MODELO MATEMÁTICO DEL JUEGO "BUNGEE"

IVÁN DARÍO ARANGO

En días recientes han comenzado a instalarse en los sitios de recreación del país, un juego para audaces. Este consiste en lanzarse desde una plataforma de más de 50 mts de altura al vacío. Para no golpear el piso los saltadores se atan a los tobillos una cuerda elástica, la cual se asegura a la plataforma en el lado opuesto.

El artículo utiliza el método de modelación de sistemas para analizar la dinámica del juego bungee y crear un modelo matemático que permita realizar saltos simulados variando los parámetros, analizar los resultados para aportar conocimiento sobre el tema en el medio. Presenta también un ejemplo práctico donde se llega a una respuesta deseada al manipular los parámetros de diseño del juego.

Para lograr el objetivo se recurre a los principios físicos que rigen el movimiento de los cuerpos en caída libre y desacelerada.

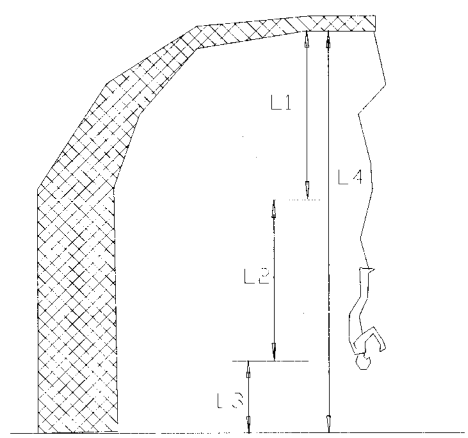
Para ello se definen:

L_1 longitud de la cuerda elástica.
L_2 elongación máxima de la cuerda elástica.
L_3 margen de seguridad.
L_4 distancia de la plataforma al piso.

En general el movimiento puede dividirse en dos partes: la primera es donde el saltador no es afectado por la acción de la cuerda. Esta situación se presenta en el lanzamiento inicial y en los rebotes que alcancen una altura en la que la cuerda elástica quede destensionada. La segunda parte es donde el saltador es afectado por la acción de la cuerda elástica. Esta situación se presenta para posiciones por debajo de **L_1**.

Primera parte: desde el lanzamiento hasta que la cuerda comienza a tensionarse; el deportista desciende en caída libre.

FIGURA 1
PARÁMETROS INICIALES DEL JUEGO

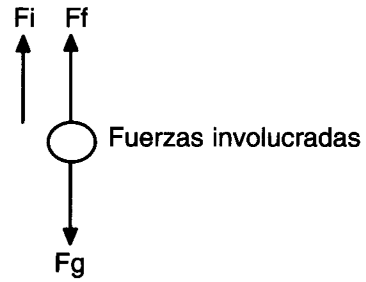


IVÁN DARÍO ARANGO. Ingeniero Mecánico de la U.P.B. Profesor Universidad EAFIT. Departamento de Ingeniería Mecánica. Estudiante de Maestría en Gestión Tecnológica.

La fuerza de la gravedad (Fg) es la principal fuerza, pero existen otras fuerzas involucradas:

1. La fuerza de fricción (Ff) entre el cuerpo del saltador y el aire. Esta fuerza se desprecia debido a que no es representativa sino a altas velocidades.

2. La fuerza de inercia (F_i).



Sea L_1 (t) la distancia vertical desde la plataforma donde se lanza el saltador hasta el punto donde se encuentra la parte inferior de su cuerpo en cualquier momento.

$$F_i = \frac{md^2L^1}{dt^2} \qquad (1)$$

$$Fg = mg \qquad (2)$$

$$F_f = \frac{[dL_1]^2}{[4t]^2} \qquad (3)$$

$\frac{d^2L_1}{dt^2}$ =aceleración del saltador en m/sec²

$\frac{dL_1}{dt}$ = velocidad del saltador en m/sec

m = masa del saltador
g = gravedad terrestre = 9.8 m/sec^2
Q = constante de fricción entre el aire y el saltador
t = tiempo en sec

La suma de todas las fuerzas da cero:

$$\sum F = 0 = mg - m\frac{d^2L_1}{dt^2} \qquad (4)$$

despejando e integrando:

$$\int_0^t g = \frac{\int d^2L_1}{dt^2}dt \qquad (5)$$

$$gt + v_0 = \frac{dL_1}{dt} \qquad (6)$$

V_0 es la velocidad inicial con que se lanza el saltador. En este caso él parte del reposo, luego $V_0 = 0$.

