

---

# LAS CADENAS DE MARKOV COMO MEDIO ALTERNO DE PROYECTAR INDICADORES DE CALIDAD EN EL TIEMPO

**RAMIRO ORREGO POSADA**

## RESUMEN

Este artículo pretende mostrar como las cadenas de Markov, modelo de la investigación de operaciones, puede usarse para proyectar de forma alterna indicadores de calidad hacia el futuro, utilizando probabilidades de transición.

Los beneficios de hacer esto son los siguientes:

- Las acciones de mejoramiento se traducen en participación de mercado.
- Se puede estimar hoy la respuesta de los clientes período a período hacia el futuro.
- El grado de satisfacción de los clientes se mide en términos de la respuesta del mercado.
- Es posible estimar período a período los beneficios de una mejora, en términos de los puntos porcentuales ganados en el mercado.
- Valores de largo plazo proporcionan mayor información para orientar la toma de decisiones.

## 1. INTRODUCCIÓN

Se puede afirmar que, en general, la toma de decisiones está sujeta a fenómenos que encierran incertidumbre, proveniente de la variación inherente y aleatoria de las fuentes que intervienen en un

problema. Si estos fenómenos muestran un cierto grado de regularidad, es posible describir su variabilidad mediante un modelo matemático probabilístico que aporte mayor información para orientar dicha toma de decisiones. En un campo como la calidad, y sobre todo cuando se habla de mejoramiento y satisfacción del cliente, es posible enfocar la medición de resultados en la óptica de fenómeno aleatorio o estocástico implementando el modelo de cadena de Markov, puesto que, después de una mejora, no podemos afirmar que el comportamiento del cliente siga un patrón determinístico, sino que existen múltiples factores que afectan su decisión, los cuales tienen relación con su percepción psicológica de la situación, el tiempo disponible, la distancia, la fe que tenga de la divulgación de las acciones que orienta la empresa, etc; dicho comportamiento es variable y su grado de variación, claro está, depende del tipo de producto o servicio que se se ofrece.

Mediante el modelo de cadena de Markov, es posible describir y analizar los cambios hechos, mediante medidas alternas que reflejen hacia el futuro índices de satisfacción o insatisfacción del "cliente" a través de las respuestas del mercado.

---

RAMIRO ORREGO POSADA. Ingeniero Industrial. Especialización en Gerencia de la Calidad. Profesor adscrito al departamento de Informática y Sistemas. Área de Métodos Cuantitativos.

---

En un campo como la calidad, y sobre todo cuando se habla de mejoramiento y satisfacción del cliente, es posible enfocar la medición de resultados en la óptica de fenómeno aleatorio o estocástico implementando el modelo de cadena de Markov.

---

## 2. ENFOQUES

La experiencia común en el trabajo con calidad, cuando se habla del mejoramiento continuo de la satisfacción del cliente, consiste en determinar unos indicadores de gestión y medirlos para conocer la situación. Definidas unas metas por lograr para ellos, se ejecutan acciones de mejoramiento y luego se verifican los valores de estos indicadores para ver si hubo mejora y en qué porcentaje. El proceso es continuo.

Desde cierta óptica, estos indicadores operativos arrojan información estática y no se proyectan hacia el futuro, ya sea por la naturaleza de su manejo o, simplemente porque no existe interés en hacerlo, dado que este proceso de mejora se considera permanente y, aún más, tampoco se traducen en índices de participación de mercado, que es realmente el interés fundamental para cualquier compañía. Lógicamente, el manejo de estos indicadores dentro de la organización son el sustrato que amalgama una cultura de mejoramiento personal y colectivo.

Si traducimos las acciones de mejoramiento en términos de índices de participación de mercado, la información para la organización es más refinada, puesto que permite:

- Proyectar dicha participación hacia el futuro.
- Entender que existe una dinámica del mercado.
- Que no basta con mejorar, sino que es necesario dar a conocer las mejoras.
- Que las respuestas de los clientes al producto o servicio que se ofrece son de naturaleza aleatoria, es decir conllevan cierta probabilidad, la cuál se puede estimar.

