabeza, cefalotorax y abdomen, además de tener seis patas y un exoesqueleto. Los objetos ***mosca***, ***abeja*** y ***mariposa***, son insectos con ciertas especificaciones. Heredan de su ancestro las características principales, pero desarrollan ciertas particularidades, que les diferencian de los otros descendientes del ancestro. De igual manera, la clase de los insectos, contiene especificaciones de unos objetos más generales: los ***Artrópodos***, estos a su vez serán especificaciones de los ***Invertebrados***, y así sucesivamente. Podemos entonces, de acuerdo con nuestras necesidades, crear *árboles genealógicos* de los objetos que estudiamos.

> **Mediante el aprendizaje de los conceptos matemáticos, de la operatividad inherente a ellos, y de las destrezas de aplicabilidad, se construye una red que comprende tres aspectos: el conceptual, el operativo y el representacional.**

Estas ideas, con algunas variantes, fueron tomadas como base para nuestro modelo, basado en una concepción, que podemos llamar, temporalmente, *Concepción Objeto-Neuro-Dinámica de las matemáticas aplicadas.*

1. EL MODELO

El concepto fundamental es el de **Objeto Matemático**. Podemos considerar en esta visión de las matemáticas, que fundamentalmente, existen objetos y relaciones entre ellos. Estas conexiones son de índole **conceptual**, de índole **operacional** o **funcional** y de índole "**relacional**".

Como postulado básico tenemos:

> ***No es posible una comprensión completa de un objeto, si no se comprenden sus alcances, sus propiedades, sus limitaciones, su operacionalidad, sus relaciones con los demás objetos y los entes del mundo físico que ellos puede representar.***

Aunque esto implica que nunca puede conocerse a un objeto de manera completa, está de acuerdo con la realidad matemática y la realidad de las ciencias. Cada día se descubren nuevas propiedades que poseen los objetos ya parcialmente conocidos o se crean estructuras que los involucran. Por lo tanto, día a día, están creando conexiones. De acá proviene el calificativo de ***Dinámico***.

Gráficamente podríamos imaginarnos la gran red del saber matemático, semejante a las estructuras cerebrales, cada neurona es un objeto, las dendritas serán las relaciones entre ellos. Existen "capas neuronales" básicas a las que recurren muchas otras neuronas en busca de apoyo operacional y semántico, y otras capas más especializadas que sólo son requeridas por unas pocas.

1.1 COMPOSICIÓN DE UN OBJETO

Con el fin de hacer confluir los aspectos operacionales, los conceptuales y las relaciones entre objetos en un solo ente consideraremos la siguiente composición.

Un Objeto está conformado básicamente por los siguientes elementos:

1. La "**Envolvente de Apariencia**" o **Componente de Anamorfosis**. Es la apariencia exterior con la que se presenta el objeto matemático. Depende del uso que se le vaya a dar en las aplicaciones y del nivel con el cual es tratado. Es posible, en un curso dado, observar dos o más componentes distintas o por lo menos, trabajar con una de ellas y mencionar las otras.

Ejemplos:

El concepto Número Real, puede ser considerado como un objeto abstracto, cuyas propiedades están determinadas por los axiomas de campo de los reales y el Axioma del Supremo, pero también puede ser considerado como el límite de una sucesión de Cauchy, o como una cortadura de Dedekind en el conjunto de los números racionales.

El concepto Vector, de tres dimensiones, puede ser presentado como una tripleta ordenada de reales, como un segmento dirigido en el espacio o como una cantidad que tiene magnitud y dirección.

La noción de función puede ser presentada como una tripleta ordenada (A, B, R), compuesta de Dominio, Codominio y Regla de Transformación o como un conjunto de pares ordenados (x,y) con ciertas condiciones. En ciertas situaciones conviene presentarla como una máquina que toma un elemento del dominio y lo transforma en un elemento del recorrido.

> **Gráficamente podríamos imaginarnos la gran red del saber matemático, semejante a las estructuras cerebrales, cada neurona es un objeto, las dendritas serán las relaciones entre ellos. Existen "capas neuronales" básicas a las que recurren muchas otras neuronas en busca de apoyo operacional y semántico, y otras capas más especializadas que sólo son requeridas por unas pocas.**

1.2 EL MÓDULO SEMÁNTICO

Es el módulo relacionado con la denotación, la significación y la representatividad. A través de él, el objeto entra en contacto con los entes físicos que representa.

Está conformado por tres submódulos: El ***"Submódulo de Ser-No Ser"***, el ***Submódulo Denotacional-Representativo*** y el ***Submódulo Representacional.***

El ***"Submódulo de Ser-No Ser"*** está íntimamente relacionado con la "Envolvente de Apariencia". Comprende una definición, si el objeto es definible, o una serie de ideas intuitivas, posiblemente formalizadas con axiomas o postulados. Además acá se consideran las propiedades y teoremas del tipo *condiciones necesarias, condiciones suficientes y condiciones necesarias y suficientes.*

La parte operativa de este submódulo debe "reconocer" cuándo un ente matemático es un objeto de su tipo y cuándo no lo es.

Submódulo Denotacional-Representativo comprende las diversas denotaciones que se usan para el objeto y sus posibles representaciones.

El ***Submódulo Representacional*** contiene referencias a los entes, las clases de entes, o los procesos del mundo físico que el objeto puede representar. El objeto *"establece contacto con el mundo físico"* a través de él. Este submódulo es requerido y enriquecido constantemente con los ejercicios de aplicación.

Ejemplo

Objeto Número Real. (Considerado bajo la primera apreciación).

Sub-módulo de "Ser No Ser". Comprende los axiomas de campo y los axiomas de orden de los números reales, el Axioma del Supremo, y ciertas propiedades básicas de los reales, v.gr. ningún real satisface la ecuación $X^2+1 = 0$.

Sub-módulo Denotacional-Representativo. Incluye la denotación "clásica" con letras del alfabeto, las representaciones como sucesiones de dígitos de una base dada y las representaciones geométricas como puntos de una recta o desplazamientos sobre la misma.

Sub-módulo Representacional. Comprende conceptos como longitud, masa, tiempo, área, temperatura, tasa de cambio del dólar respecto al peso, etc., que pueden ser representados por números reales y el conocimiento de que conceptos como velocidad, fuerza y tensión en un medio anisotrópico, no pueden ser representadas con un solo número real.

1.3 EL MÓDULO FUNCIONAL

Involucra Operaciones Unarias o funciones del objeto y los algoritmos necesarios para calcularlas.

