APLICACIONES PRACTICAS DE LOS METODOS ESTADISTICOS PARA PRONOSTICOS EN SERIES DE TIEMPO

JAVIER I. SANCHEZ A.

INTRODUCCION

Mucha de la metodología estadística se refiere a modelos cuyas observaciones se supone que varían independientemente. En muchas de sus aplicaciones, la dependencia entre las observaciones se mira como un estorbo y en la planeación o diseño de experimentos, la aleatorización se trabaja para validar el análisis como si las observaciones fueran independientes. Lo más común es que la forma funcional f de la serie y sus coeficientes sean desconocidos y, por lo tanto, deban ser estimados a partir de datos históricos. Sin embargo, gran cantidad de datos económicos, empresariales, de ingeniería y de ciencias naturales ocurren en forma de series temporales donde las observaciones son dependientes y la naturaleza de su dependencia es de mucho interés. El conjunto de las técnicas disponibles para el análisis de tales series de observaciones dependientes se conoce como análisis de series cronológicas.

Una Serie Cronológica es una secuencia de valores de una variable, observados y ordenados en el tiempo. Generalmente los datos se trabajan en secuencia respecto al tiempo de su ocurrencia lo cual se conoce como Series de Tiempo, Series Temporales, o mejor aún, Series Cronológicas. Para su análisis se usan dos tipos de modelos: el de las series de tiempo y los casuales. El análisis de series de tiempo sólo usa el historial secuencial y ordenado de los datos observados de la serie de la variable que se va a pronosticar, para desarrollar un modelo para predecir valores futuros. Los modelos casuales se refieren a la relación entre la serie de tiempo de interés y una o más series de tiempo diferentes. Si estas otras variables están correlacionadas con la variable de interés y si parece que hubiera alguna causa de esta correlación, se puede construir un modelo estadístico que la describa.

> Lo más común es que la forma funcional f de la serie y sus coeficientes sean desconocidos y, por lo tanto, deban ser estimados a partir de datos históricos.

El análisis espectral, en el dominio de las frecuencias es una de las técnicas de este tema, aunque no se profundizará en él. Otra clase de análisis, el periodograma, se basa en la hipótesis de que una serie

JAVIER I. SANCHEZ A. Economista, U. de A. MBA Syracuse University. Experto en Control Calidad Suecia. Profesor Universitario.

temporal está constituída por ondas seno y coseno con diferentes frecuencias. El periodograma es el sistema que usa esta idea y puede detectar la amplitud del componente seno de una frecuencia conocida, sepultada en un ruido. Su uso comprueba que la posibilidad de componentes periódicos de frecuencia desconocida, pueden permanecer en la serie. Aquí sólo se estudiará la construcción de modelos estocásticos (estadísticos) para series de tiempo discretas bajo el dominio del tiempo y la aplicación de tales modelos en casos prácticos.

El estudio de tales modelos es importante porque conduce a:

1. Conocer algo sobre la naturaleza del sistema que genera la serie;

2. Pueden ser usados para obtener pronósticos óptimos de valores futuros de la serie;

3. Cuando se estudian dos o más series relacionadas, se pueden extender los modelos para representar relaciones dinámicas entre las series y estimar funciones de transferencia;

4. Pueden ser usados para derivar políticas de control óptimas que muestren cómo puede manejarse una variable bajo control, para minimizar perturbaciones en algunas variables dependientes.

> Una Serie Cronológica es una secuencia de valores de una variable, observados y ordenados en el tiempo.

El control se justifica porque en los procesos existen perturbaciones inherentes; cuando éstas se pueden medir, es posible hacer cambios compensatorios apropiados en alguna otra variable. Esto es lo que se conoce como el control de alimentación progresiva. Alternativamente, se puede usar la desviación del objetivo o "señal de error" de la característica resultante para calcular los cambios compensatorios apropiados; esto es lo que se llama retroalimentación.

Contrario al control de alimentación progresiva, ese método correctivo es empleado aún cuando la fuente de las perturbaciones no se conoce con precisión o no se ha medido su magnitud. Para mantener el equilibrio, es deseable efectuar una mezcla de ambos procedimientos: el control de alimentación progresiva se puede usar para compensar las perturbaciones medibles y el control de alimentación regresiva para las que no pueden medirse.

En la práctica, se desconoce generalmente la naturaleza precisa de los modelos de función estocástica y de transferencia apropiados para una situación dada que son necesarios para diseñar un esquema de control óptimo. De igual manera se desconocen los valores numéricos de los parámetros. Por lo tanto, en la construcción de modelos, se debe proceder iterativamente.

En este estudio es muy importante que se sepa pronosticar, entender las relaciones dinámicas entre variables y su control. Por ejemplo, se necesitan pronósticos óptimos de ventas para planear las actividades de la empresa, se necesitan los modelos de la función de transferencia para mejorar el diseño y el control del sistema de producción y las políticas óptimas de control para regular las variables del proceso, bien sea manualmente o con la ayuda de sistemas en red.

Muchos factores influyen en el nivel de detalle usado: disponibilidad de datos, precisión obtenible, costo del análisis y preferencias administrativas. Cuando la elección de las variables no sea muy clara, se deben ensayar otras alternativas y seleccionar la mejor. Esto se hace típicamente a través de la simulación usando los datos históricos.

Aquí, sólo se indicarán someramente los métodos para construir, identificar, ajustar y verificar los modelos de las series temporales y sistemas dinámicos. Los métodos serán apropiados para sistemas discretos de datos donde las observaciones y la oportunidad de controlar ocurren a intervalos iguales de tiempo.

Todo esto se llevará a cabo a través de las siguientes áreas de aplicación: 1. El pronóstico de valores futuros de la serie por medio de datos actuales y pasados. 2. La determinación de la función de transferencia de un sistema la determinación de un modelo dinámico insumo-resultado que pueda mostrar el efecto en un sistema sujeto a la inercia de unos insumos. 3. Un diseño de control de alimentación progresiva y regresiva, tal que las desviaciones potenciales de los resultados del sistema con relación a un objetivo deseado, pueda ser compensado de la mejor manera posible.

La obtención de buenos pronósticos se ha convertido en elemento clave a través de la historia. Aún hoy día, a los adivinos y pitonisas se les da credibilidad a sus afirmaciones aunque sus predicciones resulten exageradas o falsas. Afortunadamente para su supervivencia, algunas veces sus predicciones resultan verdaderas.

Todos hacemos pronósticos, aunque no se adviertan como tales. Por ejemplo, la esperanza de lluvia después de un verano fuerte y prolongado, o la creencia de que el aumento en los precios para este año no será tan alto como el año pasado, dadas las nuevas medidas económicas del gobierno. Así se forman las expectativas y se hacen los pronósticos.

De la misma manera procede el gerente del banco para predecir el flujo de caja para el próximo bimestre, o un ejecutivo de planeación al ajustar ciertas variables insumo para calcular el valor futuro de la variable resultado tan aproximada como sea posible a un objetivo especificado, o un gerente que quiere pronosticar las ventas o estimar las horas hombre requeridas para hacer un programa de producción. Todos deseamos tener idea del comportamiento del futuro, tener patrones de los pronósticos estrechamente relacionados sobre ocurrencias previas suponiendo que los eventos futuros serán similares al pasado.

