EL ORIGEN FENOMENOLÓGICO DE LA TEORÍA ERGÓDICA

ULISES CÁRCAMO C.

Dado un sistema dinámico, podemos asociarle varias magnitudes físicas. La Teoría Ergódica surge de los intentos por demostrar matemáticamente que el promedio de los valores que toma una de esas magnitudes físicas en uno solo de esos sistemas, a medida que evoluciona a través del tiempo, es igual al valor que obtendríamos al promediar la misma magnitud medida en muchos sistemas semejantes en un mismo instante de tiempo.

La teoría ergódica, como muchas otras teorías matemáticas, ha tenido su origen en el estudio de un modelo formulado para explicar un fenómeno físico.

COORDENADAS GENERALIZADAS

En muchos problemas elementales de la física se pueden describir los sistemas dinámicos mediante sistemas elementales de coordenadas. En algunos de éstos, se ubica un punto en el espacio, empleando distancias a unos ejes dados (como los sistemas de coordenadas cartesianas) otros utilizan distancias y ángulos (por ejemplo las coordenadas polares en el plano, y las coordenadas cilíndricas y las esféricas en el espacio tridimensional).

El estudio de sistemas más complejos requiere el uso de ***coordenadas generalizadas,*** que en casos particulares pueden interpretarse como distancias, áreas, ángulos, etc.

La teoría ergódica, como muchas otras teorías matemáticas, ha tenido su origen en el estudio de un modelo formulado para explicar un fenómeno físico.

Sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ las coordenadas generalizadas de un sistema dado, a las variaciones instantáneas de éstas respecto al tiempo,

$$\frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1,\ \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2,\ \frac{dq_n}{dt} = \dot{q}_n,$$

las llamamos ***velocidades generalizadas*** y a las variaciones instantáneas de éstas respecto al tiempo,

$$\frac{d\dot{q}_1}{dt} = \ddot{q}_1,\ \frac{d\dot{q}_2}{dt} = \ddot{q}_2,\ \frac{d\dot{q}_n}{dt} = \ddot{q}_n,$$

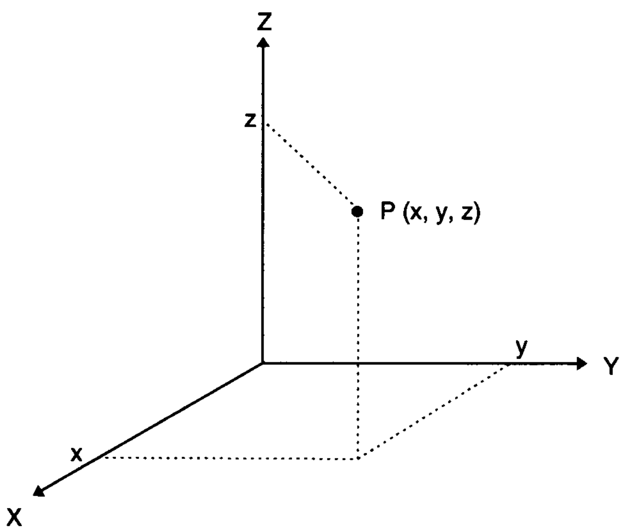
las llamamos ***aceleraciones generalizadas.*** También se suelen introducir los momentos generalizados: Si x **i**+y **j**+z **k** es el vector de posición de un punto en el espacio y x, y y z son

ULISES CÁRCAMO C. Magister en Matemáticas. Profesor de la Universidad EAFIT, Departamento de Ciencias Básicas.

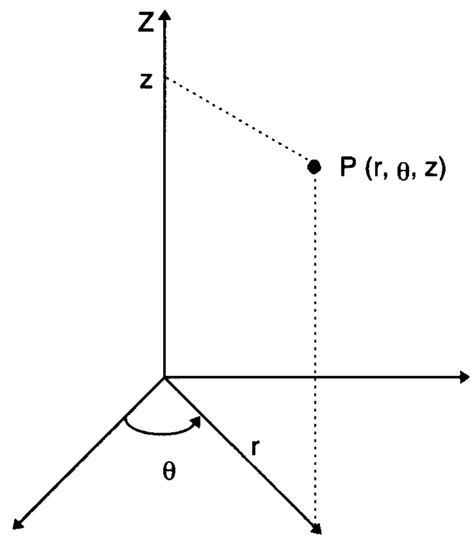
funciones del tiempo t, $\mathbf{r}' = d\,\mathbf{r}/dt = dx/dt\,\mathbf{i}+dy/dt\,\mathbf{j}+dz/dt\,\mathbf{k} = x'\,\mathbf{i}+y'\,\mathbf{j}+z'\,\mathbf{k} = \mathbf{v}$ será la velocidad del punto cuya magnitud al cuadrado será, $v^2=(x')^2+(y')^2+(z')^2$.

Si m es la masa del punto definimos su energía cinética T, como $T = 1/2\ m\ v^2 = 1/2\ m((x')^2+(y')^2+(z')^2)$; $\partial T/\partial x = m\,x' = Px$, $\partial T/\partial y = m\,y' = Py$, $T/z = m\,z' = Pz$ son las componentes del momentum (o cantidad de movimiento) de la partícula. En coordenadas generalizadas la cantidad $\partial T/\partial q_i$ se llama momentum generalizado asociado con q_i y se escribe $P_i = \partial T/\partial q_i$.

