REFLEXIONES METODOLOGICAS
¿Cómo se Aprende la Matemática?

Este trabajo fue realizado en el segundo semestre de 1987, como una lectura complementaria del "Curso de Evaluación en Matemáticas CUEMATE" desarrollado durante el segundo semestre sabático otorgado al autor por la Universidad EAFIT y dirigido por el Dr. Jairo Gómez Montoya.

HERNANDO BEDOYA FERNANDEZ

- Ph. D. en matemáticas, Syracuse University.
- Profesor Emérito en Matemáticas, Universidad EAFIT

Aprender es "adquirir conocimiento de algo por el estudio o la experiencia" y el aprendizaje es el proceso por el cual se adquieren dichos conocimientos.

El aprendizaje en Matemáticas, o el aprendizaje de las Matemáticas, es el proceso por el cual se adquieren conocimientos Matemáticos. Entendemos que el término conocimientos Matemáticos se refiere al conocimiento de alguna de las áreas que componen esta ciencia.

APRENDIZAJES EN LOS NIVELES DE PRIMARIA Y DE SECUNDARIA

Desde muy temprana edad, el ser humano (niño) adquiere conocimientos matemáticos de una manera INTUITIVA, por el contacto y observación del mundo exterior, sus juegos y pasatiempos. Tal es el caso de las ideas de número natural, relaciones de orden, conjuntos finitos, etc. aunque no tenga el lenguaje apropiado para manifestar estos conocimientos.

Al llegar a la escuela (quizás antes, si las condiciones son propicias: ayuda de sus padres, por ejemplo), el niño es encomendado al "Maestro" y, con la ayuda de él, empieza a adquirir este lenguaje y la notación apropiada. En otras palabras, el niño empieza a ORGANIZAR los conocimientos matemáticos que había adquirido antes de llegar a la misma. Por ejemplo, aprende a contar y a representar los primeros números naturales mediante símbolos; a reconocer conjuntos de cosas concretas; a reconocer algunas figuras geométricas como circunferencias y cuadrados y, lo que es más sorprendente, adquiere la noción intuitiva de sistema numérico. No es nuestra intención abordar el "¿por qué?" el niño está en capacidad de aprender estos primeros conocimientos matemáticos. De ello se han encargado muchos especialistas en sicología educativa y otros expertos; la literatura sobre el tema es abundantísima. Sin embargo, hablaremos un poco del "¿cómo?" se produce este aprendizaje, porque ello nos proporciona un APRENDIZAJE EN MATEMATICAS, entendiendo por ello la interrelación ENSEÑANZA-APRENDIZAJE.

En esta etapa, el niño, con la ayuda del maestro y éste, a su vez, con medio y material didáctico apropiados, aprende por OBSERVACION, ACCION, ASOCIACION Y REPETICION.

Por ejemplo: para aprender a contar y a representar números naturales observa un conjunto de objetos concretos, ejecuta la acción de contarlos, asocia el número de elementos contados con el símbolo que representa el número y lo escribe; repite el proceso durante un tiempo determinado con otros conjuntos y otros números (y esto lo seguirá haciendo a lo largo de toda su vida) hasta llegar a hacerse habitual. Durante todo este ciclo de la enseñanza básica primaria, el aprendizaje se produce, esencialmente del modo descrito anteriormente, pero de una manera PROGRESIVA Y ENGLOBANTE: cada vez que se aprende un elemento nuevo involucra, necesariamente, los conocimientos adquiridos anteriormente. Todo el aprendizaje se ha obtenido de manera INTUICIONISTA: Por EXPERIMENTACION Y REPETICION (aprende jugando) y ello constituye un aprendizaje fundamental en matemáticas.

Es de anotar que, en este ciclo, los conocimientos matemáticos se reducen a la noción intuitiva de conjuntos finitos, el conjunto de los números enteros no negativos y su aritmética, el conjunto de los números racionales no negativos y su aritmética y los primeros elementos intuitivos de la Geometría Euclidiana. Sin embargo, investigaciones más o menos recientes indican que el niño, a este nivel, ya puede tener la capacidad de recibir las primeras ideas intuitivas de topología general.

