LA EXTRAPOLACION DE RICHARDSON

Una Forma de Precisión para los Cálculos

RAFAEL DAVID RINCON BERMUDEZ

- Profesor del Depto. de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.

En muchos problemas de aplicación se hace necesario la obtención de resultados numéricos que, además de ser buenos estimativos de los valores verdaderos, no impliquen un alto esfuerzo de cómputo. En tales casos, se puede estar interesado en conocer el valor límite del proceso o método numérico, cuando el tamaño de etapa h (diferencia entre valores adyacentes de x, esto es, $h = X_{k+1} - X_k$, $k=0,1,\ldots,n$), se acerca a cero.

El proceso de obtener una estimación mejorada para el valor de Integrales, Derivadas, Ecuaciones Diferenciales, etc., con base en dos o más aplicaciones de una fórmula, empleando diferentes longitudes de intervalo, se denomina Extrapolación, y uno de los más conocidos es el de Extrapolación de Richardson ó Aproximación diferida al límite.

Por medio de la Serie de Taylor podemos evaluar los órdenes de los errores en las fórmulas numéricas. El conocimiento de tales órdenes permite estimar adecuadamente el verdadero valor de las cantidades obtenidas aproximadamente.

Supongamos que F (0), valor exacto de algún proceso, se aproxima por una fórmula, en la que el único error apreciable es el de truncamiento. Sea F (h) el valor de la cantidad obtenida con longitud de paso o de intervalo h. En general, el tiempo de cómputo para F (h) aumenta a medida que h tiende a cero. En un sentido estricto, F (h) es una fórmula que proporciona aproximaciones para un valor verdadero o exacto, en general desconocido o difícil de obtener.

El error de truncación, F (0) - F (h), puede expresarse en forma proporcional a la longitud de etapa h, como

$$(1) \qquad F(0) - F(h) = K_1 h^p + O(h^q),$$

con $q > p > 0$, y enteros; h tiende a cero y p nos proporciona el grado de exactitud. (En la mayoría de los casos, $q=p+1$ ó $q=p+2$). La notación $f(t) = O[g(t)]$ significa que $\mathrm{Lim}_{t \to 0} [f(t) / g(t)] = c$, c una constante diferente de cero. Esto es,

$$\frac{[F(0) - F(h)] - K_1 h^p}{h^q} \leq c, \quad c>0$$

Es decir, el orden del error de truncamiento de F (h) es proporcional a h^q.

El valor $K_0 = F(0)$ es el número que deseamos calcular y K_1 es desconocida.

Si fuera posible remover de alguna manera, el término h^p en (1), tendriamos un error más pequeño, es decir, una estimación más precisa para F (0).

Sustituyendo h por λh, con $0 < \lambda < 1$, en la ecuación (1), obtenemos una aproximación nueva y probablemente más precisa, $F(\lambda h)$, para la cual,

$$(2) \qquad F(0) - F(\lambda h) = K_1 (\lambda h)^p + O(h^q)$$

Multiplicando (1) por λ^p y restando de (2) obtenemos,

$$\lambda^p [F(0) - F(h)] + F(\lambda h) - F(0) = O(h^q)$$

Es decir,
$$[\lambda^p - 1] F(0) = [\lambda^p - 1] F(h) + F(h) - F(\lambda h) + O(h^q)$$

De la cual concluimos,

$$(3) \qquad F(0) = K_0 = F(h) + \frac{F(h) - F(\lambda h)}{\lambda^p - 1} + 0(h^q)$$

Esta última ecuación se conoce como fórmula de Extrapolación de Richardson o de Aproximación diferida al límite (a medida que h tiende a cero). La aplicación de esta fórmula se vuelve especialmente sencilla cuando la longitud de paso h forma una serie geométrica, ho, λ^{-1}ho, λ^{-2}ho, ...

Teorema
Supóngase que se conoce la expansión para F(h),

$$(4) \qquad F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \ldots,$$

donde, $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, y

$$(5) \qquad F_1(h) = F(h),\ F_{K+1}(h) = F_K(h) + \frac{F_K(h) - F_K(\lambda h)}{\lambda^{P_K} - 1},$$

entonces, $F_n(h)$ tiene una expansión de la forma,

$$(6) \qquad F_n(h) = a_0 + a_n^{(n)} h^{p_n} + a_{n-1}^{(n)} h^{p_{n+1}} + \dots$$

Prueba
Por inducción.

De acuerdo con las ecuaciones (4) y (5), el teorema se cumple, evidentemente, para $n = 1$.

Supongamos que se verifica para $n = k$. Entonces, de la ecuación (5) vemos que $F_{k+1}(h)$ tiene una expansión que incluye las mismas potencias de h que la expansión de $F_k(h)$. En la expansión de $F_{k+1}(h)$, el coeficiente de h^{pk} es

$$a_k^{(k)} + \frac{a_k^{(k)} - a_k^{(k)} \lambda^{p_k}}{\lambda^{P_k} - 1} = a_k^{(k)} - a_k^{(k)} = 0$$

Así, el teorema se cumple para $n = k+1$, y se completa la prueba.

