Programación lineal

Algunas Técnicas Comunes de Programación Lineal.

GONZALO PIEDRAHITA E.
Estudiante de último año de la Escuela de Administración y Finanzas.
DIRECTOR del Departamento Comercial de Cervecería Unión.

INTRODUCCION

La función primaria de todo ejecutivo es la de tomar decisiones que determinen el curso futuro de acción. Esas decisiones envuelven principalmente problemas relativos a la planeación financiera, las ventas, el personal y la producción. La ciencia y las matemáticas proporcionan herramientas valiosísimas para elegir con apoyo en la lógica, la alternativa que ofrezca el mejor curso de acción para el logro de los objetivos de la organización. Frecuentemente los problemas consisten en minimizar una función, como en el caso de los costos, o en hacerla máxima, como en el caso de las utilidades. Para la solución de tales problemas existe una técnica altamente confiable: la programación lineal.

La programación matemática es una de las muchas facetas de la investigación de operaciones. Su origen se remonta a la época de la primera guerra mundial, cuando algunos científicos fueron llamados por las fuerzas armadas británicas para que les prestaran asistencia en la solución de algunos problemas relacionados con el radar, con el fin de proteger las Islas Británicas. Sin embargo, hay quien afirma que la investigación operativa no era nueva en la historia de la guerra pues ya antes muchos generales ocasionalmente consultaron a los matemáticos para encontrar soluciones a problemas de tácticas.

La mayor parte del trabajo de F. W. Lenchester en Inglaterra y de Thomas A. Edison en Estados Unidos durante la primera guerra mundial, y después de ella, fue similar a la investigación de operaciones en la segunda conflagración mundial. El primero intentó analizar matemáticamente las relaciones entre victoria, superioridad numérica y poder bélico y publicó su estudio en 1.916; el segundo, en su carácter de miembro de la Junta Consultiva de la Marina, llevó a cabo investigaciones sobre el combate antisubmarino. Estos trabajos fueron considerados como de interés académico solamente y ningún efecto surtieron sobre las operaciones de la primera guerra. El aparente fracaso se le atribuye al hecho de que la Junta Naval Consultiva estaba compuesta por un grupo de civiles que reportaban a un sólo individuo, que era el Secretario de la Marina.

La investigación operativa alcanzó notable éxito durante la segunda guerra, debido en buena parte a las relaciones entre las diferentes organizaciones, por cuanto que el personal dedicado a ella, reportaba directamente al personal del Comando Militar. Este triunfo movió a los investigadores de operaciones a llevar sus técnicas militares ya comprobadas, al campo de operaciones durante la post-guerra. En un principio sus resultados fueron prácticamente nulos, porque la notación y terminología altamente complicada y sofisticada de los investigadores hizo que los industriales rechazaran sus técnicas o, al menos, que les fueran dando una aceptación relativamente lenta.

FUNDAMENTOS MATEMATICOS:

La programación lineal es una disciplina eminentemente matemática, aunque el sentido común juega un papel importantísimo en el arreglo y solución de sus problemas típicos. El conocimiento del álgebra es requisito indispensable para una elemental comprensión de los aspectos teóricos del modelo de programación lineal. Para el cómputo y desarrollo completo de su teoría se requiere del dominio del álgebra lineal, matrices y determinantes, vectores y espacios vectorales. En síntesis, el grado de comprensión de esta materia, depende del dominio que se tenga en el vasto campo de las matemáticas. Conviene anotar, sin embargo, que el uso de los diferentes métodos no requiere de matemáticas complicadas y más bien éstas son necesarias cuando se trata de probarlos.

TEORIA DE LA PROGRAMACION:

Definiciones: - Saúl Gass define el modelo de programación lineal como "la optimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales", y agrega que, "es simple en su estructura matemática, pero poderosa en su adaptabilidad a una amplia gama de aplicaciones" (1). Metzger la define como "las técnicas usadas para encontrar la relación óptima entre un número de variables interdependientes, o un medio de obtener el mejor curso de acción cuando existen varios" (2). Para el propósito de este trabajo y la mejor comprensión de lo que es la programación lineal y en qué consiste esa disciplina matemática, veamos cómo la describe Robert W. Llwellyn: (3)

1º) "Hay un objetivo que llenar: Máxima utilidad, costo mínimo, tiempo mínimo transcurrido, etc".