Esta ecuación también es valida para cuando en los rebotes el saltador venga desde abajo y cruce la línea que divide a L_1 y L_2. De ahí hacia arriba esta será la ecuación que describe la velocidad del movimiento. El valor de V_0 es el del instante anterior.

Se integra de nuevo:

$$\int\int_0^t g = \int\int \frac{d^2L_1}{dt^2}dt \qquad (7)$$

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + V_0t + L_0 = L_1 \qquad (8)$$

L_0 es la distancia inicial. En este caso $L_0 = 0$ porque se comenzó a medir desplazamiento desde la plataforma hacia abajo, luego $L_1 = ½\, gt^2$.

El tiempo que toma la cuerda para comenzar a tensionarse se obtiene cuando $L_1 = \mathbf{L_1}$; despejando t:

$$t_1 = \frac{(2\mathbf{L_1})^{1/2}}{(g)^{1/2}} \qquad (9)$$

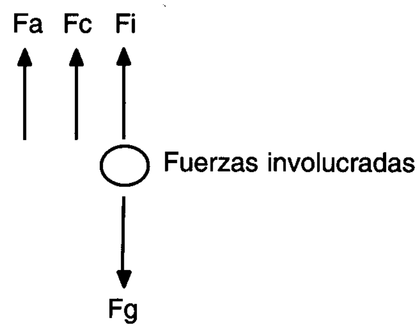
t_1 es el tiempo que tarda la cuerda en tensionarse a partir del momento en que el saltador se lanza desde la plataforma. La velocidad para este tiempo t_1 es:

$$\frac{dL_1}{dt} = (2\mathbf{L_1}g)^{1/2} \qquad (10)$$

Segunda parte: de aquí hacia adelante empieza a actuar una cuarta fuerza y es la de la cuerda elástica ($Fc = KL_2$) donde K es la constante elástica de la cuerda), y una quinta que es la fricción interna en la cuerda elástica Fa.

($Fa = B\, dL_2/dt$). Por analogía se puede afirmar que su acción es como la de un amortiguador en un sistema mecánico. Su efecto es disminuir con el tiempo la amplitud de la elongación de la cuerda. L_2 por efecto de la tensión en cualquier momento.

$$\sum F = 0 = Fg - Fi - Fc - Fa$$



$$\frac{md^2L_2}{dt^2} + \frac{BdL_2}{dt} + KL_2 = mg \quad (11)$$

dividiendo por m: $\frac{d^2L_2}{dt^2} + \frac{BdL_2}{mdt} + \frac{KL_2}{m} + g$ (12)

Utilizando la transformada de Laplace para resolver esta ecuación:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2L_2}{dt^2}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{BdL_2}{mdt}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{KL_2}{m}\right] = L[g] \quad (13)$$

$$s^2L_2(s) - sL_2(0) - \frac{dL_2}{dt}(0) + \frac{BsL_2(s)}{m} - \frac{BL_2(0)}{m} + \frac{KL_2(s)}{m} = g/s \quad (14)$$

$L_2(0)$ es la distancia inicial del segundo movimiento. Se hace igual a cero y se comienza a graficar desde la línea límite $L_1 - L_2$

$$\frac{dL^2}{dt}(0) = [2L_1g]^{1/2} \quad (15)$$

Es la velocidad inicial en el segundo movimiento e igual al resultado del anterior movimiento.