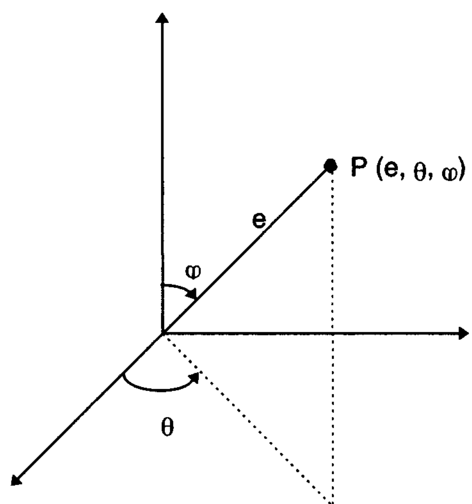
FIGURA 1



COORDENADAS CARTESIANAS



COORDENADAS CILÍNDRICAS



COORDENADAS ESFÉRICAS

EL HAMILTONIANO DE UN SISTEMA MECÁNICO

Consideremos un sistema mecánico conservativo con n grados de libertad, sean $q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ y $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ sus coordenadas y sus momenta generalizados, respectivamente, ***la Función Hamiltoniana, H*** (o simplemente el Hamiltoniano) del sistema es la suma de las energías cinética (T) y potencial (V) del mismo, $H = T + V$, donde T depende de las q_i y las p_i y V depende sólo de las q_i. En general, H no depende del Tiempo.

La evolución del sistema se describe mediante las Ecuaciones Canónicas de Hamilton:
$dq_i/dt = \partial H/\partial p_i$, $dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i$, $i= 1, 2,\dots,n$ (1).

Como el sistema es conservativo $\partial H/\partial t = 0$ ***(La Energía Mecánica total se conserva).***

Si H tiene derivadas parciales continuas de órdenes suficientemente altos, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (1) tendrá una única solución para cada conjunto $q_1(t_0),\dots,q_n(t_0),p_1(t_0),\dots,p_n(t_0)$ de condiciones iniciales.

EL ESPACIO DE FASE DEL SISTEMA

A cada posible estado del sistema le podemos asociar un punto con 2n coordenadas: ***Punto Representativo*** del estado del sistema.

El espacio de dimensión 2n cuyos puntos son $w(t)=w(q_1(t),\dots,q_n(t),p_1(t),\dots p_n(t))$ se llama el ***Espacio de Fase*** (Ω) del sistema.

Si un sistema está representado por el punto $w_0=w(t_0)$ en $t=t_0$ en el tiempo $t=s$ estará caracterizado por el punto $w=w(s)$ y en general evolucionará según una 'curva' ***(Órbita o Trayectoria)*** en el espacio de fase. Dado que la evolución del sistema depende sólo del punto que caracteriza sus condiciones iniciales, para cada uno de aquellos puntos tenemos una trayectoria T_t. En general, tenemos una familia monoparamétrica $\{T_t\}$ de trayectorias en el espacio de fase. Si $t_1 > t_0$, el estado del sistema en $t = t_1$ estará representado por el punto $W(t_1)$, si consideramos a este punto como un nuevo conjunto de condiciones iniciales para el sistema en el tiempo t_1, el sistema evolucionará según la misma trayectoria relacionada con las condiciones en t_0. Por lo ***tanto las trayectorias no se cortan entre sí.***

Si el sistema comienza su evolución en t_0, y si $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ podemos considerar que $w(t_0)$ se 'mueve', a través del tiempo, en el Espacio de Fase, pasando por $w(t_1)$, $w(t_2)$,. . ., en los instantes respectivos t_1, t_2,. . ., a lo largo de su trayectoria correspondiente.

LA EVOLUCIÓN EN EL ESPACIO DE FASE COMO UNA TRANSFORMACIÓN

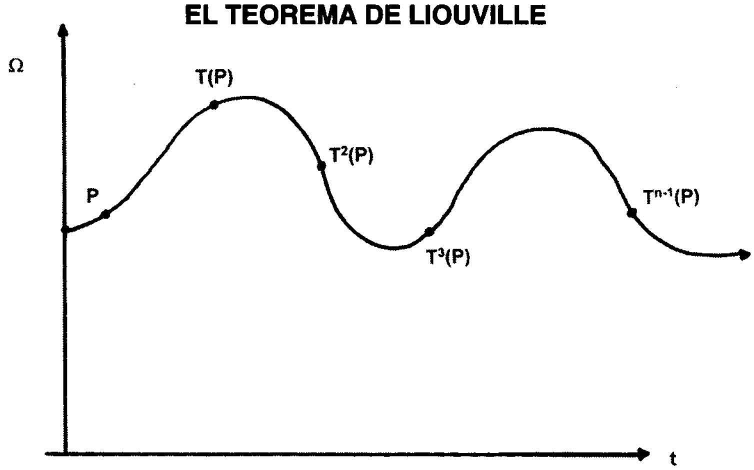
Para simplificar consideraremos solamente valores discretos del tiempo 0, 1, 2, . . .

Imaginando el conjunto de todas las trayectorias, cada una correspondiendo a un conjunto de estados iniciales, podemos concebir el espacio de fase como un fluido en movimiento en si mismo. (Ver Figura 3).

Más formalmente: Podemos definir una transformación **T** del Espacio de Fase en sí mismo de tal manera que la evolución de un punto indi-vidual en el tiempo esté dada por la trayectoria correspondiente.

Un conjunto de sistemas dinámicos semejantes estará representado por un conjunto de puntos en el Espacio de Fase, cada uno de estos puntos corresponderá a su sistema respectivo.

FIGURA 2
EL TEOREMA DE LIOUVILLE



EVOLUCIÓN DE UN PUNTO EN EL ESPACIO DE FASE

Así como, en general, a un conjunto del espacio bidimensional, le podemos asignar un área y, en general, a un conjunto del espacio tridimensional le podemos asignar un volumen, en general, a un conjunto del espacio K-dimensional, k > 3, le podemos asignar, un ***volumen generalizado.***

Consideremos un conjunto $S \subseteq \Omega$ de volumen (generalizado) finito. La transformación T transforma a S en un conjunto $T(S) = S_T$. El volumen (generalizado) de T(S) será:

$$\int_{T(s)} dT(q_1)...dT(q_n).dT(p_1)...dT(p_n) = \int_S J\, dq_1...dqn...dp_1...dp_n$$

donde J es el jacobiano de la transformación.