2º) "Existe un número de variables que deben manejarse simultáneamente. Esas variables pueden ser productos, Horas-máquina, Horas-hombre, dinero, espacio disponible u otros factores, dependiendo del problema. Por lo general hay varias clases de variables en un problema. Algunas de éstas son salidas totales del sistema, como, por ejemplo, artículos, mientras que otras son entradas al sistema com, por ejemplo, horas-hombre; a éstas últimas a veces se las denomina recursos".

3º) "Existen muchas interacciones entre las variables. Un problema típico sería determinar la mejor mezcla o combinación para un

---

1) "PROGRAMACION LINEAL" Métodos y aplicaciones. Por: Saúl I. Gass. Compañía Editorial Continental, S. A. - México 22, D. F. Segunda impresión en español: Octubre de 1.962. - Página 11 - párrafo 3º.
2) "ELEMENTARY MATHEMATICAL PROGRAMMING" By Robert W. Metzger. copyright 1.958 by John Wiley Sons, Inc. Library of congress catalog card number: 58-13466 - Printed in Unites States of America - página 2ª del prefacio.
3) "LINEAR PROGRAMMING" By Robert W. Llewellyn - copyright, by Holt, Rinehart and Winston, Inc. - Library of congress catalog card number: 64-10124 y 25286-0114 - Printed in United States of América - pags. 1 y 2 - capítulo 1º

período de producción. Se trata de determinar qué artículos deben producirse, de una lista de productos potenciales, junto con la cantidad óptima de cada uno de ellos, a fin de hacer máxima la utilidad total en un período de producción dado. Las interacciones surgen del hecho de que si tenemos recursos limitados y producimos una cantidad dada de un producto A, entonces quedan menos recursos disponibles para la fabricación de los productos B, C, D, etc. En cierto sentido los productos compiten por la disponibilidad de recursos". El modelo de programación puede usarse para determinar la forma de resolver este conflicto, con el objeto de obtener el programa de producción de mayor rendimiento, con relación a las utilidades. Obviamente la utilidad unitaria obtenible de cada producto potencial es de gran significación al determinar cómo debe resolverse esta competencia".

4º) La mayor parte de los problemas de programación lineal se caracterizan también por la presencia de objetivos que están en conflicto con el objetivo principal del problema. En el caso de la mezcla de productos, por ejemplo, el fabricante podría especificar que debe producirse por lo menos cierta cantidad de uno de los artículos sin miramientos del efecto sobre la utilidad. El objetivo que compite aquí con el de la maximización de utilidades puede ser de cumplir un pedido ya recibido y aceptado".

"Así, la programación lineal tiende a estar asociada con situaciones complejas, muchas variables de interacción y objetivos en competencia, lo mismo que la optimización de ciertos criterios con respecto a la efectividad del sistema".

"La palabra LINEAL significa lo que dice: los problemas pueden encajar dentro del modelo de programación lineal, siempre que las relaciones algebráicas entre las variables sean lineales o puedan aproximarse por ecuaciones de primer orden. Si se viola esta condición, deben usarse otras técnicas más avanzadas".

METODOS:

La programación lineal comprende en realidad numerosos métodos y técnicas. No obstante, la tendencia general parece encaminarse hacia tres grandes agrupaciones, con algunas subdivisiones. La presentación más común que se encuentra en los diferentes textos, con ligeras variaciones, es la siguiente:

1º) - Métodos de Distribución

a) - "Método Stepping-stone"
b) - Método de Distribución Modificado (MODI)
c) - Método de Aproximación de Vogel

2º) - Método Simplex
3º) - Métodos de Aproximación

Los métodos de distribución por lo general se aplican en la solución de problemas relacionados con la distribución de productos y cuya solución consiste en la minimización de los costos y se caracterizan porque no conducen fácilmente a la solución óptima, es decir, que implican un método sumamente laborioso. Parece lógico entonces deducir la razón para el desarrollo del método de distribución modificado y el método Vogel de aproximación, por cuanto que simplifican o, más concretamente, facilitan el cómputo manual.

El método "Simplex" está diseñado para resolver otros tipos de problemas industriales. Exige un mayor refinamiento matemático porque requiere el empleo de matrices y más parece ser del dominio de los matemáticos.

Los métodos de aproximación no permiten obtener la mejor solución, en términos absolutos, pero conducen, sin embargo, a la obtención de una buena solución en forma rápida y económica. Algunos de ellos se aplican en situaciones muy particulares y descansan estrictamente en la formulación matemática.

La ilustración de los anteriores métodos, generalmente se hace mediante el planeamiento, desarrollo y solución de un problema típico.