En el siguiente período de formación matemática, que es el de la educación media (educación en la escuela secundaria, se empieza lo que puede llamarse propiamente "La Educación Matemática", que se entiende como la adquisición por parte del estudiante de una CONCEPTUALIZACION BASICA de estructuras o sistemas matemáticos, un MANEJO OPERATIVO EFICIENTE Y UNA CAPACIDAD PARA RESOLVER PROBLEMAS, que se traduce en habilidades para reconocer estructuras y relaciones que le permiten llegar a sus soluciones, como también capacidad de interpretar los resultados.

Al finalizar este período, el estudiante puede reconocer y analizar estructuras, SEGUIR LAS DEMOSTRACIONES DE ALGUNOS TEOREMAS de acuerdo con una determinada línea de razonamiento, plantear, resolver e interpretar resultados de problemas relacionados con las estructuras matemáticas estudiadas y reconocer modelos.

Para adquirir la conceptualización básica debe servirse de la INTUICION y, en parte, de LA MEMORIA, aunque ésta no es estrictamente necesaria ya que los conceptos teóricos, unidos con los otros "hábitos matemáticos" que se van obteniendo simultáneamente, hacen que los primeros sean retenidos con gran facilidad.

Para ganar un manejo operativo eficiente, es necesario PRACTICAR; esto es, después de haber observado operar con ejemplos diversos, el educando resuelve, por su propia cuenta, ejercicios similares hasta cuando haya obtenido la habilidad esperada.

En cuanto a la habilidad para resolver problemas, ella se obtiene con base en el RACIOCINIO y de la PRACTICA. Nuevamente, al educando se le enseña a plantear y resolver problemas que sirven de modelos y él practica planteando y resolviendo problemas similares o nuevos que pueden ser planteados y resueltos con la teoría disponible. El desarrollo de esta habilidad depende primordialmente de la estructura mental de cada individuo; esto es, depende de la lógica que cada persona maneja y que es exclusiva de la misma. Algunos trabajos de profesores experimentados dan pautas que ayudan al aprendiz a organizar una lógica que lo conduzca a la solución de algunos problemas, pero no hay reglas generales conocidas que permitan, a cualquier estudiante, adquirir sistemáticamente esta habilidad en el nivel que estamos discutiendo.

Seguir la demostración de algunos teoremas significa, en primer lugar, reconocer la hipótesis y la conclusión o tesis de los mismos. En segundo lugar, seguir un argumento, mediante la aplicación de alguno de los métodos de demostración conocidos, dados por la lógica de enunciados y sus reglas de inferencia.

En este nivel, los teoremas que el estudiante demuestra son proposiciones cuyos argumentos no son sofisticados, sino que son de una simplicidad que permite al estudiante seguir la demostración sin dificultades, en el sentido de que pueda reproducirlas mediante el ejercicio de su propio razonamiento lógico, en lugar de ser memorizada. No cabe duda de que la MEMORIA juega un papel importante para obtener esta destreza pero ella debe ser de carácter secundario. En la obtención de este "hábito matemático", es de primordial importancia el uso de la LOGICA INDIVIDUAL y del RACIOCINIO. Con la destreza del profesor, clarificando cada paso de la demostración y, luego, reproduciendo el educando, por su cuenta, el argumento con las justificaciones necesarias, FRUTO DE SU PROPIO RACIOCINIO, se llega a conseguir tal habilidad.

En resumen, en la etapa de la educación media, el aprendizaje en matemáticas se obtiene primordialmente, por la PRACTICA y el RAZONAMIENTO LOGICO. LA MEMORIA juega un papel secundario.

APRENDIZAJE DE NIVEL UNIVERSITARIO - PREGRADO

En la etapa universitaria, a nivel de pregrado, que es la etapa de FORMACION MATEMATICA y que es la que más puede interesar al lector, es necesario distinguir dos clases de estudiantes en la educación tradicional: aquellos que utilizan la matemática como herramienta, en el sentido de que los conocimientos o habilidades matemáticas sirven de soporte a otros cursos del currículo, distintos de los cursos de matemáticas propiamente dichos o en el ejercicio de su profesión. Este es el caso de los estudiantes de Administración, Ingeniería, Economía, Biología, etc. y que constituyen la gran mayoría de la población estudiantil universitaria.

Los que, por vocación, han elegido una carrera de matemáticas y que estudian la "matemática por la matemática" y para quienes las aplicaciones situadas por fuera de la matemática misma son de carácter secundario.

Es necesario hacer la distinción anterior porque los aprendizajes de las matemáticas son diferentes para estos dos grupos.