Hagamos $q_i = x_i$, para i=1,. .. n, $p_i = x_i$, para i=n+1,. . .,2n, además $T(q_i)=y_i$ para i=1,...,n y $T(p_i)=y_i$ para i=n+1,...,2n entonces:

$$J = \frac{\partial\,(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{2n})}{\partial\,(y_1,\ldots,y_n,\ldots,y_{2n})}$$

Veamos que este volumen generalizado se preserva bajo la transformación:

Como las q_i y las p_i son funciones de t, también lo serán las y_i y por lo tanto J=J(t) (el jacobiano es función del tiempo).

$$\text{Si } J_k = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_{k-1},\frac{dx_k}{dt},x_{k+1},\ldots,x_{2n})}{\partial(y_1,\ldots,y_{2n})} \text{ entonces, } \frac{\partial J(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{2n} J_k$$

$$\text{pero } J_k = \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial\left(\frac{dx_k}{dt}\right)}{\partial x_s} \frac{\partial\,(x_1,\ldots,x_{k-1},x_s,x_{k+1},\ldots,x_{2n})}{\partial\,(y_1,\ldots,y_{2n})} = \frac{\partial\left(\frac{dx_k}{dt}\right)}{\partial x_k} J(t)$$

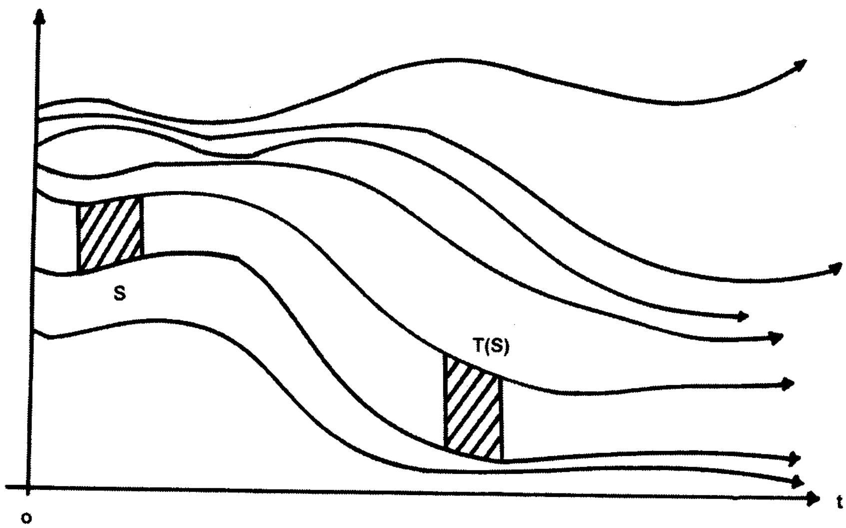
$$\text{luego, } \frac{\partial J(t)}{\partial t} = J(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k\,\partial q_k} - J(t)\sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_k\,\partial p_k} = 0$$

en virtud de la continuidad de las derivadas parciales. Así que en realidad el jacobiano J no depende del tiempo, y por tanto $J \equiv 1$.

De acá podemos concluir que, si V(S) es el volumen generalizado de S y T(S) es la imagen, bajo la transformación T de S, se tiene que V(T(S)) = V(S). Es decir, la transformación T preserva el volumen generalizado.

Este último resultado se conoce como ***Teorema de Liouville*** (diferente del Teorema de Liouville de la Teoría de funciones de una variable compleja).

FIGURA 3



ESPACIO DE FASE Y TEOREMA DE LIOUVILLE

MEDIDAS E INTEGRALES

El análisis matemático ha generalizado los conceptos de longitud de un intervalo, área de una región plana y volumen de una región del espacio con el concepto de ***Medida de Lebesgue*** para conjuntos en $\mathbf{R}^K$, y a partir de acá se ha generalizado, aún más, éste concepto con la noción más abstracta de ***Medida de un Conjunto*** que es una función cuyos valores son números reales ó $+\infty$ y que satisface un pequeño grupo de propiedades especiales. (Ver Recuadros 1 y 2).

La noción de Integral de Riemann (que está intimamente ligada a la noción de intervalo real) se generaliza con el concepto de ***Integral de Lebesgue.*** Con esta última se puede operar sobre conjuntos más generales. (Ver Recuadros 4 y 5).

En una de sus generalizaciones el Teorema de Liouville afirma que en un sistema conservativo, como el que hemos analizado, se conserva la Medida de Lebesgue de los ***conjuntos Lebesgue-medibles*** (aquellos conjuntos para los que esta medida tiene sentido).

Hablando un poco más en abstracto: En una unidad de tiempo, el Espacio de Fase sufre una transformación biyectiva $T : \Omega \rightarrow \Omega$ (en sí mismo) tal que si A es un conjunto medible-Lebesgue y si $\lambda(A)$ es su medida de Lebesgue entonces $\lambda(T^{-1}(A)) = \lambda(A)$ es decir T es una transformación que preserva la medida.

El tema central de la Teoría Ergódica es el estudio dinámico de las transformaciones que preservan la medida.

SUPERFICIES DE ENERGÍA CONSTANTE

Recordemos del cálculo elemental que si $F = F(x_1,...,x_k)$ es una función de k variables, la expresión $F(x_1,...,x_k) = C$ (C=cte.) representa una superficie en $\mathbf{R}^k$.