Ejemplos

Sobre los números reales se pueden definir las siguientes funciones básicas: Valor Absoluto, Cuadrado, Potencia N-ésima, etc.

Sobre los vectores se pueden definir las funciones Magnitud o Norma, y la función i-ésima componente.

Sobre el objeto ***Función*** se pueden definir las funciones, Función Dominio y Función Recorrido, que contienen procedimientos para encontrar el dominio y el recorrido, respectivamente.

1.4 El Módulo Relacional

Comprende relaciones entre los objetos del mismo tipo y entre ellas la noción de Igualdad entre Objetos, que está en íntima relación con el módulo semántico. Acá se incluyen también nociones como homomorfismos, isomorfismos (cuando los objetos son estructuras) y las relaciones de orden.

Ejemplos

En el objeto Número Real, incluimos relaciones de orden como " ≤ " y " ≥ ". En el objeto Función, incluimos relaciones como *"Ser una restricción de.. ." y " Ser una extensión de...".*

En el objeto Vector, la relación "Ser una proyección de...".

1.5 EL MÓDULO INTER-OPERACIONAL

Involucra las Operaciones Binarias o Leyes de Composición Interna, las Operaciones Externas, y los algoritmos para hacerlas efectivas.

Ejemplos

En el caso del Número Real, el módulo incluiría las operaciones básicas: + y * y como extensiones, la resta, la división y las potencias, todas internas.

En el caso de los vectores tendríamos la suma y el producto vectorial como operaciones internas y el producto por un escalar y el producto punto como operaciones externas.

Para las funciones, las operaciones Suma y Producto de Funciones, para funciones con dominio común como operaciones internas, sus respectivas extensiones sustracción y división. La composición puede considerarse también como operación interna. Una operación externa es el Producto de una Función por un Real.

1.6 CONEXIONES

Son de dos tipos: **Aferentes**, que traen "insumos" conceptuales y operacionales al objeto y **Eferentes**, que producen "salidas" hacia otros objetos. Muchas conexiones que parten de un objeto pueden carecer, temporalmente de otras conexiones. A medida que va creciendo la malla de objetos, esas "dendritas inconexas" van siendo vinculadas con otros objetos.

De esta manera cada objeto nuevo se inserta en la red presente, que contiene algunas conexiones expresamente diseñadas para él.

Ejemplos

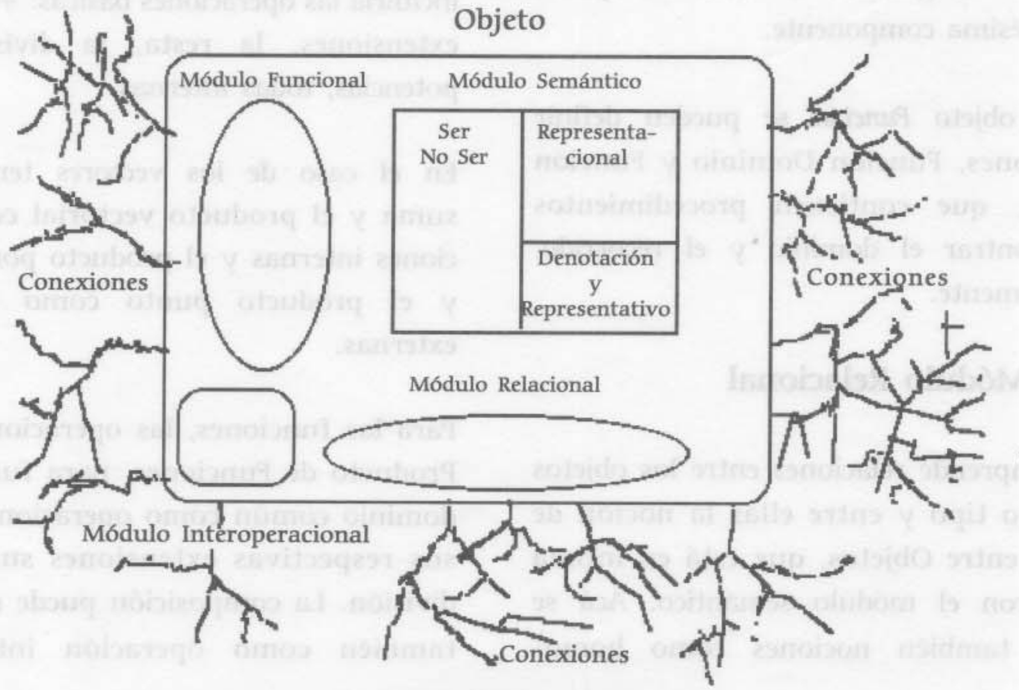
Las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un escalar, requieren de conexiones aferentes con el objeto Número Real, dado que aquellas se efectúan con base en operaciones entre reales. Desde el punto de vista del Número Real, esas conexiones son eferentes, ya que "exportan", este tipo de operaciones.

A su vez, el vector presenta conexiones eferentes hacia objetos como las matrices y las diadas.

La *"raíz"* de las conexiones eferentes conceptuales está en constante crecimiento. Por ejemplo, los ejemplos de grupos de funciones reales, crean o fortalecen conexiones ya creadas, entre el objeto Función con el objeto Grupo.

La noción de entorno en **R**, como un intervalo abierto con un centro, y la de intervalo abierto en general, deben preparar el terreno a la noción de conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$.

FIGURA No. 1



1.7 EL CONCEPTO DE HERENCIA (ESPECIALIZACIONES)

En matemáticas existen conceptos que son especializaciones de otros más generales. Por ejemplo, el concepto de función es una especialización del concepto de relación, el concepto de función inyectiva, es una especialización del concepto de función y el concepto de función biyectiva es una especialización del concepto de función inyectiva.

En estos casos podemos aplicar las nociones de Herencia y Ancestro, de la Programación Orientada al Objeto.

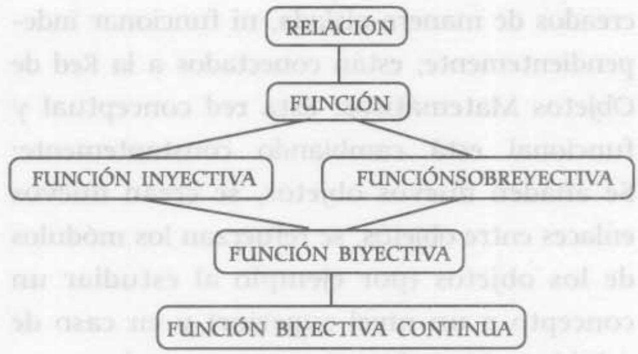
Así, si un objeto es una especialización de otro objeto, será un descendiente de él, y heredará los componentes básicos de aquel ancestro. Se diferenciará de él sólo en lo específico. Esto permite la definición de Clases y Superclases de Objetos.