- Conocer que "Hoy" podemos planear nuestro trabajo en forma más eficaz y conocer resultados del "futuro".

Este enfoque de observar y estudiar el fenómeno de la respuesta del mercado al producto o servicio que se ofrece y por supuesto del grado de satisfacción en el tiempo, se sustenta en la aleatoriedad del fenómeno y en el principio de que las respuestas del mercado son dinámicas y de largo plazo, que no ocurren inmediatamente después de haber implementado acciones de mejoramiento y por supuesto de promoción.

## 3. ¿QUÉ ES UNA CADENA DE MARKOV?

En forma práctica se introduce un sencillo ejemplo que ilustra un estudio utilizando las cadenas de Markov, para mostrar en este desarrollo los elementos teóricos que la caracterizan.

### Problema de mercadotecnia

Supóngase que dos productos similares A y B compiten por obtener la mayor participación del mercado. Un cliente que compra el producto A puede en la siguiente compra, adquirir A o B; la primera opción indica la lealtad a la marca, la segunda el cambio de marca, dado por diversas razones. ¿Cuáles podrían ser?

Cada comprador eventual podría dar múltiples respuestas a esta pregunta, pero fundamentalmente una compañía no vende productos o servicios; vende un valor o no venderá nada. Si se entiende valor como el beneficio que el cliente obtiene de su producto o servicio menos su costo.

Igualmente, un cliente que compra el producto B puede, en la siguiente compra, decidirse por la marca B o la marca A.

### 3.1 Sistema y estados del sistema

Es común llamar al fenómeno sometido a estudio como **Sistema**, el cual en este problema sería el cambio de marca y estados del sistema a los eventos que produce o toma el sistema en cualquier instante del tiempo  $t$ . En este caso, el sistema tiene dos estados: marca A y marca B, que puede adquirir el cliente en cada compra que haga. En general el estado del sistema de una cadena de Markov se denota como  $X_t$ .

En términos muy sencillos se puede decir que una cadena de Markov es el estudio de la sucesión de transiciones en el tiempo de un fenómeno aleatorio o estocástico, mediante la cuál es posible estimar vectores futuros de probabilidad de los estados del sistema y que tiene las siguientes características:

- La existencia de un número finito de estados. Además, se trata de un problema de repetición de ensayos en el tiempo, en este caso compras.
- Carencia de memoria. Indica que la probabilidad de un estado futuro del sistema, no depende de los estados pasados por los que ha pasado, sino del estado actual. Para el caso que se trata indica que la probabilidad de que un cliente compre la marca B dentro de k períodos no depende de lo que haya comprado hasta hoy sino de lo que compre en el período k - 1.
- Las probabilidades de transición  $P_{ij}$  se consideran constantes en el tiempo.

Las probabilidades de transición indican las probabilidades de que el sistema si está en el tiempo t en el estado i (A o B), pueda pasar en el tiempo t + 1 (un período después o paso = nueva compra ) al estado j (A o B).

En el caso que se viene tratando se refieren a la probabilidad de que un cliente que compró A vuelva a comprar A o pase a comprar B en la siguiente compra, denotadas como  $P_{AA}$  o  $P_{AB}$  respectivamente. Igualmente,  $P_{BA}$  y  $P_{BB}$  indican las probabilidades de pasarse de B a A o de seguir en B en la siguiente compra (o sea en una transición ). Se suponen

constantes en el tiempo, a menos que se hayan dado variaciones en las percepciones de los clientes por cambios económicos, sociales, publicitarios, de calidad del producto o del servicio, etc.

Las probabilidades de transición  $P_{ij}$  requieren que sean estimadas mediante un método estadístico que proporcione una medida apropiada de confiabilidad, de tal forma que los resultados finales sugieran que tienen un sustento valedero; si no es así, se introduce ruido al modelo y se desvirtúa la aplicabilidad potencial.