NOTA:

De aquí en adelante L_1 = $\mathbf{L_1}$ = longitud de la cuerda. Reemplazando (15) en (14) y despejando $L_2(s)$

$$L_2(s) = \frac{g/s}{\left[s^2 + B/m\, s + K/m\right]} + \frac{[2L_1g]^{1/2}}{\left[s^2 + B/m\, s + K/m\right]} \quad (16)$$

Reorganizando para poder utilizar transformada inversa en Laplace:

$$L_2(s) = \frac{gm/K\left\{1+s\left[(2L_1g)^{1/2}/g\right]\right\}}{s\left[s^2/(K/m)+(B/K)s+1\right]} \quad (17)$$

Hágase: w = $(K/m)^{1/2}$ (17a), 2@/w = B/K (17b), h = $[(2L_1g)^{1/2}/g]$ (17c) y aplíquese transformada inversa de Laplace.

L_2 (t) = gm/K [1 - A E sen (D t + F)], (18) donde:

A = [1/ (1 - $@^2$)][1 - 2h @ w + h^2 w^2 $]^{1/2}$ (19)

E = $e^{(-@w)t}$ (20)

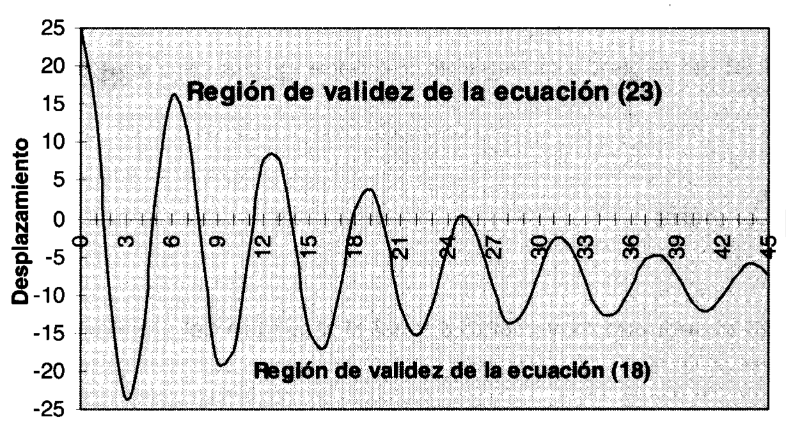
D = [w (1 - $@^2$)] (21)

F = $\tan^{-1}$ { [h w (1-$@^2$ $)^{1/2}$] / [1 - h @ w] } - $\tan^{-1}$ { [1 - $@^2$] / [-@] } (22)

Esta ecuación (18) relaciona la distancia L_2 del segundo movimiento en función del tiempo. De ella se puede averiguar la posición del saltador y graficarla en cualquier momento después de cruzar la línea **L_1 - L_2.** También se obtiene la máxima elongación **L_2** la cual es de interés para averiguar cual es el máximo recorrido y asegurarse de que el saltador no golpea el piso.

Para la simulación y solución de ecuaciones diferenciales, y, para la graficación de las ecuaciones algebraicas de la solución se utiliza normalmente ayudas computacionales tales como el software Matlab, Excel o similares. En este caso por razones académicas se desea mostrar el método paso a paso y por tanto no se utilizan.

CURVA DE POSIBLE RESPUESTA



Al derivar la ecuación (18) se obtiene la ecuación de velocidad. Esta es útil cuando se va a graficar el movimiento y se ha presentado la situación que el rebote supera en su ascenso la línea limite **L_1 - L_2.** De esa línea hacia arriba la ecuación válida es L_1 = ½ g t^2 + v_0 t (23), donde v_0 es la velocidad del saltador al pasar por la línea límite **L_1 - L_2**

$$\frac{dL_2(t)}{dt} = gmA/K\,[DE\cos(Dt+F) - @\,w\,E\,\mathrm{sen}(Dt+F)] \quad (24)$$

La velocidad es máxima se presenta en t=0, es decir cuando comienza la segunda parte del movimiento; la aceleración máxima se presenta en el punto donde L_2 es máximo.