Una función pertenece a la clase de las relaciones y por ello hereda los elementos de esta clase: sus elementos, sus propiedades y los elementos de sus módulos. A su vez, una función inyectiva pertenece a la clase de las funciones heredará las especificaciones de ésta y se diferenciará de ella por lo que tiene de específico.

De esta forma se pueden generar árboles de objetos con los ancestros en "las raíces" o nodos básicos y los descendientes en las ramas.

Naturalmente, un árbol genealógico de un objeto está en íntima relación con sus módulos semántico y relacional.

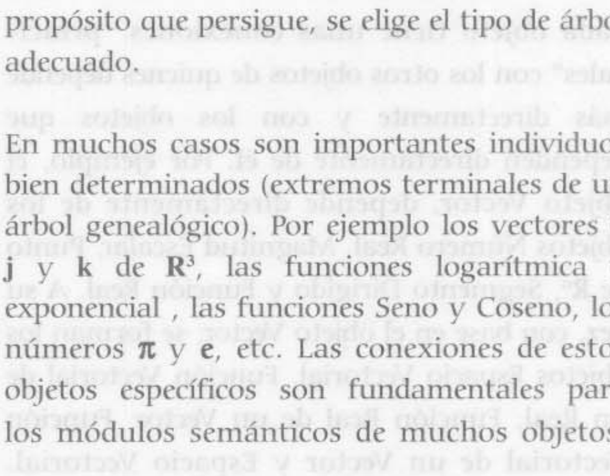
FIGURA No. 2
Un árbol genealógico de "Funciones Biyectiva Continua"



Claro está que el árbol genealógico asociado a un objeto no es único. De acuerdo con el propósito que persigue, se elige el tipo de árbol adecuado.

En muchos casos son importantes individuos bien determinados (extremos terminales de un árbol genealógico). Por ejemplo los vectores **i**, **j** y **k** de $\mathbf{R}^3$, las funciones logarítmica y exponencial , las funciones Seno y Coseno, los números $\boldsymbol{\pi}$ y **e**, etc. Las conexiones de estos objetos específicos son fundamentales para los módulos semánticos de muchos objetos.

FIGURA No. 3
Un árbol genealógico del objeto "Ecuación de Bessel"



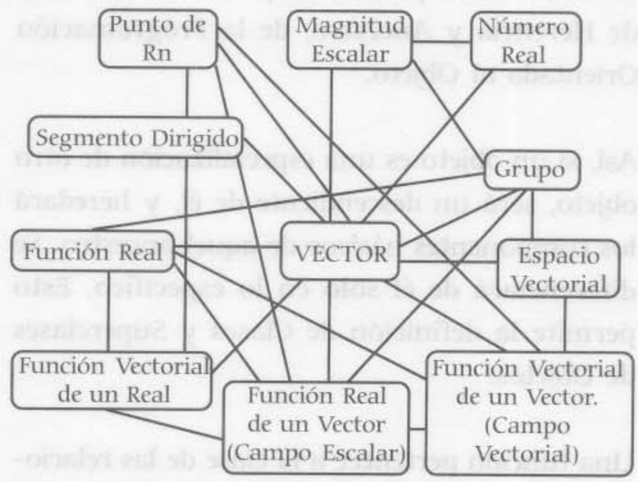
1.8 REDES DE OBJETOS

Obviamente, los objetos no pueden ser creados de manera aislada, ni funcionar independientemente; están conectados a la Red de Objetos Matemáticos. Esta red conceptual y funcional está cambiando constantemente: Se añaden nuevos objetos, se crean nuevos enlaces entre objetos, se refuerzan los módulos de los objetos (por ejemplo al estudiar un concepto a un nivel superior) y en caso de "olvido" los objetos, o sus enlaces se "debilitan".

Cada objeto tiene unas conexiones "principales" con los otros objetos de quienes depende más directamente y con los objetos que dependen directamente de él. Por ejemplo, el objeto Vector, depende directamente de los objetos Número Real, Magnitud Escalar, Punto de R^n, Segmento Dirigido y Función Real. A su vez, con base en el objeto Vector, se forman los objetos Espacio Vectorial, Función Vectorial de un Real, Función Real de un Vector, Función Vectorial de un Vector y Espacio Vectorial. Dado que la clase de los vectores con la suma forma un grupo abeliano, el objeto Vector tiene conexiones con el objeto Grupo, también, el objeto Grupo es fundamental para el objeto Espacio Vectorial. Estos objetos y sus conexiones forman una Sub-red Local asociada con el objeto Vector.

Cada sub-red local actúa como un organismo funcional, un objeto dado puede requerir de algunos módulos de otros objetos, y para poder crear un objeto, es necesario modificar las conexiones de los módulos que estarán relacionados con él. Por ejemplo, es imposible realizar operaciones con vectores, si no se realizan operaciones entre números reales, por lo tanto, al realizar tales operaciones, se están reforzando las conexiones con el objeto Número real. Como ejemplo de grupo abeliano están los grupos de vectores bajo la suma, así que el objeto Grupo puede ser modificado, en su módulo semántico y en una conexión con la creación del objeto Vector.

FIGURA No. 4
Red Local de Objetos asociados con el Objeto Vector

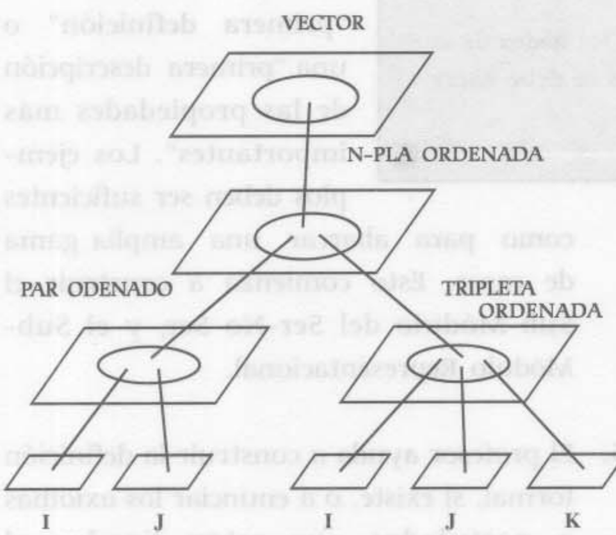


En general, podemos imaginarnos la gran red de conceptos matemáticos de un individuo, dividida en subredes de areas afines. Algunas de ellas, por ejemplo las de los conceptos básicos de la aritmética y la geometría, conectadas con todas las demás, haciendo parte de un núcleo básico de apoyo.