Se puede decir que una cadena de Markov es el estudio de la sucesión de transiciones en el tiempo de un fenómeno aleatorio o estocástico, mediante la cuál es posible estimar vectores futuros de probabilidad de los estados del sistema.

### 3.2 Estimación de las probabilidades de transición

Si se considera una cadena de Markov, indexada sobre el parámetro tiempo discreto, para la cual se tienen n observaciones o transiciones, veamos mediante un ejemplo cómo se pueden estimar las probabilidades de transición.

El estudio de 20 clientes en la góndola de un supermercado, a los cuales se les preguntó sobre la marca que van a comprar y cuál fue la última que efectuaron, arrojó los siguientes resultados:

		Nueva compra		
		A	B	Total
Última compra	A	7	4	11
	B	2	7	9
Total				20

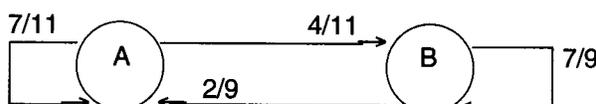


Las probabilidades de transición serían:

	A	B
A	7/11	4/11
B	2/9	7/9

### 3.3 Diagrama de estados

Mediante nodos (círculos) y arcos dirigidos (flechas orientadas), podemos representar el problema de cambio de marca de la siguiente forma:



Se puede observar que un cliente que compra A puede en la próxima compra adquirir nuevamente A con probabilidad  $P_{AA} = 7/11 = 0.636$  o pasarse a B con probabilidad  $P_{AB} = 0.364$ . Para un cliente que compró B, puede en la siguiente compra pasarse a A con probabilidad  $P_{BA} = 2/9 = 0.222$  o seguir con B con probabilidad  $P_{BB} = 0.778$

### 3.4 Matriz de transición. (En un paso)

Es otra forma de representar las probabilidades de transición, se denota como **P**:

$$P = \begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline A & P_{AA} & P_{AB} \\ B & P_{BA} & P_{BB} \end{array}$$

La matriz (realmente la cadena) puede ser **Ergódica**. Indica que el sistema sí está en cualquier estado *i* en el tiempo *t*, puede alcanzar, no necesariamente en un paso, cualquier otro estado.

Este concepto se ilustra mejor con el diagrama de estados visto anteriormente. Si un cliente está en A puede llegar a B y viceversa.

Este fenómeno de cambiar o no cambiar de producto y/o servicio en la siguiente compra se acentúa más cuando existe poca diferenciación o posicionamiento, dados por factores de calidad, factores psicológicos del cliente, circunstancias de tiempo, distancia, etc.

**Matriz absorbente:** Tiene al menos un estado absorbente, es decir, un estado tal que, una vez que se llega a él, no se puede abandonar. Expresado en términos de probabilidad de transición, es aquel cuya probabilidad  $P_{ii} = 1$  y las restantes  $P_{ij} = 0$  para todo *i* diferente de *j*.

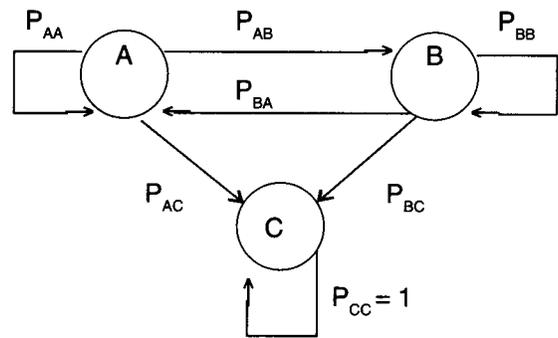
Para ilustrar ésto, involucremos a un tercer producto o servicio C participante en el mercado como resultado de la apertura económica, el cual, dada su estructura de precio y calidad, entra al mercado nacional con grandes posibilidades de posicionamiento en ausencia de nuevas estrategias de diferenciación que sustentan las compañías proveedoras de los productos A y B. Este producto C, en determinado tiempo se llevará toda la participación del mercado, lo cual indica que los clientes que compraban A o B, al llegar a tratar con C, no lo quieren

abandonar, por las ventajas que les ofrece dicho producto.