En las articulaciones de los tobillos del saltador la tensión es igual a la tensión de la cuerda. A medida que se sube por el cuerpo del saltador la tensión disminuye en proporción al peso del cuerpo que queda por debajo de la articulación analizada con respecto al peso total.

$$Tc = KL_2, \text{ luego } Tc = K \text{ (ecuación 18)} \quad (25)$$

La tensión máxima que a la que se someten en el salto las articulaciones de los huesos del saltador se puede expresar en términos de su peso. Por ejemplo si en un salto a una persona de 70 kilogramos de peso se le midió una tensión en la cuerda de 280 kilogramos, se puede decir que fue sometida a una tensión en los pies de 4mg. Genéricamente se puede expresar como: Tcmax=nmg (26).

Donde n es el número de veces que fue tensionada una persona en relación a su propio peso.

El valor de n máximo para un individuo debe ser sacado de estudios médicos. Probablemente el valor de n depende de variables tales como: edad, raza, sexo, estado de salud ósea y sistemas corporales complementarios, estado de obesidad o delgadez y otros. Los ortopedistas y la medicina que estudia el hombre en el espacio se han ocupado de los límites del cuerpo humano sometido a grandes fuerzas de tensión y gravedad.

Reemplazando (26) en (25), se obtiene:

$$K = \frac{nmg}{L_2 \max} \quad (27)$$

Esta ecuación relaciona los parámetros de diseño $\mathbf{L_2}$, K y n con el parámetro de funcionamiento m. El siguiente paso es encontrar una relación entre $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ para poder hallar la longitud total L_4. El método a utilizar es el de la energía, el cual dice, que toda la energía potencial del saltador se convierte en energía elástica de la cuerda en el punto más cercano al piso después de saltar, (se desprecia la fuerza no conservativa de la fricción interna en la cuerda. Esta simplificación causa que el $\mathbf{L_1}$ calculado por este método sea un poco mayor que el real de la ecuación (18). Por seguridad se hacen los cálculos con el mayor L_2 y se verifica con el real).

Sea P_1: energía en la plataforma
P_2: energía con la cuerda tensionada al máximo.

$$E_1 = mgh_1 \text{ y } E_2 = mgh_2 + \tfrac{1}{2}KL_2^2$$

$$E_1 = E_2$$

$$mgh_1 = mgh_2 + \tfrac{1}{2}KL_2^2$$

$$\frac{L_1 + L_2}{L_2^2} = \frac{K}{2mg} \quad (28)$$

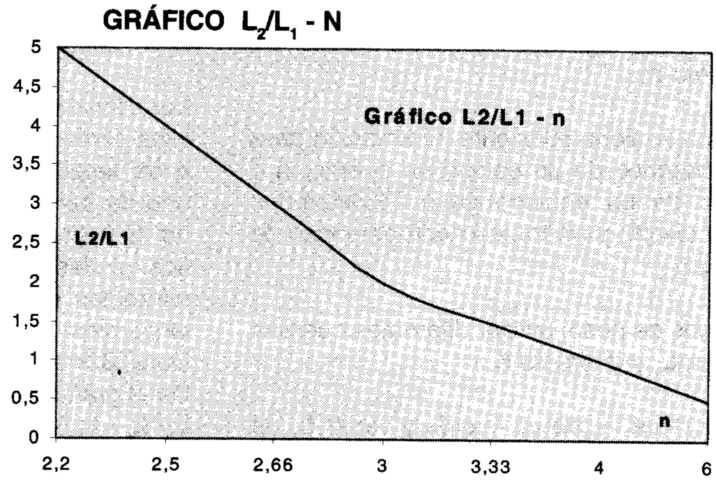
Al relacionar (27) y (28) se encuentra una fórmula muy útil:

$$\frac{L_1 + L_2}{L_2} = \frac{n}{2} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{2}{n-2} \quad (29)$$

De la ecuación se puede sacar la gráfica de trabajo; ésta resulta de la tabulación de los valores $\mathbf{L_1}$ **y** $\mathbf{L_2}$, de acuerdo a la relación de estiramiento del cable.

n	L2/L1
2.2	5
2.5	4
2.66	3
3	2
3.33	1.5
4	1
6	0.5

GRÁFICO L_2/L_1 - N



Para concluir se deben hacer varias observaciones sobre cuerdas elásticas:

1. Son comerciales cuerdas con razones de estiramiento L_2/L_1 igual a 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4.