Puesto que el futuro es incierto, los pronósticos no serán perfectos. El objetivo de trabajar los pronósticos es reducir el error: obtener pronósticos que sean raramente incorrectos y que tengan errores pequeños de apreciación. En las actividades económicas, biológicas, gubernamentales, de políticas de planeación, se debe tener una visión del comportamiento futuro de muchas variables críticas antes de tomar decisiones. Las decisiones dependen de los pronósticos y se espera que sean precisos.

Cada situación que requiera un pronóstico se presenta con su propio conjunto de problemas y las soluciones a alguno de ellos de ninguna manera pueden ser consideradas en otras circunstancias. Sinembargo, existen ciertos principios generales comunes a la mayoría de los problemas de pronósticos que deben ser incorporados al sistema.

Los datos de una serie temporal discreta pueden recogerse de las siguientes maneras: (1) Por muestreo de una serie continua; por ejemplo, la producción de gas observada a intervalos de media hora. (2) Acumulando una variable durante un período de tiempo; por ejemplo, la precipitación fluvial, acumulada durante un día o un mes, o la producción de un proceso por lotes (como en la industria química o cemento, o en general de productos a granel), que se acumula durante el período de producción.

La obtención de buenos pronósticos se ha convertido en elemento clave a través de la historia. Aún hoy día, a los adivinos y pitonisas se les da credibilidad a sus afirmaciones aunque sus predicciones resulten exageradas o falsas.

Dada la disponibilidad de los datos, una relación de pronósticos puede suponerse como una función del tiempo, o de variables independientes, y comprobarse. Un paso importante en la selección del método apropiado es el de considerar aquellos patrones que pueden ser comprobados. Se pueden distinguir cuatro tipos de patrones de datos:

1. Un patrón horizontal (H) existe cuando los datos fluctúan alrededor de una media constante. (Tal serie es estacionaria en su media). Por ejemplo, un proceso cuya situación de control de calidad no cambie, es de esta clase.

2. Un patrón estacional (S) existe cuando una serie se ve influenciada por factores estacionales (p. ej.; trimestres, meses o días). Las ventas de un supermercado los días de pago de nómina, pertenece a este caso.

3. Un patrón cíclico (C) se presenta cuando los datos se ven afectados por fluctuaciones económicas a un plazo más largo como las ventas navideñas, la demanda de automóviles, etc.

4. Existe un patrón de tendencia (T) cuando hay un aumento o decrecimiento secular a largo plazo en los datos. Por ejemplo, las ventas de muchas empresas, el PNB, etc.

Muchas series de datos incluyen combinaciones de los patrones anteriores. Si se necesita una desagregación de los componentes de los patrones, los métodos de pronóstico pueden ser útiles para distinguir cada uno de ellos. Análogamente, estos métodos pueden usarse para identificar el patrón y el mejor ajuste de los datos para pronosticar el valor futuro.

1. Métodos de Pronóstico

El objetivo de los pronósticos es el de reducir el riesgo en la toma de decisiones. Por ejemplo, en casos típicos tales como administración de inventarios, planeación de producción, planeación financiera, programación de personal, programación de equipos y control de procesos, entre muchos otros. Generalmente los pronósticos son imprecisos, pero la magnitud de los errores observados depende del sistema usado. Dedicándole más recursos, se debe mejorar la exactitud, y en consecuencia eliminar algunas de las pérdidas resultantes de la incertidumbre en la toma de decisiones.

Debido a que nunca se puede eliminar el riesgo de los pronósticos, es necesario que el proceso de decisión considere explícitamente la incertidumbre latente en el pronóstico. A menudo, la decisión se relaciona conceptualmente con el pronóstico por DECISION REAL = DECISION BAJO LA HIPOTESIS DE QUE EL PRONOSTICO ES CORRECTO + TOLERANCIA DEL ERROR DEL PRONOSTICO. Esto implica que el sistema de pronósticos debe suministrar una descripción tanto del error del pronóstico como del pronóstico mismo. Idealmente, este proceso debe conducir a una estimación de la distribución de probabilidad de la variable estimada; así, la toma de decisiones admitiría objetivamente un riesgo.

El pronóstico no es un riesgo por sí mismo; más bien es la causa para lograr un fin. El método de pronósticos es una parte de un sistema complejo de administración y como subsistema, interactúa con otros componentes del sistema global para determinar su desempeño.

Es difícil medir la utilidad de los pronósticos. Son usados, principalmente, para hacer insinuaciones, ayudar a planear y complementar pronósticos cuantitativos mejor aún que suministrar un dato numérico. Debido a su naturaleza y costo, se usan casi exclusivamente para situaciones a medio y largo plazo para formular estrategias, desarrollo de nuevos productos y tecnologías y planes a largo plazo.

Para determinar un pronóstico se debe empezar definiendo las variables que deben analizarse y pronosticarse. El nivel de lo detallado del proceso es algo muy digno de tenerse en cuenta. Un sistema de planeación de producción puede requerir un pronóstico de la demanda en unidades para cada producto terminado para programar el uso de las instalaciones y el nivel de inventarios.

Por otro lado, un gerente de ventas puede requerir sólo un pronóstico de las ventas totales en pesos como información para su presupuesto. En el primer caso el pronóstico se hace en base a unidades físicas; en el segundo, en forma agregada. A pesar de que éstas son las metas, no necesariamente van a ser las variables que se usarían en el análisis. En la planeación de producción se puede proceder en forma de valores agregados, como sería el caso de familias de productos similares para luego desglosar los pronósticos calculados a nivel de unidades en una segunda instancia. Al pronosticar las ventas en pesos, se pueden elegir los pronósticos de los componentes de las ventas, por ejemplo en unidades, llevarlas a pesos convertir los pesos en precios futuros y luego sumarlos para obtener una estimación de las ventas totales en pesos. De ahí lo importante del dominio que se debe tener sobre el manejo de números índices.

El objetivo de los pronósticos es el de reducir el riesgo en la toma de decisiones. Por ejemplo, en casos típicos tales como administración de inventarios, planeación de producción, planeación financiera, programación de personal, programación de equipos y control de procesos.

También se deben considerar los siguientes elementos inherentes a los pronósticos: el período de cubrimiento, el horizonte, y los intervalos. El período de cubrimiento es la unidad básica de tiempo para la cual se hacen los pronósticos. Por ejemplo se puede desear un pronóstico de la demanda por semana, en cuyo caso el alcance es una semana. El horizonte es el número de períodos futuros cubiertos por el pronóstico. Así, se requeriría un pronóstico para 10 semanas, por semana. Finalmente, el intervalo es la frecuencia con la cual se preparan los nuevos pronósticos.

A menudo, el intervalo es igual al período. De esta manera se revisan los pronósticos cada período usando la demanda del período más reciente y cualquier otra información relevante. Si el horizonte es siempre de la misma longitud, por ejemplo T períodos y el pronóstico se revisa cada período, se dice que se está operando en base a un horizonte móvil. En este caso, se pronostica la demanda cada período para los T-1 períodos netos y se hace el pronóstico original para el período T.

Los pronósticos se necesitan generalmente durante períodos inciertos, conocidos como tiempo muerto (lead time), los cuales varían según el problema. Por ejemplo, el período muerto en un problema de control de inventarios, comienza cuando se coloca una orden de pedido y termina cuando se recibe el pedido y se carga como existencias. En algunos casos el término tiempo muerto de pronóstico se usa en lugar de horizonte del pronóstico. Puesto que los pronósticos resultan menos precisos al aumentar el horizonte, se puede, a menudo, mejorar el proceso decisorio acortando el tiempo muerto, en consecuencia reduciendo el tiempo muerto del pronóstico y permitiendo una reacción más rápida al error del pronóstico.