El sistema que estamos considerando es conservativo, es decir, su energía mecánica es una constante, E. El conjunto de todos los puntos $P = (q_1,...q_n, p_1,...p_n)$, tales que su energía mecánica, H, está dada por $H(q_1,...,q_n, p_1,...p_n) = E$, es una superficie en el espacio 2n-dimensional y se llama ***Superficie de Energía Constante.***

Cada una de estas superficies es un conjunto invariante, bajo la transformación T, de el Espacio de Fase. Si el punto P se encuentra, inicialmente, en la superficie entonces todas las trayectorias asociadas con P estarán sobre la superficie $H(q_1,....,qn, p_1,...,pn)= E$.

El término **Ergódico** (Ergodic) proviene de las raices griegas **Ergos:** Trabajo y **Odos:** Trayectoria.

UNA MEDIDA INVARIANTE

Durante el movimiento del Espacio de Fase en si mismo, cada conjunto medible M, sobre una superficie de energía constante, Σ, es transformado en otro conjunto T(M) sobre la misma. La medida 'natural' de M será $\mu(M) = \int_M d\Sigma$, pero, en general $\mu(M) \neq (\mu(T(M))$.

Se puede probar que la siguiente medida 'alternativa' (es una medida invariante para este proceso. Si M es un conjunto, medible, sobre Σ, definimos $\nu(M)$, mediante $\nu(M) = \int_M \frac{d\Sigma}{Grad(E)}$ donde $E = E(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$ es la energía total del sistema, y $Grad(E) = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p_i}\right)^2 \right) \right\}^{1/2}$

es la magnitud del gradiente de E.

$\nabla E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial q_i} e_i + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\partial E}{\partial p_i} e_i$ es el Vector Gradiente de E y $\mathbf{e}_i$ es el i-ésimo vector de la base canónica del espacio vectorial $\mathbf{R}^{2n}$.

> El tema central de la Teoría Ergódica es el estudio dinámico de las transformaciones que preservan la medida.

EXPERIMENTACION Y FUNCIONES DE FASE

Con el fin de someter a prueba los resultados teóricos, debemos recurrir a la experimentación. Para hacer esto se definen ***"observables"*** o ***"funciones de fase"*** del sistema y se diseñan procesos para calcular sus valores.

(Hablando más en abstracto: se definen ***funciones medibles).***

Una ***Función de fase del sistema*** es cualquier función de $P = (q_1,\ldots,q_n, p_1,\ldots,p_n)$.

LA MECÁNICA ESTADÍSTICA

Al admitir que la materia está constituida por moléculas y átomos, que satisfacen unas leyes determinadas (válidas a nivel microscópico), se necesitó de una rama de la ciencia que explicara, con base en estas leyes, el comportamiento macroscópico de la materia.

Surge entonces la Mecánica Estadística (M.E), cuyo objetivo principal es describir y predecir las propiedades de los sistemas compuestos por un gran número de partículas, en función de las fuerzas entre las mismas. Por ejemplo, la presión que ejerce un gas sobre las paredes de el recipiente que lo contiene, puede explicarse en función de las colisiones de las moléculas del gas y las paredes de aquel.

La Mecánica Estadística incluye dos campos principales, cada uno de los cuales intenta explicar un conjunto de resultados experimentales de los sistemas macroscópicos: ***La Mecánica Estadística de los Sistemas en Equilibrio*** (llamada también ***Termodinámica Estadística)*** y la ***Mecánica Estadística de los Sistemas fuera del Equilibrio.***

Los comienzos de esta rama de la Física se remontan a la segunda mitad del siglo XIX y están ligados a los nombres de Maxwell, Boltzmann, Clausius y Gibbs.

En Mecánica Estadística, con cada estado macroscópico del sistema se asocia una colectividad de sistemas, todos en el mismo estado macroscópico, pero cada uno con microestados, posiblemente diferentes, pero compatibles con el macroestado de referencia. Así, el valor de una propiedad del sistema, en un determinado estado macroscópico,es el promedio de los valores de dicha propiedad, calculado el los sistemas correspondientes a tal macroestado.

Hoy en día la Mecánica Estadística considera, además de los átomos y las moléculas, a los electrones, los núcleos atómicos y el comportamiento de los campos electromagnéticos, y forma un puente entre lo microscópico y lo macroscópico.

PROBLEMAS EN EL CÁLCULO DE LAS FUNCIONES DE FASE

Aunque para muchos sistemas, la estimación de observables puede ser relativamente sencilla, en ciencias como la Mecánica Estadística (donde un punto del Espacio de Fase representa un Estado Microscópico del sistema), surgen dificultades insuperables para calcular estas funciones.

Estas dificultades son de dos tipos: ***Problemas de tipo experimental y problemas de dificultad de cálculo.***

> Aunque para muchos sistemas, la estimación de observables puede ser relativamente sencilla, en ciencias como la Mecánica Estadística surgen dificultades insuperables para calcular estas funciones. Estas dificultades son de dos tipos: ***Problemas de tipo experimental y problemas de dificultad de cálculo.***

En general, el número de componentes de un sistema, el número de grados de libertad y el número de fenómenos que ocurren en una unidad de tiempo son extremadamente grandes. Considérese a manera de ejemplo una muestra de 1 gr. de hidrógeno en un recipiente, además de tener muchas moléculas (alrededor de 6.0225 x10^{23}), cada segundo se presentan muchísimas colisiones entre estas particulas y entre éstas y las paredes del recipiente.

Para medir experimentalmente una función de fase, necesitaríamos conocer el estado del sistema en el momento de la medida, es decir, necesitaríamos determinar las coordenadas generalizadas de los componentes del sistema. Si esto fuera posible, gastaríamos una cantidad enorme de tiempo en ese propósito, y en general, mucho más tiempo que ese para computar el valor del observable.

Además, con el fin de eliminar los efectos de los errores introducidos por el proceso de medición, deberíamos comparar los resultados experimentales no con valores aislados de las funciones de fase, sino con sus promedios tomados sobre grandes intervalos de tiempo.