La noción de herencia agrega una nueva dimensión a la red, podemos imaginarnos las diferentes especializaciones de un objeto contenidas en planos, "cada vez más bajos", de acuerdo con el grado de especialización, y en el plano más bajo de todos, los individuos concretos. De cada uno de esos niveles parten conexiones hacia todos los demás objetos relacionados. Así, la red de conceptos matemáticos no es "plana", sino "tridimensional".

Esa red, estará conectada con otra red de conceptos físicos, en un ingeniero y con una red de conceptos económicos y/o financieros en un economista o en un contador. Los ejercicios y problemas de aplicación hacia esas ramas, fortalecen las interconexiones entre esas redes, a la vez que afianzan los nodos relacionados, en cada una de ellas.

FIGURA No. 5
Especificaciones del Objeto Vector en sus Diversos Planos



2. METODOLOGÍA

Fundamentalmente, la metodología tiende a crear de manera adecuada los objetos, y sus conexiones, adaptándolos a un entorno referencial y conceptual apropiado que permita crear una sub-red de objetos óptima, en cuanto a su conformación y su funcionamiento.

La noción de herencia agrega una nueva dimensión a la red, podemos imaginarnos las diferentes especializaciones de un objeto contenidas en planos, "cada vez más bajos", de acuerdo con el grado de especialización, y en el plano más bajo de todos, los individuos concretos.

Damos a continuación unas pautas básicas para las presentaciones de conceptos, procedimientos y aplicaciones que ayudan al logro de ese objetivo.

Naturalmente, el orientador del aprendizaje, debe conocer en profundidad los temas en los cuales va a prestar ayuda.

Dada la importancia de los nodos de la red, es decir, los objetos, se debe hacer énfasis en lo conceptual. El papel de las definiciones, o de los sistemas de axiomas que formalizan un concepto adquiere un gran peso.

Muchos textos de hoy en día y muchos textos antiguos, casi todos de origen americano, dan a estas un papel secundario e insisten sobre todo en la operatividad. Esto último es bastante peligroso: Un estudiante puede derivar o integrar muchas funciones y no saber cálculo. Esas operaciones pueden ser programadas en un lenguaje de programación que maneje listas de símbolos.

Muchos textos de origen europeo, hacen mucho énfasis en la parte conceptual y sus extensiones, y relegan las aplicaciones a un segundo lugar.

Para nosotros, parece muy adecuado un enfoque intermedio, que haga énfasis en los conceptos y los aplique a problemas similares del mundo físico, pero resaltando los supuestos necesarios y mostrando las limitaciones pertinentes.

En la preparación para la construcción de conceptos por parte de los alumnos, y en el afianzamiento de estos, después de una formalización con la ayuda del profesor, prestan gran ayuda diversos paquetes de programas de computador. Mientras más fáciles de manejar, mejor. ***Estos programas son sólo ayudantes para quien domina los conceptos básicos,*** y en manos inexpertas pueden conducir a graves errores. Esto último debe ser mostrado a los alumnos a través de varios ejemplos.

Ahora, las respuestas que da el computador no son la última etapa del proceso, esta respuesta debe ser analizada, e interpretada en el contexto del problema que se está resolviendo. Sabemos de casos en los que la respuesta es descabellada, pero el estudiante, "ni se inmuta" y la coloca tal como la recibió. Consideramos que el computador, como herramienta, debe liberarnos de la carga del "trabajo sucio" y que nosotros debemos utilizar ese tiempo adicional en hacer un seguimiento del proceso pero sin abandonar la idea general.

Dada la importancia de los nodos de la red, es decir, los objetos se debe hacer énfasis en lo conceptual.

2.1 ETAPAS EN LA PRESENTACIÓN DE UN CONCEPTO

1. Determinar el Objeto que se va a describir.

2. Determinar la componente de anamorfosis que se van a presentar.

3. Determinar los objetos con los cuales el objeto dado formará sub-red. Se comenzarán a analizar los requisitos y se terminará con las extensiones hacia otros conceptos. Esto establecerá cuales conceptos deben ser repasados, preparando las conexiones donde el nuevo objeto será conectado.

4. Dada la componente de anamorfosis, se dará un taller introductorio, realizable, en parte, con la ayuda del computador, que mostrará algunos ejemplos de lo que se quiere definir o establecer de manera intuitiva. Si es el caso se le solicitará al estudiante, o al grupo de estudiantes, que elaboren una "primera definición" o una "primera descripción de las propiedades más importantes". Los ejemplos deben ser suficientes como para abarcar una amplia gama de casos. Esto comienza a construir el Sub-Módulo del Ser-No Ser, y el Sub-Módulo Representacional.

5. El profesor ayuda a construir la definición formal, si existe, o a enunciar los axiomas o postulados que están ligados al concepto, presenta la notación adecuada, se discuten de modo general los ejemplos previamente vistos. Se discuten las condiciones necesarias, suficientes y las necesarias y suficientes, para que un objeto cualquiera satisfaga la definición.

6. Se discuten las posibles interpretaciones del concepto, los diferentes tipos de fenómenos físicos, económicos, financieros,

etc., que pueden ser representados con la ayuda del concepto matemático y por lo menos un tipo de fenómeno que no se puede representar con él, y el por qué. Acá se están construyendo todos los elementos del Módulo Semántico.

7. Las propiedades (o teoremas) asociadas con el concepto serán discutidas ampliamente. Enunciados del tipo $p \rightarrow q$, serán analizadas en la forma contrapositiva equivalente $\neg q \rightarrow \neg p$ y se resaltarán las condiciones suficientes y las necesarias. Si alguna de las condiciones es compuesta, se analizará la incidencia de cada una de las componentes.

   Las propiedades o teoremas de la forma $p \leftrightarrow q$, se analizarán en cada una de las formas $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow p)$. El recurrir a otros conceptos relacionados, refuerza la red conceptual.

8. De las propiedades, el profesor demostrará una o dos de las más importantes (si ello es posible). ***En todo caso se justificarán, aunque sólo sea de manera intuitiva.*** Se le pedirá al estudiante que justifique y, si es posible, demuestre algunas de esas propiedades. Esto refuerza la capacidad deductiva del estudiante, a la vez que le obliga a repasar la definición y algunas propiedades. De ser posible se interpretarán físicamente las propiedades.