Otro aspecto de este tema se refiere a la forma requerida del pronóstico. Siempre es conveniente pensar en la variable de interés como una variable aleatoria con una distribución desconocida de probabilidad. Aquí entran en juego los procesos de estimación de las características de la distribución y de las medidas de la incertidumbre. Generalmente, un pronóstico incluye una de las siguientes formas: (1) estimadores del valor esperado de la variable y de la desviación típica del error del pronóstico; ó (2) un intervalo de estimación o de predicción del valor futuro dada una probabilidad determinada.

En ciertos casos puede haber mas interés en predecir cambios significativos en el proceso que da origen a una variable que en predecir el valor de esa variable. Este sería el caso de un proceso de control, en el cual, partiendo de una situación normal, se desea predecir cuándo pasa a un estado de fuera de control.

Otro factor importante es el de la disponibilidad de los datos. Los datos históricos son muy valiosos para establecer los procedimientos de pronósticos y las observaciones futuras deben estar presentes para la revisión de los pronósticos. La cantidad, la exactitud y el período de referencia de esta información, son elementos muy importantes. Además, se debe examinar la representatividad de los datos. El ejemplo clásico sobre este tema es el de los pronósticos de la demanda de un cierto producto cuando se llevan registros de las órdenes recibidas y los embarques período por período. Ninguno representa la demanda, puesto que las órdenes se hacen antes del período deseado de entrega, las órdenes perdidas debido a incumplimientos de entrega no son registrados y los despachos pueden hacerse en un momento diferente al deseado por el cliente; este caso es más común de lo que parece. Entonces, la empresa debe implantar un procedimiento de recolección de datos que indique lo que los clientes desean realmente que se les envíe en cada período de entrega.

Una fuente de confusión en los pronósticos de ventas, está en la distinción entre un pronóstico de "lo que puede ser vendido" y "lo que será vendido". El primero es un estimador de las oportunidades disponibles asumiendo que trabaja por debajo de su capacidad. Esta es la clase de pronóstico requerido para planear diferentes líneas de producto. El otro caso refleja restricciones de capacidad y decisiones gerenciales y representa un plan o un objetivo. Este sería el caso de un presupuesto más bien que el de un pronóstico. Se puede esperar que los datos estén correlacionados con los presupuestos en muchas empresas.

Dos factores importantes que quedan por definir son el interés y la capacidad de quienes utilicen los pronósticos. Idealmente, la información histórica se analiza automáticamente con programas estadísticos y se le entrega un pronóstico a la administración para su estudio y posible modificación. La presencia de un juicio en el proceso de pronósticos es importante pero requiere personal interesado en participar.

Otro factor importante es el de la disponibilidad de los datos. Los datos históricos son muy valiosos para establecer los procedimientos de pronósticos y las observaciones futuras deben estar presentes para la revisión de los pronósticos.

Para pronosticar, se supone que se dispone de las observaciones a intervalos de tiempo equidistantes y discretos. Por ejemplo, en un problema de pronósticos de ventas, las observaciones z_t en el mes t y los datos en z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3},... de los meses previos, pueden ser usados para pronosticar las ventas de los tiempos muertos l = 1, 2, 3, ..., 12 meses posteriores. La función $z\hat{}_t(l)$, l = 1, 2, ... que suministra los pronósticos en el origen t para todos los tiempos muertos futuros, se llamará función de pronósticos en el origen t. El objetivo es obtener una función de pronósticos tal que la media cuadrática de las desviaciones $z_{t-1}-z\hat{}_t(l)$ (entre el dato real y el pronosticado), sea tan pequeño como sea posible para cada tiempo muerto l.

Fuera de calcular los mejores pronósticos, es necesario especificar su precisión de tal manera que se puedan calcular los riesgos asociados con las decisiones basadas en los pronósticos ya calculados. Esto se puede lograr obteniendo los límites probabilísticos a ambos lados de cada pronóstico.

Los métodos para hacer pronósticos se clasifican ampliamente en cualitativos y cuantitativos. Los primeros son subjetivos e intuitivos; son hipótesis que pueden o no depender de información pasada. Generalmente estos pronósticos no pueden ser reproducidos por alguien más, puesto que el pronosticador no indica claramente cómo fue incorporada la información disponible en el pronóstico. Aunque el tema de los pronósticos subjetivos no es un enfoque riguroso, puede ser muy apropiado y el único método razonable en muchas situaciones.

Los pronósticos basados en modelos matemáticos o estadísticos son los cuantitativos. Una vez se seleccione el modelo o la técnica, se pueden determinar automáticamente los pronósticos correspondientes para ser reproducidos cuando se necesiten. Estos métodos se clasifican como determinísticos y probabilísticos (también conocidos como estocásticos o estadísticos).

En los modelos determinísticos la relación entre la variable de interés, Y, y las variables de predicción, $X_1, X_2, \ldots, X_p$, se determinan con precisión por medio de una ecuación matemática como las leyes tradicionales en las ciencias exactas. No obstante, en las demás áreas las relaciones son generalmente estocásticas: los errores y la variabilidad de las medidas de las variables incontroladas introducen componentes aleatorios (estocásticos). Esto conduce a los modelos probabilísticos o estocásticos de la forma:

$$Y = f(X_1, \ldots X_p; \beta_1, \ldots \beta_m) + \text{ruido (o perturbación)} \quad \textbf{[1]}$$

donde el segundo sumando de la derecha representa la divergencia en los resultados a medida que se repiten las observaciones y se conoce con los nombres de perturbación, ruido, variación experimental, error experimental, o simplemente error.

Esta imprecisión que puede provenir de diferentes fuentes, se debe principalmente a errores de cálculo y a la variación en otras variables incontrolables. Esto exige que se tengan en cuenta los modelos probabilísticos (o estadísticos) pues el componente del error es una manifestación de la presencia de una determinada distribución de probabilidad.

Los métodos de predicción que se verán acá son el de regresión y el de predicción de una sola variable. Las observaciones estadísticas usadas para determinar el modelo, es lo que se conoce como datos empíricos y son el tema principal de estudio en este artículo. Se supone que de ahora en adelante, se dispone de datos separados por intervalos regulares de tiempo (horas, días, meses, años,...) y por medio de la "inercia" en el comportamiento de la serie, se verá su tendencia futura. Este tipo de análisis se llama univariante porque usa como única información el historial de la misma serie, basándose en la hipótesis de que las condiciones futuras serán análogas a las pasadas.

El término general de un dato histórico se expresa como z_t, donde t es el índice del tiempo, por medio del cual se extrapola hacia el futuro. Por ejemplo, se puede hacer un estudio del comportamiento de una serie sobre el aumento del costo de la canasta familiar y extrapolar el modelo hacia los próximos meses y luego verificar la veracidad del modelo como tal. Para lograr este objetivo se pueden usar métodos de suavización o modelos paramétricos de series cronológicas. Para hacer pronósticos a través de la regresión, se hace uso de la relación entre la variable a pronosticar y las otras variables que explican su variación. Es decir, se pueden hacer pronósticos mensuales de las ventas de textiles a partir de su precio, el ingreso disponible de los consumidores y los gastos en publicidad.