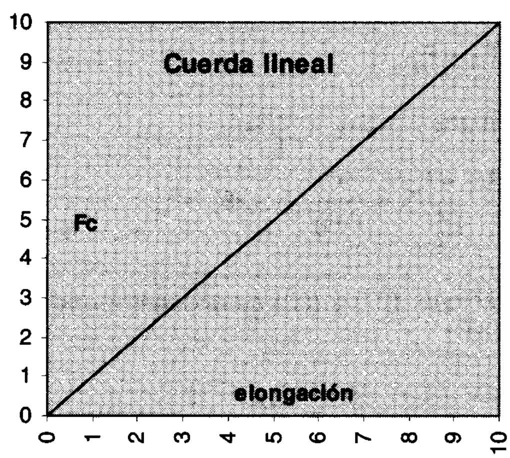
2. Las cuerdas elásticas pueden ser lineales o no lineales. En las lineales (que son las que se utilizan en este modelo) sino se excede la razón de estiramiento dada por el fabricante (L_2/L_1) se cumple que $F_C = KL_2$. En las no lineales o en las que se han excedido la razón de estiramiento, la ecuación de su comportamiento es similar a $F_C = K\,L_2^2$.

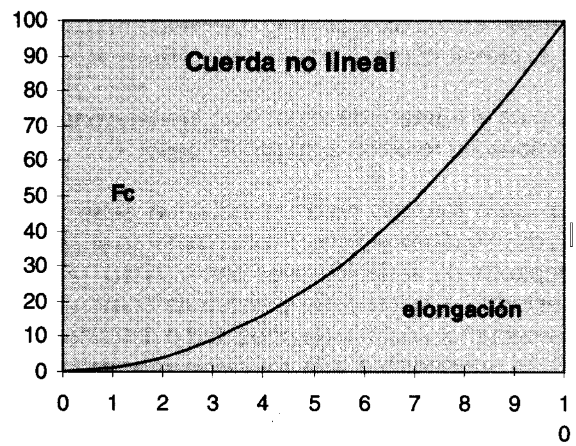
3. El valor de la constante de elasticidad está dado para una longitud dado L_1. Si se cambia esta longitud, K cambia; lo ideal es expresar K como función de $\underline{K}$ (constante por metro de cuerda) y L_1.

   Si se toma 1mt de cuerda y se carga con 1kg aumentando su longitud 0.2 mts su K sería 1/0.2 = 5, donde 0.2 mts es la diferencia entre la longitud final y la longitud inicial; de aquí se deduce que:

   $K = \underline{K}/L_1$ (30) donde L_1 no tiene unidades

CUERDA LINEAL Y CUERDA NO LINEAL





CONCLUSIÓN

El juego bungee tiene un modelo matemático y con este se relacionan los valores en el tiempo de las variables físicas $L_1(t)$, $L_2(t)$, $dL_1(t)/dt$, $dL_2(t)/dt$, $d^2L_1(t)/dt^2$, $d^2L_2(t)/dt^2$ con los parámetros de diseño del juego: L_1, L_2, L_3, L_4, K, B. y el parámetro de funcionamiento m.

En este punto se tiene suficiente información para realizar un chequeo de un equipo en operación o el prediseño de un equipo nuevo. Existen dos variantes de diseño para trabajar con personas de diferente peso:

a. Para rangos de peso, utilizar diferentes cuerdas con misma L_1 y diferente K.

b. Utilizar siempre la misma cuerda y variar L_1 de acuerdo a los rangos de peso.

En nuestro medio es mejor utilizar el segundo método.

EJEMPLO PRÁCTICO

Se desea diseñar un bungee con una altura total L_4 = 60 mts y un L_3 de protección de 10 mts.