9. Las condiciones necesarias, las suficientes, y las necesarias y suficientes de los teoremas y las propiedades se afianzarán con la ayuda de ejercicios y preguntas elaboradas para tal fin.

10. Las "Propiedades de Extensión", es decir, las propiedades que vinculan el objeto, con otros conceptos (Por ejemplo con nociones posteriores), se darán en ejercicios previamente diseñados. Esto crea la conexiones con otros objetos y refuerza el diseño de la red.

11. Los conceptos relacionales, es decir, aquellos que establecen relaciones entre objetos de la misma especie, se presentarán ilustrados con suficientes ejemplos y contraejemplos. Todo esto crea el Módulo Relacional.

12. En las definiciones de especificación de un objeto se insistirá en qué lo diferencia de su ancestro inmediato, y si es posible se describirá el árbol que lo contiene como rama terminal.

13. La presentación de esquemas que resuman las propiedades más importantes del objeto y las relaciones de éste con su entorno reticular, refuerza firmemente la sub-red que forma el entorno "inmediato" del objeto, a nivel conceptual.

> **Un estudiante puede derivar o integrar muchas funciones y no saber cálculo.**

2.2 ETAPAS EN LA PRESENTACIÓN DE UN PROCEDIMIENTO

Los procedimientos se refieren, básicamente, a procesos relacionados con los módulos Funcional e Interoperacional, sin-embargo hay procesos para verificar relaciones entre objetos y para el Sub-Módulo de Ser - No Ser. Por ejemplo, el Módulo Funcional del objeto Número Real tendrá un procedimiento para calcular su valor absoluto, el Módulo Relacional, tendrá un procedimiento para determinar si este real es mayor, menor o igual que otro real. El Módulo Funcional del objeto Función Real de Variable Real, tendrá un procedimiento para determinar su dominio, el Módulo del Ser-No Ser tendrá un procedimiento para establecer si es inyectiva, y el Módulo Inter-Operacional tendrá procesos para calcular valores de la composición con otras funciones.

Generalmente los procedimientos son de índole intra-reticular, ya que un proceso involucra muchas operaciones y muchas de ellas pueden corresponder a otros objetos de la red. Naturalmente otros procesos son de naturaleza inter-reticular, ya que pueden recurrir a otras sub-redes. Este último tipo ayuda a fortalecer ***toda la red de conceptos matemáticos.***

Para presentar un procedimiento se tendrán en cuenta los siguientes parámetros:

1. Explicitar el objetivo que se busca con el procedimiento.
2. Explicitar los diversos objetos involucrados conceptual o procedimentalmente con el proceso de referencia.
3. Presentar en forma heurística, y si es posible, geométrica, una primera versión ***"natural"*** del procedimiento.
4. Discutir por qué funciona el procedimiento.
5. Explicar las limitaciones de esa primera aproximación.
6. Reforzar esa primera versión con ejercicios variados.
7. Un esquema- resumen del procedimiento afianzará la red que lo involucra en sentido procedimental.
8. Presentar, si es posible, una segunda y una tercera versiones del procedimiento.
9. Justificar las nuevas versiones.
10. Analizar las ventajas y desventajas respecto a la primera versión. Discutir los alcances y limitaciones de los nuevos métodos.
11. Los esquemas de cada nueva versión del procedimiento pondrán de manifiesto nuevas conexiones de la red o reforzarán las ya existentes.
12. Si existen versiones que sólo son aplicables a unos pocos casos, se dejarán sus explicaciones y sus aplicaciones como ***ejercicios obligatorios.***
13. ***Siempre se interpretarán los resultados del proceso.***
14. Si el computador puede simplificar el proceso, se harán ejercicios, cuyo planteamiento o preparación inicial no necesite del computador y se utilizará éste ***sólo para ayudar en la parte pertinente. Se hará énfasis en la interpretación de los resultados.***

15. Un esquema que relacione las diversas versiones del proceso ayuda a reforzar el aspecto procedimental de la red.

2.3 ETAPAS EN LA PRESENTACIÓN DE APLICACIONES

Las aplicaciones muestran la potencia del concepto en la modelación y búsqueda de soluciones a problemas del mundo físico. Ayudan a reforzar el Sub-Módulo Representacional y a la vez ayudan a la solución de problemas "reales".

Las aplicaciones refuerzan toda la sub-red de referencia afianzando los enlaces entre los diversos módulos de los objetos tanto en lo conceptual como en lo operacional. Dado que este tipo de ejercicios es vital para "dar un buen acabado" a la sub-red, solo deberán iniciarse cuando los objetos y sus conexiones estén bien establecidos.

Para la presentación de aplicaciones se tendrán en cuenta los siguientes parámetros:

1. Explicar el Objetivo de la Aplicación.

2. Justificar el por qué del proceso utilizado.

3. Explicitar los supuestos básicos del proceso.

4. Indagar sobre los objetos y las conexiones necesarios para la aplicación.

5. Explicar la construcción del proceso, haciendo énfasis en los resultados importantes.

6. Aunque el proceso conduzca a una fórmula, se evitará la memorización de ésta, y en los ejercicios se pedirá, una reconstrucción rápida del proceso.

7. Se evitará a toda costa el uso mecanicista de ***"problemas modelo"***.

8. Siempre se hará énfasis en la interpretación de los resultados y en discutir los alcances y limitaciones del modelo.

9. En los problemas de aplicación se hará siempre, antes de comenzar, un bosquejo algorítmico del proceso que se va a desarrollar. Una vez fijado el "Norte" u objetivo principal se procederán a enunciar las etapas que conducen a su logro. Cuando se haya terminado una etapa intermedia, se hará énfasis en "Qué hemos logrado" y "Qué es lo que falta". Al terminar el proceso se analizará e interpretará el resultado. Esto impide que el estudiante "se pierda" en un proceso y ayuda a detectar errores consistentes en resultados "absurdos". Se insistirá mucho en que, en cuanto sea posible "Todo Número, dentro del problema, debe representar algo, y debe tener unas unidades de medida". Por ejemplo, en un problema de gases, algunos números representarán presiones, otros volumen, otros presión por unidad de área, presión por unidad de temperatura, etc.

Las aplicaciones muestran la potencia del concepto en la modelación y búsqueda de soluciones a problemas del mundo físico. Ayudan a reforzar el Sub-Módulo Representacional y a la vez ayudan a la solución de problemas "reales".