PROMEDIOS DE TIEMPO

Si $P = (q_1,\ldots,q_n, p_1,\ldots,p_n)$ es un punto, en su condición inicial, la sucesión $P, T(P), T^2(P),\ldots, T^{n-1}(P),\ldots$ describirá su evolución, a través del tiempo, en el Espacio de Fase. Los valores respectivos de una función de fase f, serán $f(P)$, $f(T(P))$, $\ldots, f(T^{n-1}(P)),\ldots$ El Promedio de Tiempo de f en los primeros n instantes será $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(P))$.

La sucesión de promedios de tiempo $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(P))\right\}$, contiene los promedios de f, calculados a medida que el punto se desplaza por la trayectoria del Espacio de Fase correspondiente a P.

Surgen dos preguntas interesantes:

1. **¿La sucesión de promedios de tiempo, es convergente?**

2. **Si converge la sucesión de promedios de tiempo, ¿Cómo calculamos el valor límite?**

Un Teorema, enunciado y demostrado por G.D. Birkhoff (1931), asegura que, bajo ciertas circunstancias, tal sucesión es convergente. Este hecho implica que no importando el punto de la trayectoria donde el sistema comience su 'recorrido', el valor límite será el mismo.

El intentar resolver la segunda pregunta, nos llevará a formular la ***Hipótesis Ergódica.***

PROPIEDADES PARA "CASI TODO" ELEMENTO DE UN CONJUNTO

En Teoría de la Medida se dice que una propiedad se cumple ***para "casi todo"*** elemento de un conjunto A, o ***en "casi todas partes"*** sobre A, si la medida del subconjunto de A, donde no se cumple la propiedad, es cero. Es decir, el conjunto de todos los elementos que no cumplen la propiedad, puede no tenerse en cuenta.

EL TEOREMA DE BIRKHOFF

La versión original del Teorema de Birkhoff, tiene aproximadamente el siguiente enunciado:

Sea V un subconjunto del Espacio de Fase, que es invariante bajo T y que tiene volumen generalizado finito. Sea $f = f(P)$ una función de fase, definida para todos los puntos de V e integrable sobre V. Entonces el límite $\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(P,t)\,dt$, existe pará casi todos los puntos de V˙

La integral $\int_0^T f(P,t)\,dt$, es el Promedio de Tiempo de f, en el intervalo [0, T], tomado a lo largo de la trayectoria que pasa por P.

La cantidad $\lim_{T \to \infty} \int_0^T f(P,t)\,dt = \bar{f}(P)$, se llama Promedio de Tiempo de f, a lo largo de la trayectoria que pasa por P.

Se puede demostrar que la cantidad anterior no depende del punto que se elija para comenzar el "recorrido por la trayectoria".

Este primer teorema es un teorema de existencia, que no nos dice cómo calcular la cantidad límite. Los siguientes conceptos nos aclaran ese cómo.

PROMEDIOS DE FASE

La cantidad $\frac{1}{\mu(V)} \int_V f(p)\,dV$, es el promedio de la función f, calculado sobre el conjunto invariante V. Se llama Promedio de Fase de f sobre V.

INDESCOMPONIBILIDAD METRICA

Un conjunto V, que sea invariante bajo T, debe contener trayectorias completas.

Sea V es una parte invariante de Ω, de volumen generalizado finito. Decimos que V es métricamente indescomponible, si no existen dos conjuntos V_1 y V_2, disyuntos y ambos con medidas positivas, tales que, $V = V_1 \cup V_2$.

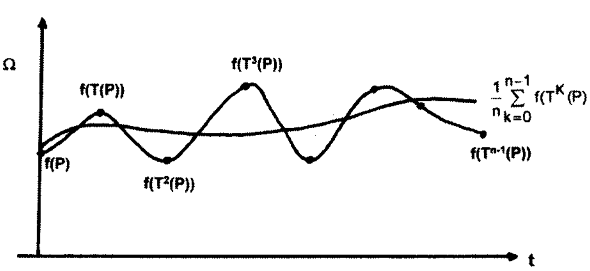
IGUALDAD DE LOS DOS PROMEDIOS

Si V es invariante bajo T y métricamente indescomponible, entonces puede demostrarse que casi en todas partes sobre V, $\bar{f}(P) = \frac{1}{\mu(V)} \int_V f(p)\,dV$.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

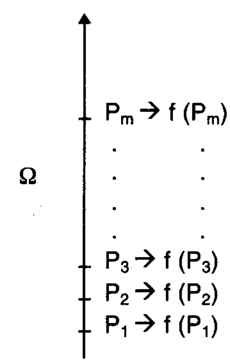
Sobre un conjunto V de Ω, invariante bajo T, métricamente indescomponible y de volumen generalizado finito, el promedio de tiempo de toda función integrable, f, es igual al promedio de fase de f, casi en todas partes.

FIGURA 4



PROMEDIO DE TIEMPO

FIGURA 5



CÁLCULO DEL PROMEDIO DE FASE

FUNCIONES ERGÓDICAS

Una función de fase f, integrable, es **ergódica,** si sus promedios de fase y de tiempo son iguales, para casi todas las trayectorias.

IMPOSIBILIDAD PRÁCTICA DE LA DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS PROMEDIOS DE TIEMPO

Continuemos comentando las dificultades inherentes a la medición y el cálculo.

Supongamos, por un momento, que es posible medir las coordenadas generalizadas del sistema. Entonces tendríamos que invertir mucho tiempo en esa medición, y mucho más tiempo que ese en la medición del observable. Si P es el punto asociado al estado inicial del sistema, la estimación del promedio de tiempo requeriría de la medición de P, T(P),. . ., $T^{n-1}(P)$. Pero la determinación exacta de estas medidas es experimentalmente inalcanzable. Además, esto necesitaría de la determinación de la trayectoria del sistema, y este último requerimiento necesitaría de la integración de las 2n ecuaciones diferenciales que constituyen el conjunto de las Ecuaciones Canónicas del Sistema.