Problema Modelo del Método de Distribución: (1)

Un fabricante cuenta con 3 bodegas localizadas en diferentes ciudades del país y recibe pedidos de 4 clientes localizados en ciudades también distintas. Su función básica es obviamente efectuar los despachos con un costo total mínimo para su organización. Para alcanzar este objetivo, lógicamente necesita determinar las cantidades disponibles en cada una de las bodegas, las distancias de ésta a cada uno de los puntos de destino de la mercancía y el costo de transporte en las respectivas direcciones.

---

1) "ELEMENTARY MATHEMATICAL PROGRAMING" By Robert W. Metzger. Copyright 1.958 by John Wiley & Sons, Inc. Library of congress catalog card number: 58-13466 - Printed in Unites States of America - pag. 11 capítulo 2º

Las 3 bodegas las identificaremos con las letras A, B y C y los lugares de destino de los clientes, con las letras W, X, Y y Z. Las cantidades pedidas son 7 - 10 - 6 y 9, respectivamente. Además, debemos suponer que el fabricante cuenta con existencias suficientes para atender estas requisiciones y que éstas están distribuídas en la siguiente forma: 8 unidades en la bodega A; 13 unidades en la bodega B y 11 unidades en la bodega C. La cantidad total que debe despacharse debe ser igual a la cantidad total solicitada por los cuatro clientes. Esta circunstancia nos permite elaborar el siguiente cuadro:

De Bodega A Cliente	W	X	Y	Z	Cantidad Disponible
A	$\boxed{10}$ 7	$\boxed{22}$	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{20}$	8
B	$\boxed{15}$	$\boxed{20}$	$\boxed{12}$ 4	$\boxed{8}$ 9	13
C	$\boxed{20}$	$\boxed{12}$ 10	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{15}$	11
Requisi-ciones	7	10	6	9	32

Las cifras de las casillas encerradas dentro de las celdas representan el costo de transportar una unidad del punto de origen al lugar de destino.

Vamos ahora a tratar de encontrar una solución inicial, haciendo caso omiso del costo de transporte. Arbitrariamente empezamos por la celda superior izquierda y le asignamos el máximo número de unidades permisible, o sea, la cantidad demandada por el cliente W, en este caso, 7 unidades. Nuestro segundo caso consiste en completar la cantidad disponible en la bodega A. Vemos que ésta es de 8 unidades, pero como ya hemos reservado 7 para el cliente W, nos resta 1 unidad que la asignamos al cliente X. De este modo alcanzamos el límite de la primera columna y la primera fila.

Continuamos con el mismo procedimiento hasta cumplir con la condición básica de que la suma de las columnas, sea igual a la suma de las filas.

Nos encontramos ahora con una *solución básica,* que podemos entrar a evaluar de la siguiente manera:

Si transportamos 7 unidades de la bodega A al cliente W, el costo de transporte será de \$ 70 (7 unidades a \$ 10.00 c/u.) Entonces podemos hacer el siguiente cómputo:

$$\begin{aligned}
AW &= 7 \text{ X } 10 = 70 \\
AX &= 1 \text{ X } 22 = 22 \\
BX &= 9 \text{ X } 20 = 180 \\
BY &= 4 \text{ X } 12 = 48 \\
CY &= 2 \text{ X } 10 = 20 \\
CZ &= 9 \text{ X } 15 = 135
\end{aligned}$$

Costo Total: .... \$ 475

Mediante esta solución básica, trataremos de resolver el problema por el método de escalones (stepping stone).

No sabemos si la solución a que hemos llegado es la mejor, o sea aquella que nos proporciona el costo mínimo de transporte. El cuadro nos muestra varias celdas vacías, que posiblemente nos ofrezcan la mejor solución. Debemos efectuar cambios y evaluar los resultados en forma sucesiva con el objeto de determinar si al introducir tales cambios, nuestro costo total de transporte disminuye. Todo cambio, naturalmente, debe estar sujeto a las restricciones de disponibilidad y requisición total.

Empecemos por introducir una unidad en la celda BW y veamos lo que ocurre. Como el costo de transporte de la bodega B al cliente W es de \$ 15.00, al despachar una unidad de este punto de origen, nuestro costo se eleva en \$ 15.00; pero, como dicha unidad dejaría de embarcarse de la bodega A, el costo disminuiría en \$ 10.00, o sea, el costo de transportar una unidad de A a W; y como quiera que estamos limitados por las restricciones impuestas por el problema, es necesario trasladar una unidad a AX, lo que implica un costo adicional de \$ 22.00; así la suma de las filas vuelve a ser 8. Ahora bien, si nos fijamos en la columna X vemos que esta se ha aumentado en una unidad, es decir, que ahora suma 11, lo que no cumple la condición del problema. Por consiguiente, debemos disminuir una unidad en BX, y ello representa una disminución de $ 20.00 en nuestro costo de transporte. Resumiendo, al evaluar le celda vacía BW obtenemos el siguiente resultado:

$$= + 15 - 10 + 22 - 20 = + 7$$

Concluímos entonces que este cambio no debe hacerse, porque significa un aumento de $ 7.00 en el costo total de transporte. En otras palabras, no mejora nuestra situación sino que, por el contrario, la empeora.