Los modelos típicos de regresión miden los efectos instantáneos. Sin embargo, con más frecuencia de la que se cree, se presentan efectos de rezago que hacen que las variables de interés dependan de los valores presentes y pasados de las variables independientes (o predictoras). Estas relaciones se estudian combinando los modelos de regresión y de series cronológicas. Acá se centrará la atención exclusivamente en métodos cuantitativos de pronóstico. Estos constan de dos etapas principales: la construcción del modelo y la fase del cálculo del pronóstico. Estos modelos son especialmente útiles para estudios a corto plazo. En los demás casos se debe tener en cuenta la influencia de otras variables relacionadas con la de interés, para ver el comportamiento futuro mediante un modelo de regresión dinámica o función de transferencia.

Para construir un modelo se debe disponer de datos relevantes y una teoría científica de soporte. En algunos casos, la teoría, por ejemplo la económica, puede sugerir modelos particulares; pero en otros puede estar incompleta o no existir. Es aquí donde los datos juegan un papel predominante para determinar la clase de modelo. Estos modelos son especialmente útiles para estudios a corto plazo. En los demás casos se debe tener en cuenta la influencia de otras variables relacionadas con la de interés, para ver el comportamiento futuro mediante un modelo de regresión dinámica o función de transferencia.

Generalmente el modelo tentativo contiene parámetros desconocidos que pueden ser estimados por medio de sistemas tales como el de los mínimos cuadrados. Luego, el analista debe verificar lo adecuado del modelo ajustado. Esto puede fallar por varias razones: por ejemplo, se pudieron haber incluido variables inapropiadas o haber especificado erróneamente la relación funcional. Si el modelo es insatisfactorio, necesita ser replanteado y el ciclo iterativo del modelo especificación - estimación - diagnóstico - verificación debe ser repetido hasta encontrar un modelo satisfactorio.

En la otra etapa, o sea la de pronósticos, éstos se obtienen usando el modelo definitivo. Puesto que los pronósticos dependen absolutamente del modelo, debe haber seguridad de que éste y sus parámetros permanezcan constantes durante el período de su aplicación como tal. La estabilidad del modelo se comprueba comparando los pronósticos contra los valores observados. Al calcular las desviaciones, o errores del pronóstico, se detecta cualquier cambio en el modelo. Es decir, las funciones particulares de estos errores pueden indicar un sesgamiento en los pronósticos indicando unas predicciones sub o sobre valoradas. Además, se puede hacer uso de las observaciones más recientes para actualizar los pronósticos. Debido a que las observaciones se llevan secuencialmente en el tiempo, los procedimientos de actualización se pueden aplicar de manera rutinaria evitando los cálculos de cada pronóstico desde el principio.

2. El Futuro de los Pronósticos

La Investigación de Operaciones y las Ciencias Administrativas surgieron al terminar la década de los 40's y comienzo de los 50's y pretendieron resolver problemas organizacionales por medio de métodos específicos. Técnicas tales como Programación Lineal, Teoría de Colas, Teoría de Redes y Simulación se desarrollaron para resolver problemas específicos. En los años 60's decayó la influencia de los expertos en I.O. y en los 70's hubo una gran desbandada y se reubicaron a través de cada organización. Ya por los 80's, aumentó el número de expertos en planeación desarrollando nuevas habilidades en estas disciplinas, adaptando el uso de computadores. Inicialmente se usaron estos equipos en la investigación científica, en contabilidad y en nómina. A comienzos de los 80's las funciones de planeación se integraron con otras funciones en línea, colocando los pronósticos más cerca de la administración.

Dado el amplio cubrimiento de los métodos de pronóstico disponible y los avances tecnológicos a nivel computacional, se puede confiar en que los pronósticos tendrán cada vez más y mejor aplicación. Sin embargo, el éxito de la gerencia, está en el dominio de los métodos, programas y principalmente en la adecuada interpretación de las conclusiones. Entre los programas de software más completos para el procesamiento de datos de series de tiempo y análisis de regresión y correlación, están el STATGRAPHICS, SCA, PEST, SHAZAM, SAS. SPSS, MINITAB, SYSTAT y en menor escala el MICROSTAT.

Para construir un modelo se debe disponer de datos relevantes y una teoría científica de soporte.

3. Selección de un Modelo Particular de Pronósticos

Además de los criterios para calcular pronósticos, la elección de un modelo o técnica depende de los siguientes puntos: a. el grado de precisión requerida, b. el alcance, c. los costos permisibles, d. la complejidad requerida, y e. la disponibilidad de los datos.

El criterio para escoger un subconjunto de variables regresoras como el mejor "subconjunto", depende del uso que se le quiera dar al modelo: Predicción o Descripción. Se puede contar inicialmente con una lista larga de clases de variables regresoras que deben ser eliminadas, entre las cuales se encuentran las siguientes:

a. Puede que no sean necesarias o fundamentales.

b. Puede que su lectura o medida haya sido imprecisa, y

c. Puede que estén altamente correlacionadas.

En resumen, el "mejor" subconjunto es aquel que contenga tan pocas variables que su costo de manipulación sea accesible... y tantas como sea posible para cumplir los objetivos del estudio. Sinembargo, el analista se debe cuidar de no caer en la trampa de dos problemas de los cuales debe salir ileso: el primero se refiere a la no eliminación de variables importantes, pues producen sesgo y, cuando se dejan variables superfluas, se infla innecesariamente la varianza de los coeficientes.

Aunque en algunas ocasiones sólo se necesita obtener pronósticos en bruto, en otros casos se requiere gran precisión. En aplicaciones tales como medidas gubernamentales, la imprecisión se paga a unos costos económicos y sociales muy altos. Un aumento en la precisión eleva sustancialmente los costos en la recolección de los datos, tiempo de computador y personal. Pero cuando una pequeña pérdida en precisión no es crítica y rebaja notoriamente los costos, se prefiere un modelo más simple a otro más preciso aunque sea más complejo. El analista debe construir modelos simples porque son más fáciles de entender, usar y explicar. Un modelo muy pulido puede conducir a predicciones más precisas pero puede ser más costoso y difícil de implementar.

4. Criterios de Predicción

El criterio más importante para escoger el método de predicción es la precisión; es decir, qué tanto se acerca el pronóstico al resultado verdadero. Nótese la observación real en el momento t por z_t y al pronóstico, que usa la información hasta el instante t-1 inclusive, como z_{t-1}. Ahora, el objetivo es encontrar un pronóstico tal que el error futuro $z_t - z_{t-1}$ sea tan pequeño como sea posible. Nótese que como z_t aún no se ha observado, su valor es desconocido. Entonces, se puede hablar sólo de su valor esperado condicionado a los datos históricos hasta el instante t-1 inclusive.

Si ambos errores de pronóstico, el negativo (sobrepredicción) y el positivo (subpredicción) son igualmente indeseables, se justifica elegir el pronóstico de tal manera que la media absoluta del error $E\ |z_t - z_{t-1}|$ o el error medio cuadrático $E\ |z_t - z_{t-1}|^2$ sean mínimos. Los pronósticos que minimizan este valor, se conocen con el nombre de pronósticos del error medio cuadrático mínimo o EMCM. El criterio del error medio cuadrático se usa porque conduce a soluciones matemáticas más simples.