Todo esto implica la imposibilidad práctica de determinar la trayectoria, en el espacio de fase para un sistema dado. Sinembargo, si el sistema es un sistema aislado, su energía mecánica total, H será constante y todas las trayectorias posibles estarán sobre una superficie de energía constante dada.

Si la superficie es métricamente indescomponible, el valor del promedio de tiempo de un observable es igual al promedio de fase y en este caso el promedio de fase se considera como la interpretación teórica de una cierta cantidad física.

EL PROBLEMA ERGÓDICO

El problema de investigar exhaustivamente bajo qué condiciones, y en qué grado se pueden substituir los promedios de tiempo con los promedios de fase se llama, genéricamente, ***Problema Ergódico.*** La hipótesis de la igualdad de los dos promedios se llama ***Hipótesis Ergódica.***

Una primera versión de la Hipótesis Ergódica fue establecida por Boltzmann, quien conjeturó que cada superficie de energía constante está formada por una única trayectoria. Es decir, la superficie de energía constante es llenada por la curva.

A esta propiedad se le llama, hoy en día, ***Ergodicidad en el Sentido de Boltzmann.*** Esto es equivalente a conjeturar que, no importando el estado actual del sistema en un instante dado, éste pasará por todos los estados posibles asociados con el mismo valor de su energía total.

Sinembargo, una trayectoria en el Espacio de Fase es una curva (conjunto unidimensional), continua que no se corta a si misma. Dado que es imposible una correspondencia uno-a-uno, continua, de un espacio n-dimensional, n ≥ 2, con el espacio unidimensional, entonces, tal hipótesis es insostenible. es decir, la ergodicidad en el sentido de Boltzmann no puede cumplirse.

Una primera versión de la Hipótesis Ergódica fue establecida por Boltzmann, quien conjeturó que cada superficie de energía constante está formada por una única trayectoria. Es decir, la superficie de energía constante es llenada por la curva.

HIPÓTESIS CUASI-ERGÓDICA

Después del descubrimiento de este fallo, se hicieron intentos por reemplazar la Hipótesis Ergódica por una ***'hipótesis cuasi-ergódica'.*** En ella se conceptúa que cada trayectoria, aunque no llena completamente la superficie de energía constante sobre la cual está situada, es un conjunto ***'denso en todas partes',*** es decir, intersecta cada elemento de la superficie.

Sinembargo, con base en esta hipótesis nadie logró probar la igualdad de los dos promedios. Se sabe que muchas pruebas aparentes de la Hipótesis Ergódica contenían graves errores.

El TEOREMA DE VON NEWMANN

La primera demostración, verdadera, del Teorema Ergódico se debe a J. Von Newmann. Este probó una versión débil del teorema dentro del marco de la Mecánica Cuántica. Damos un enunciado más actualizado del Teorema de Von Newmann:

Si f es una función tal que:

$\int_V |f|^2 dV < \infty$ y si $\|g\| = \sqrt{\int |g|^2 dV}$, entonces existe una función f* tal que:

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t f(p,t)\, dt - f^*(p) \right\| = 0.$$

En el lenguaje del Análisis Matemático se dice que f ***converge en media*** a f*.

Estimulado por el éxito de Von Newmann, Birkhoff trabajó y demostró su teorema.

LA SOLUCIÓN PROBABILÍSTICA A LAS DIFICULTADES DE LOS SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

Para resolver la dificultades de estos sistemas, se puede considerar otro enfoque.

Consideremos un sistema con energía constante a y sea $P = (X_1, X_2, \ldots, X_2n)$ su punto representativo en el espacio de fase.

Consideremos la superficie de energia constante sobre la cual se mueve P, $X = \Sigma_a$, subconjunto de $\mathbf{R}^{2n}$. Sea A la σ-álgebra de los subconjuntos medibles de X, definamos en X una medida de probabilidad, P. Previamente, se define:

$$\Omega(a) = \int_{\Sigma a} \frac{d\Sigma}{\text{Grad}(E)}.$$

Ahora, si $M \in A$, definimos:

$$P(M) = \frac{1}{\Omega(a)} \int_M \frac{d\Sigma}{\text{Grad}(E)}.$$

Fácilmente se puede verificar que P es realmente una medida de probabilidad y por lo tanto (X, A, P) es un espacio de probabilidad.

Entonces, en vez de una posición inicial para el punto P, tenemos una *variable aleatoria* (realmente un vector aleatorio), y en vez de considerar una trayectoria, a través del tiempo (concepto determinístico), consideramos el *proceso estocástico* $\{W_t\}$, donde W_t es la variable aleatoria asociada a la posición el el tiempo t.

Además, se postula la validez de la Hipótesis Ergódica.

LA TEORIA ERGÓDICA

Desde el punto de vista físico, la Hipótesis Ergódica se justifica por su éxito en la práctica, sobre todo en la descripción de sistemas dinámicos aislados.

Desde el punto de vista de las matemáticas, no basta el éxito práctico para justificar un enunciado. Se deben formular correctamente los elementos que intervienen en los procesos, formular algunos principios, explicar y deducir los fenómenos observados a partir de los principios asumidos.

Los esfuerzos de los matemáticos por justificar la Hipótesis Ergódica dieron origen a la Teoría Ergódica.

Los primeros intentos en esta dirección mostraron la necesidad de imponer hipótesis adicionales.

BOSQUEJO HISTÓRICO

El ***'Período Clásico'*** del desarrollo de esta teoría comprende el lapso entre 1930 y 1944. Durante éste se estudian las funciones biyectivas de un espacio de medida $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preservan la medida. Los primeros resultados fundamentales son los teoremas de Von Newmann y de Birkhoff.