Los clientes serán clasificados en pesos de 10 en 10 kilos partiendo de 40 kg a 100 kg máximo. El factor n de tensión máximo para un conjunto homogéneo de personas ha sido estipulado en no mayor de 4. Averiguar la constante K de la cuerda elástica y las diferentes longitudes L_1 para las diferentes escalas de pesos, además, graficar el lanzamiento de una persona de 70 kilogramos.
Dato B = 28
De la gráfica de trabajo se halla que con n=4.
L_2/L_1 =1. Si a la altura total L_4 = 60 mts se le resta el margen de seguridad L_3 y resulta:

$$60 - L_3 = L_1 + L_2 \quad \text{y como } L_2 = L_1 \quad \text{entonces}$$
$$L_2 = L_1 = 25 \text{ mts}$$

Reemplazando los datos en la ecuación (27), se halla K para el máximo peso;

$$K = 4 * 100 * 9.8/25 = 156.8 \text{ New/mts}$$

Ahora se averigua $\underline{K}$ por medio de la ecuación (30) que es valor que mayor importancia tiene para poder comprar la cuerda;

$$\underline{K} = 156.8 * 25 = 3920 \text{ New/mts}$$

Ahora se averigua la K correspondiente a cada peso entre 40 y 90 kg. Esto se realiza por medio de la ecuación (28) y con los siguientes datos:

$$L_2 = 50 - L_1$$

$$K = \overline{K}/L_1 \quad \text{y} \quad m = 100$$

$$\frac{L_1 + 50 - L_1}{(50 - L_1)^2} = \frac{3920 L_1}{2*100*9.8}$$

$$\frac{50 L_1}{50^2 - 100 L_1 + L_1^2} = \frac{3920}{200*9.8}$$

$$L_1^2 - 125 L_1 + 2500 = 0$$

$$L_1 = -(125)/2 \pm [(125^2 - 4*2500)/4]^{1/2}$$

$$L_1 = 25\text{mts}$$

De igual manera se procede para los demás pesos

PESO Kgf	m Kgs	L_1 mts	L_2 mts	L_2/L_1	n
100	100	25	25	1.00	4
90	90	25.87	24.13	0.93	
80	80	26.83	23.17	0.86	
70	70	27.9	22.1	0.79	
60	60	29.1	20.9	0.72	
50	50	30.48	19.52	0.64	
40	40	32.08	17.92	0.56	6

De los resultados se aprecia que a medida que m disminuye L_1 se debe aumentar, además que n crece hasta 6 en niños de 40 Kgs de peso. De los datos del problema ésto no es deseable.

La opción para no afectar los niños con n mayores de 4 es iniciar de nuevo el problema pero por el menor valor, lo que quiere decir, m = 40 en la ecuación (27) da K = 62.72 y $\underline{K}$ = 1568.

Con estos datos en la ecuación (30) se saca de nuevo la tabla.

PESO Kgf	m Kgs	L_1 mts	L_2 mts	L_2/L_1	n
40	40	25	25	1.00	4
50	50	23.12	26.88	1.16	
60	60	21.56	28.44	1.32	
70	70	20.24	29.76	1.47	
80	80	19.09	30.91	1.62	
90	90	18.09	31.91	1.76	
100	100	17.2	32.8	1.91	3

De la tabla anterior se aprecia que para los niños se cumple la condición de n< 4 y para los adultos es aún mas baja la tensión máxima.

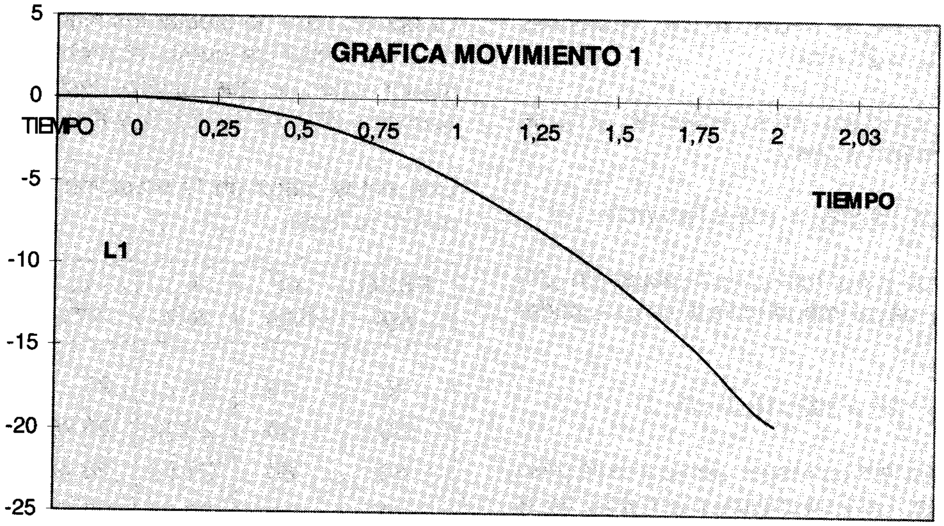
Una condición nueva es que se debe utilizar una cuerda con K = 1568, con relación de estiramiento $L_2/L_1 = 2$.