5. El Modelo de Regresión y su Aplicación en Pronósticos

El análisis de regresión tiene como objetivo principal encontrar el modelo apropiado para describir la relación entre dos o más variables y, además, cuantifica el grado de respuesta de la variable dependiente ante diversos cambios de las variables predictoras (independientes o explicativas). Por ejemplo, un director de mercadeo puede estar interesado en conocer la función que relaciona el volumen de ventas de su línea de productos con el precio, los precios de la competencia y lo presupuestado en propaganda. Por otro lado, un departamento de economía y planeación puede estar interesado en saber cómo se afecta el nivel de precios y la canasta familiar con un aumento del precio de los combustibles, o cómo se relaciona la propensión al ahorro con los gastos del gobierno y las tasas de interés. Finalmente, en producción, se necesita saber cómo responde el volumen de producto final ante unos insumos sometidos a variables de temperatura, tiempo, catalizador, etc.

En caso de conocerse exactamente las verdaderas relaciones, el investigador (llámese gerente, economista, ingeniero, analista) estaría en una posición ventajosa para entender, predecir y controlar los resultados. Pero como la realidad es bien diferente, se debe confiar en observaciones empíricas para obtener resultados aproximados. Sinembargo, los resultados varían aunque se repita el experimento bajo condiciones aparentemente idénticas. El alcance de los modelos es esencial puesto que los métodos que producen pronósticos a corto plazo difieren de los de largo plazo. Por ejemplo, los pronósticos para los bienes perecederos difieren de los bienes que no lo son.

6. El Modelo de Regresión

Muchos de los modelos usados para representar series cronológicas son algebraicos o funciones trascendentales (*) del tiempo o algún modelo compuesto que combine ambos componentes. Por ejemplo, si las observaciones son muestras aleatorias de alguna distribución de probabilidad, y si la media de la distribución no cambia con el tiempo, se puede usar el modelo constante

$$x_t = b + E_t \qquad [2]$$

donde x_t es la demanda en el período t, b es la media desconocida del proceso y E_t es el componente aleatorio. Si se supone que la media del proceso cambia linealmente con el tiempo, se usa el modelo de tendencia lineal

$$x_t = b_1 + b_{2t} E_t \qquad [3]$$

También se puede expresar una variación cíclica introduciendo términos trascendentales en el modelo; por ejemplo:

$$x_t = b_1 + b_2 \operatorname{sen} 2\pi t/12 + b_3 \cos 2\pi t/12 + E_t$$

la cual se refiere a un ciclo que se repite cada 12 períodos.

La forma general de estos modelos es

$$x_t = b_1 z_1 (t) + b_2 z_2 (t) + \ldots + b_k z_k (t) + E_t \qquad [4]$$

donde los $\{b_i\}$ son los parámetros, las $\{z_i(t)\}$ son funciones matemáticas de t y E_t es el componente aleatorio. Nótese que este enfoque de modelos representa el valor esperado del proceso como una función matemática de t. A menudo es deseable definir el origen del tiempo como el final del período más reciente T. Entonces el modelo para la observación en el período $T = T + \tau$ lo indica [5]:

$$x_{t+\tau} = a_1(T)z_1(\tau) + a_2(T)z_2(\tau) + \ldots + a_k(T)\, z_k(\tau) + E_{t+\tau} \qquad [5]$$

en la cual se denotan los coeficientes por $\{a_t (T)\}$ para indicar que se basan en el origen actual en el tiempo y que se distinguen de los coeficientes del origen ordinario. El hecho de mantener el origen del tiempo en una base actualizada facilita enormemente el trabajo en un sistema de pronósticos.

Otro modelo muy diferente es aquél cuyas observaciones x_t actúan como una función de componentes aleatorios previos E_t, E_{t-1}, E_{t-2}, . . ., en la forma general [6]:

$$x_t = \mu + \Phi_0 E_t + \Phi_1 E_{t-1} + \Phi_2 E_{t-2} + \ldots \qquad [6]$$

donde μ y $\{\Phi_i\}$ son constantes. Los modelos de esta clase reciben comúnmente el nombre de modelos de filtro lineal. Puede que no sea obvio que un modelo de esta forma pueda representar una serie de tiempo, aunque se verá que bajo este enfoque se pueden obtener resultados excelentes. Esto es particularmente válido para series cuyas observaciones son altamente correlacionadas, es decir, cuando las observaciones no son mutuamente independientes.

Una técnica sencilla para seleccionar un modelo para aplicar una serie de tiempo, consiste en graficar los datos históricos en un diagrama de dispersión e identificar la función matemática que más se les parezca. Como en cualquier procedimiento de análisis de datos estadísticos, los métodos gráficos son muy útiles en los pronósticos. Puesto que el modelo debe representar el futuro cercano con miras a pronosticar, generalmente se juzga su efectividad identificando la descripción de su pasado más reciente.

La simulación es una técnica muy útil para evaluar los métodos alternativos de pronósticos. Esto se puede hacer retrospectivamente usando datos históricos. Para cada método se empieza en algún punto previo en el tiempo y se simula el pronóstico período por período hasta el momento presente. Entonces se comparan los errores de los pronósticos entre los diferentes métodos. Si parece que el futuro fuese a diferir del pasado, se puede crear

---

(*) Los modelos que contengan términos trigonométricos o exponenciales, se llaman a menudo modelos trascendentales.

una pseudo historia de las expectativas subjetivas de la naturaleza futura de la serie y usarla en la simulación. La simulación también es útil para determinar los parámetros de las técnicas de pronósticos, y para obtener mejores constantes de suavización.

Es conveniente pensar en dos funciones primarias de un sistema de pronósticos como son la generación y el control de pronósticos. La primera involucra la adquisición de datos para revisar el modelo, produciendo un pronóstico estadístico, introduciendo un juicio gerencial y presentando los resultados adecuados al usuario de los pronósticos. El control de los pronósticos involucra el monitoreo del proceso para detectar condiciones fuera de control e identificar las oportunidades para mejorar el desempeño del modelo. Un componente esencial de la función de control es la prueba de la señal de rastreo. Este estadístico se calcula dividiendo un estimador del error esti mado del pronóstico por una medida de la variablidad del error del pronóstico, tal como el estimador de la desviación absoluta media del error del pronóstico. Si el sistema de pronósticos conduce a estimadores insesgados, la señal de rastreo debe ser próxima a cero. Una función de control de los pronósticos también debe involucrar informes periódicos sobre su utilidad y presentar los resultados a la administración respectiva. Esta retroalimentación debe motivar un mejoramiento en los aspectos cuantitativos y cualitativos del sistema.

Una técnica sencilla para seleccionar un modelo para aplicar una serie de tiempo, consiste en graficar los datos históricos en un diagrama de dispersión e identificar la función matemática que más se les parezca.