Kintchine prescinde de algunas hipótesis adicionales (pero innecesarias) asumidas por Birkhoff y simplifica la demostración del teorema de éste (1933). Hopf amplía la teoría a los cocientes de sucesiones a forma $\left\{\frac{\sum_k x_k}{\sum_k y_k}\right\}$ de variables aleatorias e investiga de manera sistemática las propiedades ergódicas (1937). Yoshida y Kakutani amplían el teorema de von Newmann a transformaciones sobre espacios de Banach y lo aplican a las cadenas de Markov (1941).

El *'Período Moderno'* del desarrollo de la teoría comprende el lapso entre 1944 y 1947. Este período se caracteriza por el debilitamiento de las hipótesis del planteaminento ergódico original:

Hurewicz (1944) y Halmos (1944-1946) parten de la noción de funciones de conjunto (las variables aleatorias son un caso particular de estas funciones). Dunford y Miller (1946) abandonan la propiedad de conservación de la medida y obtienen las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en primera media.

Los esfuerzos de los matemáticos por justificar la Hipótesis Ergódica dieron origen a la Teoría Ergódica.

Riesz (1947) da demostraciones más sencillas del Teorema de Birkhoff y de las condiciones suficientes del teorema de Dunford-Miller, además abandona la hipótesis de la biyectividad de las transformaciones.

El *'Período Contemporáneo'* del desarrollo de la teoría comienza en 1948 con la introducción de la noción de Entropía que hace Kolmogorov.

Doob (1948) aplica el Teorema de Birkhoff a las cadenas de Markov estacionarias. Hartmann, Marczewski y Ryll-Nardewski (1951-1952) aplican los métodos desarrollados por Dowker (1947) y obtienen condiciones necesarias y suficientes para la convergencia casi segura en L_1.

Comienzan a aparecer aplicaciones de la teoría a otras ramas del conocimiento (p.ej. a la Teoría de la Información).

Desde entonces se han conocido contribuciones de numerosos autores: Sinai (1964), Anosov (1967), Bowen (1970-1975), Ornstein (1970-1973), Bunimovitch (1974), Resin (1977) y Brin y Katok (1981-1983), entre otros.

EXTENSIONES DEL CONCEPTO ORIGINAL

El concepto 'ERGÓDICO' se aplicó a otros sistemas, aparentemente no relacionados con los sistemas que dieron origen a la Hipótesis Ergódica.

Por ejemplo, se pueden considerar trayectorias de luz dentro de un polígono regular (o de otros conjuntos del plano más generales), que se reflejan en sus lados, siguiendo las leyes geométricas de la reflexión: *Billares Generalizados.* Se define entonces una *ergodicidad topológica,* relacionada con el comportamiento de las trayectorias, dado un punto inicial donde se originan.

En los procesos estocásticos Markovianos se define el concepto 'ERGODICO' referente a los estados, según el tipo de recurrencia que presenten.

Una dirección de los trabajos actuales consiste en el estudio de la ergodicidad y propiedades afines de los llamados *Sistemas Dinámicos Abstractos.* Un Sistema Dinámico Abstracto consta de un espacio de probabilidad, junto con una transformación medible, del espacio en sí mismo, que preserva la medida.

Hoy en día el estudio de la Teoría Ergódica requiere una buena preparación en Análisis Matemático, Teoría de la Medida, Teoría de la Probabilidad, Topología, Procesos Estocásticos y Variedades Diferenciables.

DE VUELTA AL PROBLEMA ORIGINAL

Aunque desde la aparición del Teorema de Birkhoff, se consideraba resuelto en parte el problema ergódico, ésto era sólo desde el punto de vista matemático. No se había probado la ergodicidad de las funciones que aparecen en la Mecánica Estadística. No se conocían sistemas ergódicos reales.

Realmente, las pruebas que nos acercan al problema original son relativamente recientes.

En 1965, Sinai demuestra que cierto tipo de gas constituido por esferas duras (impenetrables) es un sistema ergódico. En 1974 Bunimovitch demuestra propiedades ergódicas en ciertos billares generalizados.

El Principio de Igual Probabilidad, es decir el postulado de que la probabilidad de que un sistema esté en un cierto nivel de energía, es igual para todos los niveles, y la Hipótesis Ergódica son los dos principios básicos de la Mecánica Estadística.

Aunque la Teoría Ergódica resolvió el Problema Ergódico, desde el punto de vista matemático, desde el punto de vista físico, está aún sin resolver.

No podría hablarse de coherencia entre las descripciones macroscópica y microscópica de la materia mientras la M.E. no esté sólida y rigurosamente fundamentada. Por lo tanto, la solución completa del problema ergódico es esencial para lograr una imagen unificada del comportamiento de la materia.

Hoy en día el estudio de la Teoría Ergódica requiere una buena preparación en Análisis Matemático, Teoría de la Medida, Teoría de la Probabilidad, Topología, Procesos Estocásticos y Variedades Diferenciables.

REFERENCIAS

Ash, Robert B. Information Theory. New York: The Macmillan Company,1963.

Cárcamo, Ulises. Ergodicidad y Sistemas Dinámicos Abstractos y Simbólicos. Medellín, 1996. Tesis Máster en Matemáticas Aplicadas. Universidad Eafit. Escuela de Ingeniería.

Guiasu, Silviu. Information Theory With Aplications. New York: McGraw Hill,1975.

Khinchin, A.I. Mathematical Foundations of Information Theory. New York: Dover Publications Inc, 1957.

Khinchin, A.I. Mathematical Foundations of Statistical Mechanics. New York: Dover Publications Inc, 1949.

Lamperti, John. Stochastic Processes. New York. Springer Verlag. 1977.