3. EVALUACIÓN

La evaluación en cada proceso de aprendizaje incluye una revisión de la construción de la red desde el punto de vista conceptual y desde el punto de vista operacional.

Por lo tanto, de acuerdo con los objetivos manifiestos, en cada tema se evaluarán tanto la solidez conceptual, como la operatividad, las aplicaciones y la interpretación de los resultados de las mismas.

Dado el objeto principal, se evaluará la constitución de sus módulos. Para esto se diseñarán preguntas o ejercicios especiales. De igual manera, se evaluará la "firmeza" de las conexiones con otros objetos. Si el objeto está en un árbol genealógico, se examinará el conocimiento de ese árbol y el conocimiento de la especialización del objeto.

En los problemas de aplicación se insistirá en que las respuestas tienen interpretación y se calificará también la interpretación.

3.1 UN EJEMPLO CONCRETO

Funciones Reales Crecientes, Funciones Decrecientes, Máximos y Mínimos Relativos.

Como un ejemplo del modelo se presenta un bosquejo de una unidad en la que se introducen los objetos Función Creciente en un intervalo y Función Decreciente en un intervalo. Cuando un objeto Función Real pertenece a esas dos clases, en intervalos contiguos con intersección no vacía, esos objetos tienen la característica de poseen ur máximo o un mínimo relativos, en el punto de intersección de los dos intervalos. El poseer uno de esos dos tipos de extremos especifica más al objeto función, determinando el objeto Función Real con un Extremo Relativo.

Objetos de Referencia: Función Creciente en un Intervalo, Función Decreciente en un Intervalo.

Objeto Ancestro: Función Real de Variable Real.

Componentes del Ancestro:

Componente de Anamorfosis:
Puede presentarse como un conjunto de pares ordenados tal que dos pares distintos no tienen primer elemento igual.

Módulo Semántico:

Submódulo de Ser-No Ser: Contiene la definición y los procesos necesarios para determinar si un conjunto dado de pares ordenados, es una función, tanto por su regla de formación como por su representación gráfica.

Submódulo Denotacional-Representativo: Contiene la información relativa a las notaciones usuales p.ej. f: $A \rightarrow B$, o $y = f(x)$ y a las formas de representar una función como una curva plana con ciertas propiedades. **Submódulo Representacional:** Contiene información sobre ciertos procesos que pueden ser representados por funciones reales de un real, por ejemplo, la temperatura media del ambiente a lo largo del día o el precio del envío de un paquete por servicio postal en función con su peso, etc.

La evaluación en cada proceso de aprendizaje incluye una revisión de la construción de la red desde el punto de vista conceptual y desde el punto de vista operacional.

Módulo Funcional:
Comprende las funciones mencionadas, anteriormente en los ejemplos.

Módulo Relacional:
Contiene básicamente la noción de igualdad de funciones, y las nociones de restricción y extensión.

Módulo Inter-Operacional
Contiene las nociones de Suma de Funciones, Producto de una Función por un Real y Composición de Funciones.

Conexiones
El Objeto tiene conexiones aferentes con los objetos de las redes de la Aritmética, la Geometría, el Álgebra y la Trigonometría elementales y conexiones eferentes que sustentarán nodos para las Funciones Vectoriales de un Real, Funciones Reales de un Vector, Funciones Vectoriales de un Vector, el Álgebra Lineal y la Teoría de Grupos.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

0. Definir los conceptos de Funciones Crecientes y Funciones Decrecientes.
1. Definir los conceptos de máximos y mínimos de funciones reales.
2. Descubrir el criterio de la derivada nula como condición necesaria para la existencia de un extremo en un punto donde exista la derivada.
3. Descubrir el Criterio de la Primera Derivada, desde el punto de vista numérico y geométrico.
4. Descubrir el por qué, la nulidad de la derivada es una condición necesaria pero no suficiente para la búsqueda de extremos.
5. Describir casos en los que el mero Criterio de la Primera Derivada es insuficiente para la búsqueda de extremos (extremos absolutos y casos en los que la derivada no existe).
6. Describir algunas funciones reales que carecen de extremos.
7. Reforzar el Módulo Semántico respecto a los procesos de crecimientro-decrecimiento, locales y globales con procesos observables del mundo físico.
8. Descubrir el Criterio de la Segunda Derivada desde el punto de vista geométrico y numérico.
9. Resolver Problemas aplicados con la ayuda del computador.
10. Describir ejemplos donde la mera graficación vía computador no proporciona indicios de la existencia de extremos de una función.

Introducción

Las nociones de Crecimiento y Decrecimiento de funciones reales son conceptos dinámicos, locales o globales que relacionan el comportamiento de una variable dependiente con respecto a una variable independiente.

Ejercicios Introductorios

(Con un paquete de computador que permita graficar: Mathcad, MatLab, Derive, hoja electrónica etc.).

Se realizan antes de la exposición de formalización del tema por parte del profesor.

A menos que se indique otra cosa se graficará en un intervalo simétrico [-a, a] donde a tomará valores apropiados. Si es necesario hacer un acercamiento (Zoom) o un alejamiento (Unzoom) para observar mejor la gráfica, hágalo. Las variables dependiente e independiente se denotarán, en lo posible con letras diferentes de las "clásicas" **x** e **y**.

1. Se graficará un grupo de funciones crecientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, de las que se dan sus reglas de formación, se observarán las gráficas y se describirá el comportamiento común.

2. Se graficará un grupo de funciones decrecientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, de las que se dan sus reglas de formación, se observarán las gráficas y se describirá el comportamiento común.

3. Dada la dos funciónes crecientes en **R**, tales como la función logarítmica y la exponencial, se construirá, para cada una de ellas una tabla de valores donde al lado de cada valor de la variable independiente aparezca el respectivo valor de la variable dependiente. Se le pedirá al estudiante que explique qué relación existe entre los comportamientos de los dos tipos de variables.

4. Se pide que el estudiante elabore una definición del concepto *"Función Creciente"*.

5. Con dos funciones, decrecientes en **R**, tales como las determinadas por $y = e^{-x}$, y $y = -x^3$. Se hace un trabajo análogo, al descrito en el numeral 3 .

6. Se pide que el estudiante elabore una definición del concepto *"Función Decreciente"*.

7. Se solicita que el estudiante ponga a prueba sus definiciones mediante el análisis de los gráficos de funciones que son crecientes, o decrecientes, sólo en intervalos específicos. Por ejemplo, analizar el comportamiento de $y = \mathrm{Tan}(x)$ en el intervalo $[-8\pi, 8\pi]$ y el de $y = \mathrm{Cot}(x)$ en el intervalo $[-7\pi/2, 7\pi/2]$. De ser necesario, el estudiante reelaborará sus definiciones.