Siguiendo el mismo procedimiento, evaluemos ahora la celda CX. El resultado final será el siguiente:

$$+ 12 - 20 + 12 - 10 = - 6$$

Este movimiento nos sugiere una mejora con relación a nuestra solución básica. La economía total que nos permitiría este cambio, lógicamente, está limitada al número de unidades que podemos introducir en CY. Para el caso, el máximo es de dos unidades, lo que indica que nuestro costo de transporte, con respecto a la solución básica inicial, se disminuiría en $ 12.00 (2 unidades X (- $ 6.00 c/u.). Así tendríamos que nuestro nuevo costo de transporte sería: 475 — 12 = 463.

Procedemos sistemáticamente con la evaluación de cada una de las celdas vacías, efectuando cambios en las unidades asignadas. Cuando se llega al punto en que evaluando todas las celdas vacías, no se obtiene ninguna mejora con respecto a la solución básica, podemos decir que hemos obtenido la solución óptima. En nuestro caso, esta sería de $ 330.00, como se ilustra en el siguiente cuadro y representa una economía de cerca de un 30%, respecto de la solución básica que arbitrariamente presentamos al iniciar el problema.

Como bien puede apreciarse, este es un procedimiento largo y tedioso que, como lo anota Buffa, (1) sirve para entender lo que puede hacerse, más bien que como un intento para desarrollar habilidad en el método.

Método de Distribución Modificado (MODI) (2)

Este método ofrece un medio más eficiente para la evaluación de las celdas de modo que la celda que produce el mejoramiento más signi-

1) "MODERN PRODUCTION MANAGEMENT" By Elwood S. Buffa, Ph. D. Third printing, March, 1.963 Copyright 1.961 by John Wiley & Sons, Inc. - Library of congress catalog card number: 61-11166 - Printed in United States of América.- pag. 606 - Apéndice.

2) "ELEMENTARY MATHEMATICAL PROGRAMMING" By Robert W. Metzger copyright 1.958 by John Wiley & Sons, Inc. - Library of congress catalog card number: 58-13466 - Printed in Unites States of America - pag. 20 - capítulo 2º

De Bodega A Cliente	Kw=-10	Kx=-22	Ky=-14	Kz=-19	Cantidad Disponible
Ra = 0	$\boxed{10}$ 7	$\boxed{22}$ 1	$\boxed{10}$	$\boxed{20}$	8
Rb = 2	$\boxed{15}$	$\boxed{20}$ 9	$\boxed{12}$ 4	$\boxed{8}$	13
Rc = 4	$\boxed{20}$	$\boxed{12}$	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{15}$ 9	11
Requisiciones	7	10	6	9	32

ficativo, puede seleccionarse directamente en cada etapa de la solución. Al igual que en el anterior, este método parte de la solución básica de la celda superior izquierda y de cualquiera otra solución factible.

Podemos ilustrarlo valiéndonos del problema que utilizamos como ejemplo para el método "stepping-stone". Haremos uso de las siguientes convenciones:

R = Representa las filas.

K = Representa las columnas

C = El Costo involucrado

Establecemos la siguiente fórmula para las celdas a las cuales hemos asignado unidades, y sólo para éstas:

$$R + K + C = 0$$

Partimos siempre de la esquina superior izquierda y asumimos que Ra = 0 Tomamos la celda AW y calculamos Kw:

$$Kw = Ra - Caw = 0 - 10 = - 10$$

Igualmente podemos calcular Kx

$$Kx = -Ra - Cax = 0 - 22 = -22$$

Conocidas Kw y Kx podemos calcular Rb:

$$Rb = -Kx - Cbx = -(-22) - 20 = +2$$

Continuando con el mismo procedimiento podemos calcular los valores restantes de R y K:

$$Ky = -Rb - Cby = -2 - 12 = -14$$
$$Rc = -Ky - Ccy = -(-14) - 10 = 4$$
$$Kz = -Rc - Ccz = -4 - 15 = -19$$