Loeve, Michel. Probability Theory. New York: Van-Nostrand Reinhold Co. York: 1963.

Mañe, Ricardo. Ergodic Theory and Differentiable Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1987.

Prohorov, Yu.V, Rozanov, Yu. A. Probability Theory. New York: Springer-Verlag, 1969.

Rosemblat, M. Random Processes. New York. Springer Verlag.1974.

Royden, H.L. Real Analysis. New York. The Macmillan Company, 1968.

Rudin, Walter. Análisis Real y Complejo. México D.F: MacGraw-Hill, 1986.

Toda M., Kubo R. Statistical Physics I.Berlin: Springer-Verlag, 1978.

Recuadro 1
ÁLGEBRAS, -ÁLGEBRAS DE CONJUNTOS Y ESPACIOS MEDIBLES

Una clase de conjuntos (es una ***Álgebra de Conjuntos,*** si satisface:

1. Si A y B están en $\mathcal{A}$, entonces $A \cup B$ está en $\mathcal{A}$.
2. Si C es un elemento de $\mathcal{A}$, entonces C' es otro elemento de $\mathcal{A}$.

   Una álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$, es una ***σ-álgebra de Conjuntos,*** si cumple:

3. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una sucesión de conjuntos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} Ak$ es un conjunto de $\mathcal{A}$.

   Si X es un conjunto, y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X, al par (X, $\mathcal{A}$) se le llama ***Espacio Medible.***

Recuadro 2
MEDIDAS Y ESPACIOS DE MEDIDA

Consideremos un espacio medible (X, $\mathcal{A}$). Una función μ, definida en $\mathcal{A}$, y con sus valores en el conjunto ampliado de los reales $R \cup \{-\infty, \infty\}$, es una ***medida*** (no negativa), si satisface:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos disyuntos dos a dos, entonces,

   $$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Ak\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Ak) \quad \text{(Aditividad enumerable).}$$

   Si (X, $\mathcal{A}$) es un espacio medible y μ es una medida, definida sobre $\mathcal{A}$, a la terna (X, $\mathcal{A}$, μ) se le llama ***Espacio de Medida.***

   Una medida μ, tal que $\mu(X) = 1$ se llama ***Medida de Probabilidad.***

   Si μ es una medida de probabilidad, el espacio (X, $\mathcal{A}$, μ) se llama Espacio de Probabilidad.

Recuadro 3
TOPOLOGÍAS, ESPACIOS TOPOLÓGICOS Y FUNCIONES MEDIBLES

Sean Y un conjunto y τ una clase de subconjuntos de Y. τ es una Topología, si satisface:

1. Y, y $\varnothing$ están en τ.
2. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos en τ, entonces $\bigcap_{k=1}^{n} Ak$ está en τ.
3. Si $\{A_\alpha\}$ es una clase arbitraria de conjuntos de τ, entonces, $\bigcup_\alpha A\alpha$ está en τ.

   Los elementos de una topología se llaman ***conjuntos abiertos.***

Si τ es una topología de subconjuntos de Y, el par (Y, τ) se llama ***Espacio Topológico.***

Sean (X,A) un espacio medible y (Y,τ) un espacio topológico. Una función f: $X \rightarrow Y$ es una ***función medible,*** si para todo conjunto abierto B se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto medible.

Recuadro 4
FUNCIONES CARACTERÍSTICAS Y FUNCIONES SIMPLES

Sea (x, A) un espacio medible y sea $E \subseteq X$. La ***Función Característica*** de E, χ_E, es la función definida en X por medio de:

$$\chi_E = \{ 1 \text{ si } x \in E, \quad 0 \text{ si } x \notin E.$$

Sea (X, A, μ) un espacio de medida. Una función $f : X \rightarrow [0, \infty)$, tal que, su recorrido consta de un número finito de valores se llama ***función simple.***

Toda función simple se puede expresar como una combinación lineal de funciones características:

Si S es una función simple, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son los valores que toma S y $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son los subconjuntos de X que son transformados por f en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, respectivamente, entonces, $S = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i E_i$.

La importancia de las funciones simples en el Análisis Matemático radica en la siguiente propiedad:

Toda función medible, no negativa, definida en X, se puede expresar como el límite de una sucesión no decreciente de funciones simples, medibles no negativas.

Recuadro 5
INTEGRALES ABSTRACTAS DE LEBESGUE Y FUNCIONES INTEGRABLES

1. Integral de una Función Simple

Sea $S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E_k$ una función simple definida en X. Si E es un conjunto medible, definimos la Integral Abstracta de Lebesgue de S sobre E, como $\int_E S d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E_k$.

2. Integral de una función medible, no negativa

Sea f una función medible, no negativa, definida en X, entonces, existe por lo menos una sucesión de funciones simples, medibles y no negativas, que converge a f.

La Integral de Lebesgue de f es el supremo del conjunto $\{\int_E \varphi d\mu\}$, donde φ pertenece al conjunto de todas las funciones simples tales que $0 < \varphi < f$.

3. Integral de una función medible arbitraria. Funciones Integrables

Sea $F : X [-\infty, \infty]$ una función medible definida en X. Definimos la parte positiva de F, F^+ como $F^+ = \text{Max}\{F(x), 0\}$, $x \in X$, y la parte negativa de F, F^-, como $F^- = -\text{Min}\{F(x),0\}$, $x \in X$.

La Integral de Lebesgue de F sobre E se define como: $\int_E F d\mu = \int_E F^+ d\mu - \int_E F^- d\mu$, si al menos, una de las integrales del lado derecho es finita.

$F : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, es ***integrable sobre E,*** respecto a la medida μ si $\int_E F d\mu < \infty$.

$L_p(X, A, \mu)$ es el espacio de todas las funciones $F : X [-\infty, \infty]$ tales que, $\int_X |F|^P d\mu < \infty$.