8. Se solicita el mismo análisis para funciones como las siguientes: $y = 1/x$, $s = 1/t^2$, $h = \exp(-z^2)$.

9. Se piden definiciones preliminares de los conceptos *"Función Creciente en un Intervalo"* y *"Función Decreciente en un Intervalo"*.

10. Se solicita que el estudiante grafique funciones que presenten extremos relativos. Se le solicita que indique ¿dónde presentan sus máximos y sus mínimos? Como ejemplos: $y = x^{2/3}$ (se ingresa al

paquete de computador como $(x^2)^{1/3}$), $s = \exp(-x^2)$, $y = x^3+x^2-5x-5$, $E = \cos(t)$, $E = \text{sen}(t)$.

11. Se solicita una definición inicial de los conceptos de máximos y mínimos de una función

12. Se la pide al estudiante que observe las gráficas de funciones como $y=1/x^2$, $y = 1/x$, $y = \cot(x)$, y que verifique su definición, si es necesario la reelaborará.

13. Dado un grupo de funciones a las cuales es fácil localizarle sus extremos relativos, tales como $y = \text{Exp}(-x^2)$, $y = x^2$, y $y = x^{2/3}$. Se hará con ellas el siguiente trabajo: Ubicar el extremo relativo. Calcular la derivada, y evaluarla en un conjunto discreto de puntos a la izquierda del extremo y en otro conjunto discreto de puntos a la derecha del extremo. Todos los puntos serán muy cercanos al punto crítico, se pedirá observar y describir de la derivada. Se pedirá evaluar, si es posible, la derivada en los puntos críticos. Además explicarán: ***¿Qué problema se presenta con la última función?***

14. Dado un grupo de funciones, semejante al anterior, se le pedirá al estudiante que en cada gráfica, trace la recta tangente en varios puntos, a izquierda y derecha de cada extremo, clasifique el ángulo que forma dicha recta con el eje de las X como agudo u obtuso e indentifique el signo de su tangente (pendiente de la recta). ¿Cómo se comporta esta pendiente cuando se recorren los puntos de izquierda a derecha? ¿Qué pasa con $y = x^{2/3}$?

3.3 FORMALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS EN LA CLASE

Después de hacer una revisión de los resultados del Taller-Laboratorio, el profesor formalizará las nociones de funcion creciente y función decreciente. Examinará las relaciones *crecimiento-decrecimiento-signo de la derivada*. Se deducirá el Criterio de la Primera Derivada para extremos relativos y se verá la pertinencia del Teorema de Bolzano en el caso de funciones con derivada continua en un intervalo abierto. Se discute el hecho de que la nulidad de la derivada es una condición necesaria, pero no suficiente para la existencia de extremos.

Se estudian casos como los de las funciones $y = |x|$, $y = |x - a|$, $y = 1/x^2$, $y = x^3$, etc. para observar lo que realmente dice el criterio.

Se construye y se justifica el proceso (algorítmico) para encontrar extremos relativos con base en el criterio. Se examinan ejercicios donde el proceso tiene éxito. Se dejan otros como tarea. Se discuten algunas de las limitaciones del proceso, por ejemplo con funciones como las que se citaron anteriormente.

Por último se discute la veracidad o falsedad de expresiones como las siguientes:

"Si $f'(x_0) = 0$, entonces f tiene un extremo relativo en x_0".

"Si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces su derivada en x_0 es nula".

3.4 COMPLEMENTO

El material de este complemento se trabaja después de la exposición, de parte del profesor, de la fundamentación teórica.

Trabajo Individual

1. Se harán ***Preguntas que dan Consistencia al Módulo Representacional.*** Por ejemplo:

a. Suponga que t es el tiempo y que P(t) es la población de una cierta ciudad. Generalmente P=P(t) es una función c reciente de t. ¿En cuáles circunstancias no lo sería? Explicar.

b. Suponga que n es el número de habitantes de cierto país, y que D(n) es el número de kilogramos de desechos producidos por las personas de ese país. ¿Puede considerarse D=D(n) una función creciente de n? Explicar.

c. Dé otros tres ejemplos de funciones crecientes que se presenten en el mundo físico.

d. Si t es el tiempo, en años y A=A(t) es el número de analfabetas en Colombia, y = A(t) es una función decreciente de t. Dé otros tres ejemplos de funciones decrecientes que se presenten en el mundo físico.

e. Si Y = I(t), es la intensidad luminosa en un dia soleado (sin nubes). I es una función que crece hasta un máximo (¿a qué horas?) y luego decrece. Si el día es nublado I(t) puede ascender a varios máximos (locales) para luego descender a mínimos locales.

Describa otras tres funciones, del mundo físico, que presenten máximos y mínimos.

2. Se harán ***Preguntas de Extensión (Conexión),*** éstas ayudan a conectar el objeto de estudio con otros objetos, aparentemente no relacionados. Por ejemplo:

a. Podemos considerar que una función creciente (en todo su dominio), es inyectiva (¿uno a uno ?).

b. Podemos considerar que una función decreciente (en todo su dominio), es inyectiva (uno a uno?).

c. Puede una función que presenta varios máximos y mínimos relativos (locales) tener inversa? (Explicar).

Trabajo en Equipos

3. Se elaborarán ***Preguntas que Fortalecen el Sub-Módulo del Ser-No Ser,*** del Módulo Semántico.

Por ejemplo: Se pide discutir con los compañeros la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados. En caso de que sean ciertos, se justificarán con los teoremas vistos, o en caso de una afirmación de existencia, mostrar un ejemplo; en caso de falsedad mostrar un contraejemplo.

a. Si los valores de la derivada de una función tienen un signo a la izquierda de un número dado, y signo contrario a la derecha de dicho número, entonces la función tiene un extremo en ese número.

b. Existen funciones que carecen de valores extremos.

c. Hay funciones para las que en todo punto de su dominio hay un máximo (o un mínimo).

d. En todo punto donde una función tiene un extremo, la derivada vale cero.

e. Una función definida en un intervalo cerrado I = [a, b], siempre tiene un máximo y un mínimo en I.

f. Una función definida en un intervalo abierto I = (a, b), siempre tiene un máximo o un mínimo en I.

g. Una función definida en un intervalo semi-abierto I = (a, b] (ó [a, b)), siempre tiene un máximo o un mínimo en Y.

h. Dado el punto x = 5, construir una función continua, con dominio **R**, que tenga un extremo en x, pero que no tenga derivada allí.