Este teorema proporciona una manera para calcular, cada vez, mejores estimativos de $a_0 = F(0) = K_0$, cuando se tiene una expansión conocida de la forma de la ecuación (4).

Resulta evidente que $F_{k+1}(h)$ está determinada por los k+1 valores,

$$F_1(h),\ F_1(\lambda h),\ \dots,\ F_1(\lambda^k h).$$

Así, podemos formar el siguiente algoritmo:

Se define, para $m = 0, 1, 2, \dots,$

$R_{m,0} = F(\lambda^{-m} h_0)$, y se calculan

$$R_{m,K} = R_{m,K-1} + \frac{R_{m,k-1} - R_{m-1,K-1}}{\lambda^{pk} - 1}$$

para $k = 1, 2, \dots, m$

Se acepta el valor $R_{m,k+1}$ como un buen estimativo de $a_0 = F(0)$, cuando

$| R_{m,k} - R_{m-1,k} | < \varepsilon$, siendo ε la tolerancia o error permisible.

El siguiente esquema, permite aclarar el proceso:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \frac{\Delta}{\lambda^{p1} - 1} & & \frac{\Delta}{\lambda^{p2} - 1} & & \frac{\Delta}{\lambda^{p3} - 1} & \\
R_{00} & & & & & & \\
 & r & & & & & \\
R_{10} & & R_{11} & & & & \\
 & r & & r & & & \\
R_{20} & & R_{21} & & R_{22} & & \\
 & r & & r & & r & \\
R_{30} & & R_{31} & & R_{32} & & R_{33}
\end{array}$$

Los r estan dados por $\dfrac{R_{m,K-1} - R_{m-1,\,k-1}}{\lambda^{pk} - 1}$

El caso especial más común se presenta cuando se toma $\lambda = 2$, esto es, cuando se tiene una expansión de la forma

$$(7) \qquad F(h) = K_0 + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \ldots,$$

donde, claramente, $p_k = 2k$. Entonces, en el diagrama anterior, las cabezas de columnas están dadas por $\dfrac{\Delta}{2^{2k} - 1}$ $\quad k = 1, 2, 3, \ldots,$

es decir, $\dfrac{\Delta}{3}, \dfrac{\Delta}{15}, \dfrac{\Delta}{63}, \ldots$

Ejemplo 1.

La siguiente tabla proporciona los valores para $f(x) = e^x$

x	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
e^x	1.000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891

Calculemos $(de^x/dx)_{x=1}$, mediante extrapolación repetida de Richardson.

Por Series de Taylor, tenemos,

$$(8) \qquad f(X_0 + h) - f(X_0) = hf'(X_0) + \frac{h^2}{2!} f''(X_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(X_0) + \ldots,$$

ó

$$(9) \qquad f(X_0 - h) - f(X_0) = -hf'(X_0) + \frac{h^2 f''(X_0)}{2!} - \frac{h^3 f'''}{3!}(X_0) + \ldots,$$

Restando (9) de (8), se tiene,

$$f(X_0 + h) - f(X_0 - h) = 2hf'(X_0) + 2\frac{h^3 f'''}{3!}(X_0) + \ldots$$

Es decir,

$$(10) \qquad \frac{f(X_0 + h) - f(X_0 - h)}{2h} = f'(X_0) + \frac{2h^2}{3!} f'''(X_0) + \ldots$$

Ahora, sumando (8) y (9), obtenemos,

$$f(X_0 + h) + f(X_0 - h) - 2f(X_0) = 2\frac{h^2}{2!} f''(X_0) + \frac{h^4}{4!} f''''(X_0) + \ldots$$

Esto es,

$$(11) \qquad \frac{f(X_0 + h) - 2f(X_0) + 2f(X_0 - h)}{h^2} = f''(X_0) + \frac{2h^2}{4!} f''''(X_0) + \ldots$$

Así, las expresiones (10) y (11) nos permiten ver que tenemos expansiones de la forma

$$(12) \qquad \frac{f(X_0 + h) - f(X_0 - h)}{2h}. = f'(X_0) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \ldots,$$

Para el cálculo de $\dfrac{dy}{dx}$ en $x = x_0$, y

$$\frac{f\,(X_0 + h) - 2f\,(X_0) + f\,(X_0 - h)}{h^2} = f''\,(X_0) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + \ldots,$$

para el calculo de $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, en $x = x_0$

En ésta forma, podemos expresar fácilmente las cabezas de cada columna para la extrapolación de Richardson:

Tomando h = 1, 0.5, 0.25, en (12),

h	**F (h)**	**Δ /3**		**Δ /15**	
1.0	R_{00}=3.1946				
		- 0.1205			
0.5	R_{10}=2.8330		2.7125		
		- 0.0288		3.5333×10^{-4}	
0.25	R_{20}=2.7466		2.7178		2.71815

Lo cual constituye un buen resultado.