La matriz de transición en estas circunstancias sería:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & P_{AA} & P_{AB} & P_{AC} \\ B & P_{BA} & P_{BB} & P_{BC} \\ C & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Indicando estas transiciones mediante un diagrama de estados se tendría:



La matriz o el diagrama indican que el producto o servicio C acabará por llevarse todo el mercado después de *n* compras sucesivas.

Considerando sólo los dos productos A y B, sería de interés, con las probabilidades antes calculadas, averiguar el porcentaje de participación de mercado de cada marca después de *n* compras sucesivas, en el supuesto de un mercado cerrado, es decir que no ingresan nuevos clientes a él y tampoco se retiran. Es de anotar que el modelo de cadenas de Markov se diferencia del enfoque clásico de la inferencia estadística, en el sentido de que la estimación markoviana de participación es dinámica, en tanto el otro enfoque es estático.

### 3.5 Estimación de vectores de probabilidades

Si actualmente la participación de mercado de los productos está dada por el siguiente vector de estado inicial  $S_0 = | 0.58, 0.42 |$  entonces veamos en la **Tabla No. 1** la participación después de *n* períodos: Para este cálculo se utilizó el paquete QSB.

**Tabla No. 1**

Período	Vector de probabilidad del período Participación de mercado	
	número	A
0 Actual	0.5800	0.4200
1	0.4621	0.5379
2	0.4133	0.5867
3	0.3931	0.6069
4	0.3847	0.6153
5	0.3813	0.6187
6	0.3799	0.6201
7	0.3793	0.6207
8	0.3790	0.6210
9	0.3789	0.6211
10	<b>0.3788</b>	<b>0.6212</b>
11	0.3788	0.6212

**3.5.1 Interpretación de los resultados anteriores**

Inicialmente la participación del mercado del producto A es del 58%; después de un período su participación pasa a ser del 46.21%, o sea que pierde 11.79 puntos porcentuales. Obsérvese que dicha participación después de la primera transición va disminuyendo en menor proporción hasta llegar a un valor estable del 37.88% de participación para el período 10; es decir, a largo plazo pierde 20.12% del mercado.

Igualmente obsérvese que el producto B, el cual comenzó con una participación de mercado del 42%; posteriormente fue en aumento hasta lograr un valor estable de 62.12% de participación del mercado. Los valores límites a los cuales llegaron las participaciones de A y B respectivamente, son valores estables o estacionarios, es decir, son valores esperados o de largo plazo.

En el largo plazo entonces, se espera que la participación del producto A en el mercado sea del 37.88%.

El trabajo con enfoque hacia la calidad involucra la implementación de una amplia gama de acciones por parte de la empresa, para el cual se trazan metas por lograr en un período determinado de tiempo. Luego se miden los resultados para verificar cuanto se logró de la meta original. Estos indicadores operativos indican si se mejora o no, y en qué proporción. Sin embargo es fundamental medir el impacto económico de las acciones de mejora-

miento sobre las finanzas de la compañía, y aún más importante, es necesario proyectar dichos efectos hacia el futuro en términos de la respuesta del mercado; dicho conocimiento contribuye a planear el trabajo.

**3.6 Variación de probabilidades de transición**

Si se supone que la empresa ha hecho un trabajo de mejora de su producto y de la calidad del servicio de venta y posventa, y dicha mejora se cree que cambiaría las probabilidades iniciales de lealtad a la marca A de 0.636 a 0.75 y las probabilidades de capturar competencia de B de 0.222 a 0.35, es de esperarse que la respuesta del mercado no es inmediata, sino que se da en la medida que clientes insatisfechos de A intenten nuevamente con A y los clientes de B se "arriesguen" con A.