Por ultimo se gráfica $L_1(t)$ y $L_2(t)$ teniendo en cuenta los siguientes datos:

$$m = 70 \text{ y } B = 28,$$

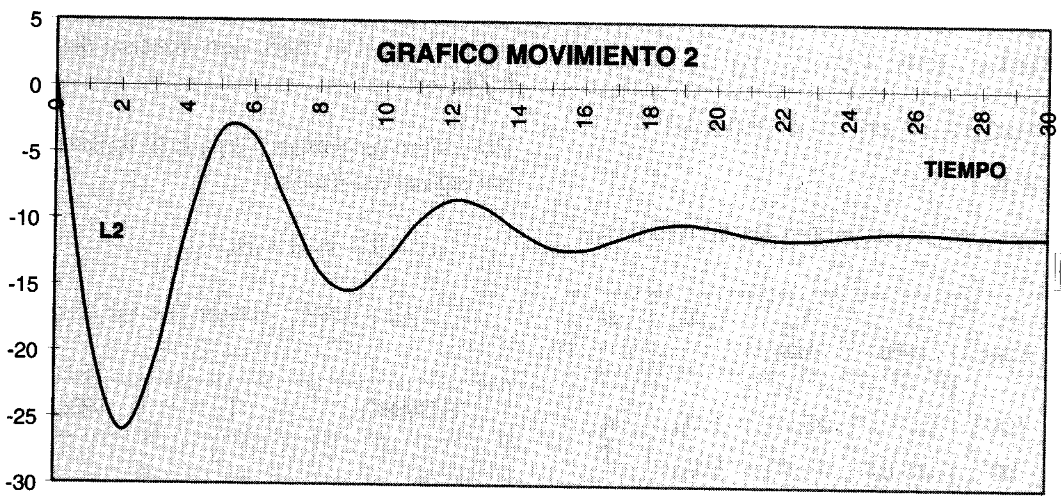
$$L_1(t) = 4.9t^2 \quad \text{donde } 0 < t < (2L_1/g)^{1/2}$$

TIEMPO	L_1	VELOCIDAD
0	0	0
0.25	-0.31	2.45
0.5	-1.23	4.9
0.75	-2.76	7.35
1	-4.9	9.8
1.25	-7.66	12.25
1.5	-11.03	14.7
1.75	-15.01	17.15
2	-19.6	19.6
2.03	-20.19	19.84



NOTA: De los 20.24 mts en adelante la ecuación que rige el movimiento es la (18). Con los datos se resuelven las ecuaciones (17a),(17b),(17c),(19),(20),(21),(22) y se reemplazan en la ecuación (18), luego se grafica ésta en función del tiempo.

$$L_2(t) = 10.93 - 21.86\,[\,e^{-0.1785\,t}\,][\,\mathrm{sen}\,(\,0.9296\,\mathbf{t} - 2.599\,)]$$



BIBLIOGRAFÍA

Auslander, David M, Takahashi Yasundo Y. Rabins Michael. "Introducción a Sistemas y Control". México: McGraw Hill, 1976.

Ogata, Katsuhito. "Ingeniería de Control Moderna". México: Prentice Hall Hispanoamericana. 1980.

Dorf, Richard C. "Sistemas Modernos de Control". México: Adison Wesley Iberoamericana. 1989.