Sin embargo, los dos grupos tienen una cosa en común, que se refleja en los planes de estudio respectivos y que son los cursos básicos de matemáticas comunes para todos los estudiantes universitarios de las carreras mencionadas anteriormente.

Estos cursos son:

- Algebra clásica, conjuntos y trigonometría.
- Cálculo Diferencial e Integral y Geometría Analítica.
- Ecuaciones diferenciales.
- Geometría Euclidiana.
- Algebra Lineal.

La conceptualización del primer curso, comúnmente llamado en nuestro medio, matemáticas operativas, es conocida (bien o mal) por el estudiante que ingresa por primera vez a la universidad, como fruto del aprendizaje adquirido en las etapas anteriores. Por lo tanto, sólo se requiere una revisión rápida de los conceptos fundamentales tanto por parte del docente como del alumno.

Toda la atención se centra en la MECANIZACION del manejo de operaciones algebráicas y trigonométricas, la cual consigue el alumno, resolviendo muchos ejercicios con "papel y lápiz" hasta cuando el proceso se convierte en algo razonablemente habitual.

Dado que, en todos los demás cursos de matemáticas básicas, el estudiante necesita "operar" eficientemente, entonces la HABILIDAD OPERATIVA PLENA se alcanzará al finalizar la etapa de su formación matemática básica.

La segunda área, Cálculo diferencial y Geometría Analítica, está formada por una secuencia de cuatro cursos, cada uno de los cuales se apoya completamente en el anterior y todos, a su vez, presuponen de una razonable habilidad operativa. Ellos son:

Cálculo diferencial de funciones de una variable real y Geometría Analítica del plano.

Cálculo integral de funciones de una variable real. Algebra de vectores del plano y del espacio. Cálculo diferencial e integral de funciones vectoriales de una variable real.

Cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables, geometría analítica del espacio, sucesiones y series infinitas.

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los párrafos anteriores describen, esencialmente, los contenidos de los cursos que, tradicionalmente, se conocen en nuestro medio como los cursos de "cálculo" y que, salvo la omisión o adición de algunos temas especiales, hacen parte del currículo de las carreras de ingeniería, economía, administración, contaduría, estadística, física. etc.

La estructura del cálculo y la geometría analítica está compuesta por los siguientes elementos esenciales:

- Definiciones
- Teoremas
- Interpretaciones geométricas.
- Manejo habilidoso de operaciones.
- Planteamiento, solución e interpretación de resultados de problemas de aplicación.

La formulación de las definiciones requiere, por parte del docente, de una gran habilidad para MOTIVARLAS previamente. Una manera de conseguirlo, consiste en exhibir una serie de ejemplos seleccionados de antemano, preferiblemente, acompañados de gráficos ilustrativos, de tal forma que el estudiante tenga en su mente una idea clara de lo que se quiere definir. Después de este proceso se formula la definición correcta y se procede a mostrar otros ejemplos que ilustren la definición o discutir los usados anteriormente a la luz de la definición formulada. Obviamente, todo el proceso requiere del buen manejo por parte del docente, de "tiza y tablero" aunque, eventualmente, pueden utilizarse otras ayudas de instrucción como acetatos, filminas, etc. Si la definición se formula sin que haya una motivación previa, lo más probable es que el estudiante tenga una gran dificultad para asimilarla.

Esto ocurre, por ejemplo, con la definición de límite de una función real de una variable real, la definición más importante del cálculo, o las definiciones de continuidad y de derivada.

El aprendizaje lo completa el alumno, resolviendo los ejercicios de aplicación que se proponen en los materiales de enseñanza escogidos.

Con referencia a los teoremas, los hay de dos clases: estructurales y de deducción de fórmulas.

Los teoremas estructurales son aquellos que sirven de soporte a la teoría propiamente dicha. Tal es el caso del teorema fundamental del cálculo, el teorema del valor medio para derivadas, el de expansión de funciones en series de Taylor, para mencionar algunos ejemplos representativos.

Todos estos teoremas deben ser demostrados por el docente y, como en el caso de las definiciones, deben ser motivados antes de su formulación, seguida de una interpretación geométrica, su demostración y aplicación a ejercicios concretos. El estudiante debe memorizar sus enunciados exactos y aprender sus demostraciones ayudado por las interpretaciones geométricas y resolver los ejercicios que se proponen en los materiales de apoyo.