Sea la relación entre una variable dependiente Y_t y p variables independientes $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$; si se agrega un índice t, el valor de la variable dependiente en el instante t (o para el item t) se designará por y_t y las p variables independientes tendrán los símbolos $x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tp}$. Si las observaciones ocurren secuencialmente en el tiempo, el índice t se refiere a tiempo; en cualquier otro caso, t es simplemente un índice arbitrario. Es decir, en tablas de doble entrada, por ejemplo, donde las observaciones se refieran a elementos diferentes (empresas, regiones, etc.), el orden no tiene significado alguno. En su forma general, el modelo de regresión se expresa:

$$y_t = f(x_t; \beta) + E_t \qquad [7]$$

donde f $(x_t; a)$ es una función matemática de las p variables independientes $x_t = (x_{t1}, \ldots, x_{tp})$ y de los parámetros desconocidos $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. En el estudio del modelo se supone que la forma funcional es conocida, aunque los parámetros sean desconocidos. El modelo es probabilístico, puesto que el término de error es una variable aleatoria y se supone que sigue una distribución normal, que sus valores son no correlacionados (es decir, independientes entre sí) o sea que Cov $(E_t, \ldots, E_{t-k})$ = E $(E_t, \ldots, E_{t-k}) = 0$, para todo t y k $\neq 0$, y su esperanza es cero y varianza σ^2}. En notación vectorial, se tiene que el vector columna de los errores es igual a cero y la matriz de covarianzas es simétrica de tamaño n x n e igual a $\sigma^2 \times \mathbf{I}$.

Debido a que el modelo es aleatorio, se concluye que la variable dependiente, y_t, también lo es. Por lo tanto el modelo puede ser expresado en forma de distribución condicional de y_t dado $x_t = (x_{t1}, \ldots, x_{tp})$. Bajo este contexto, las hipótesis pueden expresarse como:

a. La media condicional $E(y_t/x_t) = f(x_t; \beta)$ depende de las variables independientes x_t y de los parámetros β, y la varianza $V(y_t/x_t) = \sigma^2$ es independiente de x_t y del tiempo.

b. Las variables dependientes y_t y y_{t-k} para diferentes instantes o temas, son incorrelacionados:

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = E[y_t - f(x_t; \beta)][y_{t-k} - f(x_{t-k}; \beta)] = 0 \qquad [8]$$

c. La parte condicional de y_t sobre x_t sigue una distribución normal con media $f(x_t; \beta)$ y varianza σ^2 la cual se denota por $N[f(x_t; \beta), \sigma^2)$.

Estas hipótesis implican que la media de la distribución condicional de y_t es una función de la variable independiente x_t. Sin embargo esta relación no es determinística porque para valor fijo de x_t habrá una dispersión de los y_t alrededor de su media; aún más, el error no puede ser expresado con anticipación.

Debido al enfoque resumido de este artículo y a lo accesible del tema en la bibliografía, dejan de presentarse aquí los diferentes modelos y sus funciones, la deducción de las fórmulas para estimar los parámetros mediante el uso de las ecuaciones normales, o sea la aplicación del método de los mínimos cuadrados en su forma matricial, y las propiedades de los estimadores minimocuadráticos.

7. Predicción usando los Modelos de Regresión con Coeficientes Estimados

Cuando se desconocen los parámetros $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k)$ se reemplazan por sus estimadores minimocuadráticos, expresados aquí en forma matricial: $\beta\text{^} = (\mathbf{XX})^{-1}\ \mathbf{X'Y}$. Así, el valor de predicción de y_t está dado por:

$$y_k^{\text{^}pred} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{k1} + ... + \hat{\beta}_p x_{kp}) = x'_k \beta\text{^} \qquad [9]$$

Se puede demostrar fácilmente que estas predicciones tienen las siguientes propiedades:

a. El pronóstico obtenido de esta manera es un predictor insesgado puesto que el valor esperado de un error de pronóstico futuro es cero.
b. Aún más, $y_k^{\text{^}pred}$ es el pronóstico de error mínimo cuadrático entre todos los pronósticos lineales insesgados. Esto se puede comprobar a partir del teorema de Gauss-Markov.
c. La varianza del pronóstico o equivalentemente del pronóstico está dada por [10]:

$$V(y_k - y_k^{\text{^}pred}) = V[E_k + x'_k(\beta - \beta\text{^})]y^{\text{^}pred} = \sigma^2[1 + x'_k(\mathbf{X'X})^{-1}x_k] \ [10]$$

Aquí se ha usado $V(\beta\text{^}) = \sigma^2\ (\mathbf{X'X})^{-1}$ y se ha supuesto que el error futuro E_k no está correlacionado con los errores en el período de estimación.

d. La varianza estimada del error del pronóstico es:

$$V\text{^}\ (y_k - y_k^{\text{^}pred}) = s^2\ [1 + \mathbf{x'}_t\ (\mathbf{X'X})^{-1}\ x_k] \qquad [11]$$

donde $s^2 = SSE/(n - p - 1)$ es el error medio cuadrá-tico que sirve como factor para la estimación de los límites del intervalo de predicción de un valor futuro y_k al $100\ (1-\alpha)\%$ de confianza.

8. Técnicas para la Selección de Modelos

La selección de las variables independientes que deben ser incluidas en el modelo definitivo es uno de los problemas más importantes de resolver en la construcción empírica de modelos.

Generalmente, al principio del proceso se puede disponer de una lista muy extensa de las posibles variables "predictoras", pero nadie está seguro de cuántas y, especialmente cuáles, deben incluirse en el modelo definitivo. Obviamente, no es del caso omitir variables importantes explicativas. Pero, por otro lado, se pretende mantener el modelo lo más simplificado posible para que sea más fácil de entender y de explicar. Además, se debe tener en cuenta que la estimación de parámetros innecesarios introduce incertidumbre adicional a los pronósticos

Un enfoque aceptable consiste en estimar todos los modelos de regresión posibles. Sinembargo, para k variables, se requiere estimar 2^k modelos.

El error medio cuadrático s^2, el coeficiente de determinación R^2, o preferiblemente su ajustado, R_a^2, donde:

$$R_a^2 = 1 - [SSE/(n-p-1)] / [SSTO/(n_1)] \qquad [12]$$

puede ser calculado para cada subconjunto de p = 1, ..., k variables. El R_a^2 no ajustado es creciente a medida que se van agregando variables adicionales y, eventualmente, alcanza a valer la unidad cuando el número de parámetros es igual al número de observaciones. El ajustado introduce una penalización por cada parámetro estimado dividiendo SSE y SSTO por sus grados de libertad. Así, puede suceder que disminuya cuando se le introducen variables adicionales al modelo. Así se puede seleccionar el subconjunto particular de regresión para el cual es máximo o para el cual s^2 es mínimo.

Un estadístico alterno para la selección del modelo es C_p sugerido por Mallows (1973), el cual mide la imparcialidad en el modelo de regresión y es de la forma

$$C_p = [SSE_p/s^2] - (n - 2_p) \qquad [13]$$

En esta expresión, SSE_p es la suma residual de cuadrados de un modelo que contenga p parámetros (incluyendo el intercepto β_0; así, p = 1,..., k+1), y s^2 es el error medio cuadrático del modelo con k variables independientes. Aquí se supone que s^2 es un estimador imparcial de σ^2. Entonces, si una regresión con sólo p parámetros es adecuada, $E[SSE_p] = (n - p)\sigma^2$, y aproximadamente, $E[C_p] = p$. Un gráfico de C_p contra p indica lo adecuado de los modelos a medida que sus puntos se aproximan a la línea $C_p = p$. Se trata entonces de buscar modelos con un C_p bajo que sea muy aproximado a p.