i. Dados los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$, construir una función continua, con dominio **R**, que tenga extremos en x_1 y x_2, pero que no tenga derivada en ellos.

j. Bosqueje una función, que tenga un número infinito de extremos, pero que no tenga derivada en ninguno de ellos.

k. Considere un intervalo cerrado [a, b]. ¿Puede existir una función f que tenga un extremo en [a, b], pero, cuya derivada, f ′ no se anule en ese intervalo? En caso afirmativo, ¿contradice ésto los teoremas vistos? (Explicar).

l. Considere un intervalo abierto (a, b). Puede existir una función f que tenga un extremo en (a, b), pero, cuya derivada, f ′ no se anule en ese intervalo? En caso afirmativo, Contradice ésto los teoremas vistos? (Explicar).

m. Considere un intervalo semiabierto [a, b) (ó (a, b]). Puede existir una función f que tenga un extremo en el intervalo, pero, cuya derivada, f ′ no se anule en él? En caso afirmativo, ¿contradice ésto los teoremas vistos? (Explicar).

n. Considere la función $y = x^3\ 3x^2 +3x-1$. En x= -1 su derivada es cero, pero, allí no existe ningún extremo. ¿Contradice ésto los teoremas vistos? (Explicar).

3.5 LA EVALUACIÓN

Tendrá en cuenta los objetivos terminales tanto de índole operativa como de índole teórica. Por ejemplo se le presentará una función cuya derivada tiene un *"comportamiento normal"* en un intervalo abierto, para que encuentre los extremos relativos aplicando el criterio de la primera derivada. Se le presentará una función con extremos donde no existe la derivada para que encuentre allí el extremo. Se le presentará una función sin extremos. En todos estos casos *"anómalos"* el estudiante dará una explicación respecto a por qué no se puede aplicar el criterio. Se formularán algunas preguntas para evaluar el módulo semántico en cuanto al submódulo del Ser-No Ser y el submódulo Representacional.

Naturalmente, el ejemplo anterior está esquematizado, el desarrollo completo se presentará inmerso en un curso completo, con objetivos terminales del curso bien diseñados y un módulo completo para los Talleres-Laboratorios.

4. EXTENSIONES DEL MODELO

Por definición un objeto debe existir "siempre". Esto indica que conceptos como Límite, Derivada o Integral, en general no son objetos y deben ser estudiados desde el punto de vista de ***comportamientos límite de funciones,*** pero, si estos existen, pueden ser tratados como objetos y referidos a una sub-red.

En una extensión de este punto de vista se podría estudiar un único objeto general: Función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ asociado a otros objetos como Número Real, Punto de $\mathbf{R}^n$, Curvas Planas, Curvas en $\mathbf{R}^n$, y Superficies en $\mathbf{R}^n$. Entonces, el Cálculo sería solamente el estudio (y conformación) de esta sub-red. De acuerdo con los valores de n y m tendríamos especificaciones del objeto, que serían funciones reales de variable real, funciones vectoriales de variable real, funciones reales de un vector y funciones vectoriales de un vector. De todos modos, al finalizar el aprendizaje básico del cálculo, el estudiante debería tener por lo menos un bosquejo de esta idea globalizadora.

Al terminar su formación básica el estudiante habrá construido una red de conceptos matemáticos suficientemente poderosa como para resolver una gran cantidad de problemas teórico-prácticos y representar numerosos fenómenos del mundo físico.

En estos momentos con superabundancia de información, hace falta quien la ponga en orden y extraiga de ella conocimientos fundamentales: el individuo reflexivo y creador.

Esta metodología puede ser aplicada a materias a fines tales como, Física, Estadística e Investigación Operativa.

Una buena red de conceptos y destrezas matemáticas, y sobre todo el conocimiento de los alcances, las limitaciones y el poder representativo de los conceptos es fundamental para el pensamiento científico. La interpretación, los procesos de deducción y los procesos inductivos son fundamentales en cualquier forma del pensamiento racional.

5. RECOMENDACIONES

El desarrollo y conservación de la red de conceptos y procedimientos depende en gran medida de la continuidad del proceso.

Sólo un conocimiento amplio de una materia y su entorno conceptual permiten una enseñanza adecuada de ésta.

La visión de la importancia del desarrollo teórico, y las limitaciones de muchos de los temas de matemáticas sólo se adquieren después de estudiar algunos cursos avanzados que involucran aquellos conceptos como casos particulares de otros más generales. Por ejemplo, la potencia que confiere la continuidad a las funciones sólo se puede estudiar en los cursos de Análisis o Topología. Por lo tanto, el desarrollo de un conjunto de programas basados en este modelo requiere que los profesores que van a desarrollar los programas tengan como mínimo los estudios de Teoría de Conjuntos, Cálculo Avanzado, Análisis Matemático, Algebra y Algebra Lineal que se ven en una licenciatura en matemáticas.

De los estudiantes se requiere una preparación básica en razonamiento lógico elemental, métodos de deducción e inducción, así como el manejo operativo básico y la predisposición al desarrollo del pensamiento científico en general.

Una serie de charlas encaminadas a este propósito serían muy recomendables para los estudiantes nuevos.

Una red conceptual y funcional bien constituida es un poderoso recurso para el planteamiento y la solución de problemas del mundo real. En estos momentos con superabundancia de información, hace falta quien la ponga en orden y extraiga de ella conocimientos fundamentales: ***el individuo reflexivo y creador.***

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, Tom. Calculus. Madrid. Reverté. 1980.

Borland Pascal with Objects. User´s Guide. Scott Valley, Ca. Borland. 1992.

Fernández Gregorio y Sáenz Fernando. Fundamentos de Informática. Madrid. Alianza Editorial. 1987.

Gómez, Jairo y otros. Curso de Docencia Universitaria. Lecturas Complementarias. Medellín. Universidad Eafit. 1996.

Haaser, Norman. Análisis Matemático. Mexico. Trillas. 1980.

Kandel, Eric R. y Hawkins, Roberto D. Bases Biológicas del Aprendizaje y la Individualidad. Investigación y Ciencia No. 194. Noviembre de 1992.

Shatz, Carla J. Desarrollo Cerebral. Investigación y Ciencia No. 194. Noviembre de 1992.

Tomas, George G., Finney, R.L. Calculus and Analytic Geometry. Reading, Mass. Addison Weseley Publishing Company. 1986.

Townsend, Carl y Feucht, Dennis. Designing and Programming Personal Expert Systems. New York. Tab Books Inc. 1986.