Los cambios dados en las probabilidades de transición, refleja la experiencia y conocimiento de las personas de ventas o mercadotecnia de la compañía. Para algunos podría sonar a especulación; sin embargo, este cambio puede estimarse estadísticamente, una vez pase cierto período después de la mejora.

Entonces, considerando estas nuevas probabilidades, en la **Tabla No. 2** se ve como cambia la participación del producto A en el mercado; nuevamente los cálculos se hacen con el paquete QSB.

**Tabla No. 2**

Período	Vector de probabilidad del período Participación de mercado	
	Número	A
0 Actual	0.5800	0.4200
1	0.5820	0.4180
2	0.5828	0.4172
3	0.5832	0.4168
4	<b>0.5833</b>	<b>0.4167</b>
5	0.5833	0.4167

La participación del producto A en el mercado se espera sea del 58.33%, o sea que logra a largo plazo incrementar su participación en el mercado en un 20.45%. Este resultado nos dice qué tan eficientes son las mejoras obtenidas, e indirectamente indica el grado de satisfacción de los clientes; además agrega valor, puesto que muestra período a período el

comportamiento del mercado y, adicionalmente, permite estimar costos y beneficios de los programas que se están implementando.

Si los "costos" de la mejora son \$ X invertidos en cierto período de tiempo, se puede observar que los beneficios esperados estarían dados por la contribución que deja ese 20.45% adicional de mercado menos los \$ X de "inversión" hecha en la mejora.

Otro aspecto de interés en una cadena de Markov tiene relación con el tiempo medio del primer retorno y de la primera transición. Con un ejemplo hipotético se ilustrará como podrían estos valores ayudar en el trabajo con enfoque hacia la calidad.

**El trabajo con enfoque hacia la calidad involucra la implementación de una amplia gama de acciones por parte de la empresa, para el cual se trazan metas por lograr en un período determinado de tiempo. Luego se miden los resultados para verificar cuanto se logró de la meta original. Estos indicadores operativos indican si se mejora o no, y en qué proporción. Sin embargo es fundamental medir el impacto económico de las acciones de mejoramiento sobre las finanzas de la compañía, y aún más importante, es necesario proyectar dichos efectos hacia el futuro en términos de la respuesta del mercado; dicho conocimiento contribuye a planear el trabajo.**

### 3.7 Problema de empresa de servicios

Aeromundial es una línea aérea colombiana preocupada por los retrasos de sus vuelos, dada la mala imagen que esto crea en el cliente y, por

supuesto, la pérdida de mercado ante la competencia. La compañía no desea que el vuelo de las 7 am entre Medellín y Bogotá salga retrasado dos días consecutivos. Si el vuelo sale retrasado un día, la compañía hace un esfuerzo especial para que el avión salga a tiempo al día siguiente; según los registros históricos, lo ha logrado el 80 % de las veces. Cuando el vuelo no sale con retraso el día anterior, Aeromundial no realiza "arreglos especiales" (no tiene cultura de calidad y, en especial, no existe gerencia de rutina del día a día) y el vuelo parte de acuerdo con lo programado el 85% de las veces.

Es de interés para la compañía estudiar esta situación a largo plazo para estimar qué porcentaje de las veces sale dicho vuelo con retraso, y en promedio cuantos días transcurren para que el vuelo que salió con retraso, vuelva nuevamente a salir retrasado.

La matriz de transiciones para esta situación se ilustra a continuación:

	<b>sin retraso</b>	<b>con retraso</b>
<b>P =</b>		
sin retraso	0.90	0.10
con retraso	0.80	0.20

Mediante el paquete QSB se obtienen los siguientes resultados de largo plazo:

sin retraso: 0.8421      con retraso: 0.1579

Tiempo promedio que transcurre para que el vuelo que partió con retraso, nuevamente salga con retraso es de 6.33 días.