Los teoremas que consisten en la deducción de fórmulas y, dado que la mayoría siguen una misma línea de razonamiento, predominantemente de tipo operativo, el docente deduce aquellas que presentan algunas variantes nuevas, dejando las demás como simples ejercicios adicionales que el estudiante debe resolver por su cuenta. El educando, por su parte, mecaniza las fórmulas mediante la solución de los ejercicios correspondientes y es aquí cuando el alumno pone en práctica sus habilidades anteriores y adquiere nuevas.

La parte más compleja y que es la de mayor importancia desde el punto de vista práctico, es la del análisis, planteamiento y solución de un problema de aplicación de cualquier área de la matemática, bien sea dentro de la misma o fuera de ella.

No existe un procedimiento sistemático conocido que permita resolver cualquier problema, debido a que cada situación requiere ser analizada desde varios puntos de vista que dependen, entre otras cosas, del conocimiento que se tenga del área en la cual está enmarcado el mismo, el reconocimiento del área de la matemática que es aplicable a la situación, de la lógica individual del que lo resuelve, etc. Podemos decir que SE APRENDE A RESOLVER PROBLEMAS RESOLVIENDO PROBLEMAS.

En el proceso enseñanza-aprendizaje de esta habilidad, el método que debe utilizar el docente es el método que se conoce como PROBLEMICO O POR DESCUBRIMIENTO:

El docente presenta un problema. Con la intervención de los estudiantes, selecciona variables importantes que intervienen en él y plantea relaciones o funciones que ligan las variables con los datos que se tienen a la disposición. Se aplican las técnicas necesarias extraídas del cálculo hasta llegar a una solución. Finalmente, se analizan los resultados para verificar si tienen validez real.

Resulta efectivo empezar con un problema simple e ir presentando otros con grados de dificultad en orden ascendente y diversificados y de áreas conocidas por todos los estudiantes. Estos problemas "modelo", orientan al estudiante para resolver los problemas que los materiales de enseñanza proponen y que debe resolver por su propia cuenta.

El proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría Eudiana es muy peculiar. Por un lado, se tienen modelos INTUITIVOS muy importantes, como son los objetos que nos rodean y con los que estamos familiarizados completamente, que hacen que la labor docente se facilite en cuanto a la ejemplarización de los conceptos básicos se refiere y que el educando aprende con gran facilidad.

Por otro lado, es el primer curso "formalizado" con que se encuentra el estudiante; es decir, donde el estudiante TIENE QUE APRENDER A DEMOSTRAR ya que su estructura fundamental descansa en sus teoremas y consecuencias (corolarios) y, si bien la intuición juega un papel importante, ello no es suficiente y es necesario el uso de la lógica y del raciocinio.

En esta área de la matemática es imprescindible, además, desarrollar una buena habilidad para el DIBUJO (geométrico). Esta habilidad se requiere, no solamente para la ilustración de los teoremas y aplicaciones, sino también para sacar "las construcciones" con regla y compás que son parte integral del curso.

Un docente "efectivo" de geometría debe tener la cualidad de ser un buen dibujante de figuras geométricas ya que cada teorema, aplicación o construcción requiere de una buena figura como punto de partida y la adición de algunas líneas auxiliares en sus demostraciones. Naturalmente que el docente podría utilizar medios visuales para el efecto (acetatos, por ejemplo), pero se perdería gran parte de la motivación, ya que la experiencia nos ha demostrado que al estudiante le agrada que su profesor muestre ante ellos que posee esta habilidad que ellos deben adquirir.

Para que los estudiantes "aprendan a demostrar", es necesario que el docente demuestre, con la participación de ellos preferiblemente, los teoremas principales, dejando las aplicaciones, que son nuevos teoremas y que deben demostrarse, a cargo de los mismos. Por lo tanto, el método de enseñanza que parece ser más efectivo es una mezcla de los métodos EXPOSITIVO ABIERTO Y PROBLEMICO.

El aprendizaje se produce demostrando proposiciones propuestas como ejercicio, teniendo como modelos las demostraciones vistas en el aula y utilizando su propio raciocinio.