9. Multicolinealidad

En muchos casos donde se aplica la regresión se encuentra que las variables predictoras $X_1, \ldots, X_p$ están altamente relacionadas mostrando las columnas de la matriz **X** casi linealmente dependientes. Tal situación usualmente descrita como multicolinealidad en las variables predictoras, es especialmente común si los modelos se ajustan a datos observados. En aquellas situaciones donde el analista puede diseñar el experimento (p. ej. escoger los niveles de las variables independientes, la multicolinealidad puede ser evitada, puesto que siempre se pueden elegir las variables independientes ortogonales ($\Sigma x_{t-i} x_{t-j} = 0$ para $i \neq j$).

Sinembargo, cuando se trabaja con observaciones no se puede elegir "la matriz del diseño". Aún más, con demasiada frecuencia, varias variables predictoras miden el mismo concepto. Por ejemplo, un conjunto de indicadores que miden "el estado de la economía", el ingreso familiar y los activos que miden "riqueza", las ventas y el número de empleados que miden "tamaño del negocio", y la calificación promedio y el puntaje en pruebas estándar que miden "potencial académico" de un aspirante. Todas estas variables tienden a ser altamente relacionadas (correlacionadas). Consecuentemente, la matriz **X'X** está "mal condicionada" en el sentido de que su determinante es muy pequeño. Esto a su vez crea dificultades de cálculo cuando se invierte esta matriz para obtener los estimadores mínimocuadráticos.

Para ilustrar más claramente las consecuencias de la multicolinealidad considérese un ejemplo bien simple aunque hipotético. Supóngase que se estudia la relación entre el peso de unos automóviles y su consumo de combustible en kilómetros (Y). Sea que se ha medido el peso tanto en libras (X_1) como en kilogramos (X_2). Obviamente no hay información en X_2 puesto que libras y kilogramos guardan una relación exacta de proporcionalidad. Ahora, supóngase que se elige ajustar un modelo de la forma $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + E$ a una muestra de tamaño n. Aquí encontramos que no se pueden estimar los parámetros puesto que la matriz 3 x 3, **X'X**, es de rango 2 y no existe su inversa.

Si se intenta entrar los datos a un computador, se detiene el programa y debe aparecer un mensaje de error indicando una sobreinformación en la inversión de la matriz. Por lo tanto, no se pueden estimar los parámetros. Pero si se considera la relación proporcional entre X_1 y X_2 (es decir $X_2 = cX_1$) se puede expresar el modelo como $Y = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 c) X_1 + E = \beta_0 + \beta^* X_1 + E$; de esta manera se puede estimar el parámetro β^*. Sin embargo, hay un número infinito de valores para β_1 y β_2 que satisfacen $\beta^* = \beta_2 + \beta_2 c$; por lo tanto, los parámetros individuales β_1 y β_2 no son estimables.

En la mayoría de los casos la relación lineal entre las variables independientes no son tan exactas como se supuso en el párrafo anterior, sino que son aproximadas. Por lo tanto, aunque exista la inversa $(X'X)^{-1}$, su determinante puede ser tan pequeño que su obtención no dejará de tener dificultades.

Las consecuencias de una matriz **X'X** "mal condicionada" son: la diagonal de su inversa muy grande y por lo tanto varianzas grandes para los estimadores mínimo cuadráticos, y altas correlaciones entre los estimadores de los parámetros. Aún más, debido a la gran incertidumbre, se puede presentar mucha inestabilidad en estos estimadores, pues pueden tener el signo equivocado y sugerir, más de lo normal, consideraciones prácticas o físicas.

10. Variables Indicadoras

Hasta ahora se ha supuesto que las variables independientes son cuantitativas y medidas en una escala bien definida. Sinembargo, con mucha frecuencia las variables son cualitativas y tienen dos o más niveles. Por ejemplo, considérese la predicción del resultado de una cierta reacción química en términos de la concentración de los insumos, la presión, el tiempo de reacción (todas variables cuantitivas), y del tipo de catalizador, (cualitativo: tipo 1, ..., tipo k).

Por otro lado considérese el efecto del promedio en las calificaciones a nivel de graduados (cuantitativa) y el sexo (cualitativo) para los sueldos de enganche de los egresados a nivel de Máster. Otro ejemplo podría ser la predicción de la velocidad en adoptar un nuevo invento en términos del tamaño de la empresa y su condición de pública o privada.

En todos estos ejemplos se observa una variable cualitativa a diferentes niveles. Para modelar su efecto se introducen variables adicionales. El efecto de una variable cualitativa que se observa a k niveles diferentes (como si fuera de k fábricas diferentes) en la respuesta de Y, puede representarse por k-1 variables indicadoras. Estas variables indicadoras o ficticias se definen como $IND_{it} = 1$ si las observaciones vienen del nivel i (para $1 \leq i \leq k-1$) y 0 en otro caso. Combinando los efectos de estos indicadores con los efectos de p variables cuantitativas $X_1, ..., X_p$, se puede expresar el modelo como:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i xt_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i \, IND_{ti} + E_t \qquad [14]$$

Si las observaciones varían desde el nivel k, el efecto de las variables cuantitativas independientes está dado por:

$$E(y_t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_{ti} \qquad [15]$$

Si las observaciones varían desde el nivel i ($1 \leq i \leq k-1$), su efecto es:

$$E(y_t) = \beta_0 + \delta_i \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_{ti} \qquad [16]$$

Donde el parámetro es el efecto del nivel i relativo al nivel k. Este efecto es aditivo y no depende de las otras variables independientes $X_1, ..., X_p$.

La representación gráfica de la variable indicadora no es única. Alternativamente, se puede definir $IND_{ti} = 1$ si la observación desde el nivel i + 1 (para $1 \leq i \leq k-1$), y 0 en otro caso. En este caso el parámetro δ_1 representa los efectos de los niveles comparados con el nivel 1. Alternativamente, se pudieron definir k indicadores y omitir el intercepto β_0. Aquí, los k parámetros δ_1 representan los interceptos de k planos paralelos p-dimensionales.

Los parámetros son fácilmente estimables para cualquier representación que se adopte. Las columnas de la matriz **X** del modelo se componen de los valores de las variables independientes x_{ti} y las demás por columnas unos y ceros.

En el primer caso visto aquí los niveles de la variable cualitativa no interactúan con las otras variables en el modelo. Para considerar las interacciones se pueden introducir términos de productos cruzados $x_{ti} IND_{tj}$ ($1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq k-1$). Por ejemplo, el modelo adecuado de producto cruzado para p = 1 y k =

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \delta_1 IND_{t1} + \delta_2 IND_{t2} + \delta_{11} x_t IND_{t1} + \delta_{22} x_{t1} IND_{t2} + E_t \quad [17]$$

Las variables indicadoras también pueden usarse para estimar segmentos en modelos de regresión lineal. Considérese un modelo de regresión lineal con una variable predictora, p = 1. Suponga, por ejemplo, que las ventas y_t crecen linealmente con la inversión en publicidad: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + E_t$. Sinembargo, suponga que si el costo de la publicidad excede una cierta cantidad, x^*, el efecto de cada peso adicional gastado será menos de β_1. Entonces esta regresión lineal marginada puede ser modelada como:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 (x_t - x^*) IND_t + E_t \qquad [18]$$

donde $IND_t = 1$ si $x_t \neq x^*$ y el parámetro β_2 mide la pendiente.

11. Principios Estadísticos Generales para la Construcción de Modelos

Se ha supuesto que se conoce la función del modelo de regresión y la aplicabilidad de los estimadores mínimocuadráticos y los pronósticos de error medio mínimocuadrático. Estas propiedades dependen de las hipótesis del modelo, tales como independencia, igual varianza y normalidad de los términos del error.