Los resultados anteriores indican que el vuelo de las 7 am entre Medellín y Bogotá sale con retraso el 15.79 % de las veces y que en promedio transcurren 6.33 días entre retrasos, consecutivos.

En realidad, el vuelo de las 7 am no cumple altos estándares de calidad de servicio al cliente, hecho que por supuesto debe "molestar" a clientes habituales y nuevos de dicha aerolínea. Evitar esto requiere lógicamente la adopción de acciones de mejora, que cambien la situación hacia estándares de actuación de largo plazo más aceptables. Lo ideal sería "Cero defectos", lo cual implicaría que el vuelo nunca partiera retrasado, convirtiendo una situación estocástica en una determinística, pero esto no es factible, dado que algunos de los factores que inciden en el retraso del vuelo son no controlables por parte de la compañía, como por ejemplo el estado del tiempo, problemas técnicos de los controladores, etc.

---

Los factores controlables por parte de la compañía requieren de la toma de acciones de mejoramiento y de la aplicación de la gerencia de la rutina del día a día sobre las variables vitales que inciden en el retraso del vuelo. Los resultados de las acciones de la mejora se pueden medir de forma alterna, estimando probabilidades de transición y aplicando el modelo de cadena de Markov, para proyectar resultados a largo plazo como apoyo para la toma de decisiones hoy.

Adicionalmente las cadenas de Markov se pueden utilizar, como parte de lo que es trabajo con calidad, para la planeación de recursos, en la determinación de políticas óptimas de reparación de máquinas y determinación de niveles de inventarios, etc. En la revista Interfaces, volumen 15, número 6 de 1985, Douglas J White, ilustra múltiples aplicaciones reales de procesos de decisión usando cadenas de Markov, entre otras en salud, seguros, hidroeléctricas, alimentos, desarrollo y diseño de productos, mercados, control biológico, etc. Formalmente su aplicación no tiene nada que ver con indicadores de mejora en calidad, sin embargo ayudan a predecir respuestas futuras de diversos sistemas, que permiten tomar decisiones respecto a parámetros, involucrados en los problemas de hoy.

#### 4. CONCLUSIONES

El enfoque de proceso estocástico (fenómeno aleatorio) y la particular aplicación de las cadenas de Markov en la medición de las acciones de mejora o de control que efectue cualquier organización, brinda la posibilidad de percibir, con cierto grado de confianza, resultados hacia el futuro que hoy podemos planear y transformar hacia metas o estándares deseados, sin necesidad de que realmente ocurran los hechos.

#### 5. BIBLIOGRAFÍA

- Campos, Vicente Falconi. Controle da qualidade total. (No estilo Japonés). Rio de Janeiro: Bloch editores SA.. 1992.
- Chang, Yih Long y Sullivan, Robert. Quantitative Systems for Business plus. QSB. New Jersey. Englewood Cliffs. 1989.
- Davis, K. Roscoe y Mckeown, Patrick. G. Modelos cuantitativos para administración. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 1986.
- Gallaher, Charles. A y Watson, Hugh, J. Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración. México. McGraw-Hill. 1982.
- Gómez Saavedra, Eduardo. Administración total de la calidad. 4a. ed. Santafé de Bogotá: Instituto colombiano de Normas Técnicas. ICONTEC.
- Kane, Víctor E. Defect prevention. Use of Simple Statistical Tools. New York: Marcel Dekker Inc. 1989.
- Mitra, Amitava. Fundamentals of Quality Control and Improvement. New York: McMillan Publishing Company. 1993.
- Trivedi Kishor, Shridharbhai. Probability and Statistics with Reliability Queing, and Computer Science Applications. New York: Prentice Hall. 1982.
- White, J. Douglas. Real Applications of Markov Decision Processes en: Interfaces. Vol. 15. No. 6 Nov - Dbre. 1985. pp. 73 - 83.
- Winston, Wayne L. Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos. México: Grupo Editorial Iberoamérica 1994.