Es importante destacar que, cada vez que el estudiante se enfrenta con una demostración o aplicación específica, debe elaborar un PLAN DE ACCION que puede escribirse en forma de algoritmo (pasos que se deben realizar en un orden específico para obtener un objetivo), con palabras usuales de nuestro vocabulario cotidiano y en el cual se ha verificado casa paso en cuanto a factibilidad se refiere. Este plan de acción está precedido generalmente, de UNA TORMENTA DE IDEAS, que consiste en ir detectando los datos o hipótesis, según el caso, colocándolos en la figura correspondiente y deduciendo, sobre la figura que se está usando, nuevos datos que se van agregando, paso a paso, hasta llegar a la conclusión si se trata de un teorema o a la solución si es una aplicación. Una vez elaborado el plan, se procede a formalizar, con lenguaje matemático, la demostración o el proceso de solución de la aplicación correspondiente.

Los demás cursos de matemáticas, distintos de los cursos básicos, que en nuestro medio se conocen con el nombre de matemáticas especiales, requieren de la especialización de los contenidos de los programas, en concordancia con el "perfil" del profesional o "producto final" que se desea obtener.

Podemos encontrar, entonces, matemáticas especiales para administración y contaduría (ingeniería económica), para ingeniería civil, de producción, de sistemas, matemáticas para la física; econometría para los economistas, etc.

Estos son cursos, más bien de aplicaciones de las matemáticas a otras disciplinas que de matemáticas propiamente dichos. La docencia y el aprendizaje de éstos se centra, primordialmente, en la formulación de modelos extractados de otras ciencias y no están revestidos de dificultades mayores en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debido a que, tanto el docente como el educando, tienen las herramientas básicas necesarias, por un lado, y la aptitud hacia la especialización, por el otro.

Finalmente, los cursos de matemáticas especiales para matemáticos son cursos de matemáticas que sobrepasan los cursos de matemáticas básicas y que son diseñados con el propósito específico de enseñar y aprender las matemáticas por las matemáticas mismas. El proceso de enseñanza-aprendizaje de estos cursos no reviste dificultad alguna por parte de los docentes ni por parte de los estudiantes, porque, tanto los unos como los otros, tienen la motivación y las aptitudes necesarias para culminarlos con éxito.

REFLEXIONES

El aprendizaje de las matemáticas básicas se genera y se adquiere por la necesidad que tiene el ser humano de una herramienta de trabajo para resolver los problemas que se presentan en su vida cotidiana o profesional y como se enseña y se aprende un lenguaje cualquiera que, en este caso, es el LENGUAJE UNIVERSAL de la ciencia y la tecnología.

Para los profesionales distintos a los matemáticos es un lenguaje de carácter universal para aprender y hacer ciencia y para estos últimos, para recrearse con la belleza y elegancia de sus métodos y procedimientos.

BIBLIOGRAFIA

ARAUJO B. J. y Chadwick C. B. "Tecnología Educacional: Teorías de Instrucción". Editora Voces Ltda. Perópolis, Buenos Aires. 1975.

BANATHY, Bela H. "Instructional Systemas". Belmont California, Fearon Publishers. 1968.

BANDURA, A. "Principles of behavior modification". New York. Rinehart and Wiston. 1969.

GAGNE, Robert M. "Essentials of learning for instruction". Dryden Press. Hinsdale. 1974.

------------- "The conditions of Learnig". Segunda Edición. Holt Rinehart and Wiston. New York. 1970.

GAGNE, Robert M. y Leslie Briggs. "La Planificación de la Enseñanza". Editorial trillas. México. 1980.

GOMEZ M. Jairo. "Guía Metodológica para la Evaluación Institucional y de Aprendizaje". Universidad EAFIT. 1979.

---------------- "Instrumentos para la Evaluación del Aprendizaje". Universidad EAFIT. Medellín. 1978.

---------------- "Sistemas y Educación: Aplicación Instrucción y Aprendizaje". U. de A. Medellín, 1974.

GOMEZ M. Jairo y Blanca L. Tamayo. "Cumdedun: Curso Multimedial de Docencia Universitaria". Segunda versión. Universidad EAFIT. Medellín, 1990.

HILGART, E.R. and Bower, G.V. "Theories of Learning, Appleton Century Crofts. New York. 1968.

MAGER Robert F. "Preparing Instructional Objetives". Fearon Publishers. Palo Alto, California. 1962.

------------------ "Developing Attitude Toward Learning". Fearon. California, 1968.

NERIC, G. "Metodología de la Enseñanza". Kapelusz. México. 1980.

SKINNER, B.F. "The Technology of Teaching". Appleton Century Crofts. 1968.

SEDUCA. "Teorías del Aprendizaje". Adaptación de Jairo Gómez M. Medellín, 1990.