La inferencia estadística es una herramienta invaluable para el análisis de los datos y la construcción de modelos, pero por ninguna razón es la única. Previamente a la estimación de parámetros se debe especificar la relación funcional entre las variables dependientes e independientes. Luego de la estimación de los parámetros se debe evaluar el ajuste del modelo. Se debe determinar lo adecuado de la relación funcional supuesta, y si se satisfacen las hipótesis de normalidad, igualdad de varianzas e independencia de los errores. Si el modelo ajustado es inadecuado, se debe plantear uno nuevo y se debe repetir el ciclo de estimación y verificación. Solamente cuando el modelo pasa estas revisiones, puede ser usado para interpretación y pronóstico.

Un principio muy importante en la construcción de modelos es el de la *parsimonia*, también llamado la barbera de Ockham, el cual se puede interpretar como si "en la elección de algunos modelos competitivos, todo lo demás igual, se prefiere el más simple". Preferir los modelos simples a los de más parámetros se debe a que son más fáciles de explicar e interpretar y la explicación de cada parámetro innecesario aumenta la varianza del error de predicción en 1/n. Esto se comprueba al notar que la matriz de covarianzas del vector de valores ajustados $\hat{y} = X\hat{\beta} = X\,(X'X)^{-1}X'$ y está dado por $V(\hat{y}) = \sigma^2 X\,(X'X)^{-1}X'$. La varianza promedio de un valor ajustado está dado por:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} V(\hat{y}_t) = \frac{\sigma^2}{n}\, \mathrm{Tr}\,[X\,(X'X)\text{-}1\,X'] = p\,\sigma^2/n \qquad [19]$$

Donde Tr(A) es la traza de una matriz cuadrada A, o sea la suma de los elementos de su diagonal, y $\sigma^2\,(1 + p/n)$ es la varianza promedio del error de los pronósticos.

> La inferencia estadística es una herramienta invaluable para el análisis de los datos y la construcción de modelos, pero por ninguna razón es la única.

12. Verificación del Diagnóstico

A través de los programas de computador de puede comprobar fácilmente lo adecuado del ajuste del modelo elegido. Un modelo puede ser inadecuado por varias razones:

a. La forma funcional puede ser incorrecta, y

b. La especificación del error puede que no sea adecuada. En particular, puede que los errores no se distribuyan normalmente, o haya desigualdad en las varianzas del error, o que los errores estén correlacionados.

Se define un residual como $e_t = y_t - \hat{y}_t$, para t = 1, 2, 3, ... donde y_t es una observación y $\hat{y}_t$ es el valor ajustado correspondiente obtenido del análisis de regresión. El análisis de los residuales es muy útil para verificar la hipótesis de la distribución normal $(0, \sigma^2)$ de los errores y para determinar si son útiles los términos adicionales incluidos en el modelo. Los residuales e_t no son variables aleatorias independientes porque involucran los valores ajustados $\hat{y}_t$ los cuales se basan en los estimadores muestrales b_0 y b_1. Así, los residuales se asocian con sólo n-2 grados de libertad. Cuando el tamaño muestral es grande en comparación con el número de parámetros en el modelo de regresión, la dependencia entre los e_t pierde importancia y puede ser ignorada. Un gráfico de los residuales contra la variable independiente es supremamente útil para ver si una función de regresión lineal es la adecuada y para comprobar si la varianza de los términos del error es constante.

Se puede considerar el uso de los residuales para examinar seis tipos importantes de desviaciones del modelo aplicado al cual se le asignan errores normales:

1. La función de regresión no es lineal.

2. Los términos del error no tienen varianza constante.

3. Los términos del error no son independientes.

4. El modelo se ajusta a unas observaciones atípicas.

5. Los términos del error no se distribuyen normalmente.

6. Una o varias variables independientes importantes han sido omitidas en el modelo.

En la verificación del diagnóstico, se observan los residuales $e_t = y_t - \hat{y}_t$ puesto que expresan la variación que el modelo de regresión no pudo explicar. Se puede considerar que los residuales e_t son los estimadores de E_t; de esta forma, si el modelo ajustado es correcto, los residuales deben confirmar las hipótesis formuladas acerca de los términos del error. Los diagramas de puntos (o histograma) de los residuales e_t contra los valores ajustados $\hat{y}_t$, o contra cada variable independiente o contra el tiempo (si los datos fueron recogidos cronológicamente), son de especial utilidad en esta etapa del análisis.

Si se satisfacen las hipótesis del modelo, el gráfico debe semejar una distribución normal. Al graficar los residuales contra los valores ajustados, respecto de cada variable independiente, o contra el tiempo, deben variar en una banda horizontal alrededor de cero. Cualquier desvío se tomará como una indicación de lo inadecuado del modelo.

BIBLIOGRAFIA

Abraham, Bovas, Johannes Ledolter, Statistical Methods for Forcasting, John Wiley & Sons. 1983.

Box, G. E. P., and G. C. Tiao, Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems, Journal of the American Statistical Association March 1975, V (70) 34. p.p. 7079.

Chang, Ih, George C. Tiao, Estimation of Time Series Parameters in the Presence of Outliers. Technical Report # 8 S.F.

Draper, N. R., and H. Smith, Applied Regression Analysis, John Wiley & Sons. 1966.

Harvey, A. C., S. Peters, Estimation Procedures for Structural Time Series Models. Journal of Forcasting, Vol 9, 89108 (1990).

Liu, Lon-Mu, Gregory B. Hudak, The SCA Statistical System, Scienthific Computing Associates. 1986.

Liu, Lon-Mu, and Dominique M. Hanssens, Identification of Transfer Function Model Via Least Squares, Technical Report # 68, Department of Biometrics, UCLA.

Makridakis, Spyros, Steven C. Wheelwright, and Victor McGee, Forcasting Methods and Applications. John Wiley & Sons. 1983.

Montgomery, Douglas C., Lynwood A. Johnson, John S. Gardiner, Forcasting and Time Series Analysis, McGrawHill Inc. 1990.

Martínez, Jorge, Observaciones Atípicas en el Análisis de Series Temporales. Análisis de Series Temporales. Memorias II Simposio de Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 1991.

Netter, John, William Wasserman, Michael H. Kutner, Applied Linear Statistical Methods. Richard D. Irwin, 1985.

Nieto, Fabio. Modelo EstadoEspacio. Filtros de Kalman. Análisis de Series Temporales. Memorias II Simposio de Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 1991.

Pérez G., Luis y Germán Cabarcas I., Cálculo de los Estimadores de Borde, Revista Dyna, (106) Dic. 1985, p.p. 51-58.

Sánchez A., Javier I., Análisis de Series Cronológicas: Suavización Exponencial, Revista Dyna, (102) Junio 1983, p.p. 65-71.

Sánchez A., Javier I., Manual Práctico de Estadística, Universidad Nacional Medellín, 1990.

Thomopoulos, Nick T., Applied Forcasting Methods. Prentice Hall. Inc.

Tsay, Ruey S., Outliers, Level Shifts, and Variance Changes in Time Series. Journal of Forcasting, Vol 7, 120 (1988).

Análisis de Series Temporales, II Simposio de Estadística. Desarrollos Recientes en la Construcción de Modelos ARIMA. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Julio 2 al 5 de 1991.