Ejemplo 2.

Computar Y(1) para la ecuación diferencial,

$$\frac{dY}{dX} = f(X, Y) = Y' = -Y + X + 1,$$

con la condición inicial Y (0) = 1 tomando tamaños de etapa,

$$h_k = \frac{0.5}{2^k}, \quad K = 1, 2, 3, 4$$

Calculamos, para cada tamaño de etapa los $R_{m,0}$, mediante F $(\lambda^{-m} h_0)$, con $h_0 = 0.25$ y $\lambda = 2$, utilizando el algoritmo de Euler,

$$Y_{n+1} = Y_n + hf\,(X_n, Y_n), \qquad n=0, 1, \ldots$$

Mediante una expansión en Series de Taylor, encontramos que F(h) puede expresarse en la forma:

$$F\,(h) = C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \ldots,$$

dado que

$$Y(X_{n+1}) - Y(X_n) = h\,Y'\,(X_n) + \frac{h}{2!} Y''\,(X_n) + \frac{h^2}{3!} Y''\,(X_n) + \ldots$$

Entonces, el esquema de Richardson es: .

Esquema

h	$R_{m,0}$	Δ /1	$R_{m,1}$	Δ /3	$R_{m,2}$	Δ /7	$R_{m,3}$
0.25	1.316406						
		0.019986					
0.125	1.336392		1.356378				
		0.019682		6.46×10^{-3}			
0.0625	1.356074		1.375756		1.3822153		
		5.983×10^{-3}		-2.572×10^{-3}		-2.394×10^{-3}	
0.03125	1.362057		1.36804		1.365468		1.363076

Así, Y(1) = 1.363076 es una buena aproximación, con un error relativo del 0.35%, aproximadamente.

Ejemplo 3.

Computar aproximadamente, $\int_0^{0.8} \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$, empleando Extrapolación de Richardson.

Elaborando una table de valores para $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ obtenemos,

x	f(x)
0.0	1.0000
0.1	0.99833
0.2	0.99334
0.3	0.98507
0.4	0.97355
0.5	0.95885
0.6	0.94107
0.7	0.92031
0.8	0.89670

Teniendo en cuenta que $\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1$, o equivalentemente, $\frac{\text{sen } h}{h} = 1 + 0(h^2)$

Tomando tamaños de etapa, $h_k = \frac{0.8}{2^k}$, $k = 0, 1, 2, 3$ obtenemos, mediante la regla Trapezoidal, y el esquema de Richardson,

h	$R_{m,0}$	Δ /3	$R_{m,1}$	Δ /15	$R_{m,2}$	Δ /63	$R_{m,3}$
0.8	0.758680						
		3.36×10^{-3}					
0.4	0.768760		0.77212				
		8.34×10^{-3}		-1.6×10^{-6}			
0.2	0.771262		0.772096		0.772094		
		2.0833×10^{-3}		6.66×10^{-8}		1.5873×10^{-8}	
0.1	0.771887		0.772095		0.772095		0.772095

Así, podemos estimar,

$$\int_0^{0.8} \frac{\text{sen } x}{x} = 0.772095 \pm 0.000005$$

La aplicación de la extrapolación de Richardson a una fórmula de integración de Newton se conoce, comúnmente, como Integración de Romberg.

El concepto de la aproximación diferida al límite se utiliza con frecuencia en las ciencias experimentales. Por ejemplo, cuando se desea realizar mediciones en el vacío, como la temperatura de un filamento, lo cual resulta difícil o costoso de obtener. Puede ser entonces más práctico medir dicha cantidad para varios valores a diferente presión y aplicar el procedimiento de extrapolación. Igual situación ocurre con el tratamiento de la teoría cinética de los gases, donde se emplean expansiones análogas a la ecuación (4).

BIBLIOGRAFIA

DAHLQUIST G., BJORCK A. Numerical Methods. Inc. New Jersey, Prentice-Hall. 1972, pp. 269-345

BURDEN RICHARD, FAIRES DOUGLAS. Análisis Numérico. Belmont, California. Wadsworth Inc. 1985, pp. 167-171.

SMITH W. ALLEN. Análisis Numérico. Inc. México. Prentice-Hall. 1988, pp. 353-359.

SCHEID, FRANCIS. Numerical Analysis. Inc. New York. McGraw-Hill. 1988, pp. 115-116.

LUTHE, OLIVERA, SCHUTZ. Métodos Numéricos. México. Editorial Limusa, S.A. 1984, pp. 178-179.

PIZER STEPHEN, WALLACE VICTOR. To Compute Numerically. Little, Brown & Co. Canada, 1983, pp. 239 - 244.

CHAPRA STEVEN, CANALE RAYMOND. Métodos Numéricos para Ingenieros. Inc. México. McGraw-Hill. 1987, pp. 467-473.

GERALD, CURTIS. Applied Numerical Analysis. Inc. Massachusetts. Addison Wesle y Publishing Co., 1987, pp. 228-230.