Colocamos estos valores en sus respectivas posiciones dentro del cuadro, tal como se ilustra enseguida:

De Bodega / A Cliente	W	X	Y	Z	Cantidad Disponible
A	$\boxed{10}$ 7	$\boxed{22}$ 1	$\boxed{10}$	$\boxed{20}$	8
B	$\boxed{15}$	$\boxed{20}$ 9	$\boxed{12}$ 4	$\boxed{8}$	13
C	$\boxed{20}$	$\boxed{12}$	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{15}$ 9	11
Requisiciones	7	10	6	9	32

Podemos entrar ahora a evaluar las celdas vacías y tabulamos los resultados como sigue:

CELDA	CALCULO	RESULTADO
BW	Rb + Kw + Cbw = 2 + (-10) + 15 = 7	Positivo
CW	Rc + Kw + Ccw = 4 + (-10) + 20 = 14	Positivo
CX	Rc + Kx + Ccx = 4 + (-22) + 12 = -6	Negativo
AY	Ra + Ky + Cay = 0 + (-14) + 10 = -4	Negativo
AZ	Ra + Kz + Caz = 0 + (-19) + 20 = 1	Positivo
BZ	Rb = Kz + Cbz = 2 + (-19) + 8 = -9	Negativo

Observamos que tres de las celdas evaluadas pueden proporcionarnos una mejora en nuestros costos, sobre la base de la solución inicial. Esas son las que dan resultados negativos. De éstas, tomamos la que señala el mayor máximo de unidades permisible. En nuestro caso, se trata de la celda BZ, que nos permite una asignación límite de 4 unidades. Como, al hacer los cambios implicados la introducción de las unidades en BZ, se modifica el cuadro de asignaciones inicial, y consecuencialmente, algunos de los valores de R y K, se hace necesario recalcularlos y establecer de nuevo la celda vacía que ofrezca la mayor economía, es decir, la que señale la mayor cifra con signo negativo. Se continúa con el mismo procedimiento y la solución óptima será aquella cuya evaluación de las celdas vacías, dé como resultado valores positivos para todas las celdas.

Si la solución óptima que obtuvimos por el método de escalones fue de $ 330 como costo mínimo total de transporte para el fabricante, aquí deberemos llegar a esa misma solución.

El método de distribución modificado puede emplearse para resolver problemas de distribución de cualquier tamaño y grado de complejidad.

Método de Aproximación de VOGEL (1)

Este método fue desarrollado a fines de 1.955 por W. R. Vogel. Fue el producto de la intuición y aunque no admite prueba formal matemática, ha demostrado su validez en la solución de muchos problemas de distribución. A diferencia de los dos anteriores, este método da una solución inicial óptima en la mayoría de los problemas de distribución, con el consiguiente ahorro de tiempo.

1) "LINEAR PROGRAMMING" By Robert W. Llewellyn - copyright, by Holt, Rinehart and Winston, Inc. - Library of congress catalog card number: 64-10124 y 25286-0114 - Printed in United States of America, pag. 43 - capítulo 2º

Continuando con nuestro ejemplo, apliquemos el método que acabamos de enunciar, a objeto de ilustrar el procedimiento.

El primer paso consiste en elaborar un cuadro igual a los anteriores, omitiendo las asignaciones, puesto que este método no parte, como ellos, de una solución básica, sino que persigue al primer intento la obtención de la solución óptima. En las celdas, por lo tanto, sólo aparecerán los costos de transporte y en las filas y columnas, las cantidades totales correspondientes.

Se procede a establecer las diferencias entre los dos costos más bajos de cada fila y de cada columna, y se anotan al lado derecho del cuadro, las de las filas, y en la parte inferior, las de las columnas. Se busca la mayor diferencia y se asigna a la celda que muestre el costo más bajo, la mayor cantidad de unidades posibles, de acuerdo con las restricciones del problema.

Se anula la fila o la columna que se haya utilizado en su totalidad y se recalculan las diferencias entre los costos de las filas y columnas restantes.

Nuevamente se toma la mayor diferencia encontrada y se hace la asignación máxima a la respectiva celda. Luego se anula la fila y/o columna que haya quedado utilizada en su totalidad.

Se continúa con este mismo procedimiento de recálculo y anulación de columnas y filas, hasta conseguir eliminarlas todas. Naturalmente, quedará una columna por cancelar. Esta se anula colocando en la celda de menor costo el número de unidades que falten para completarla. El resultado de las asignaciones que muestre el cuadro así preparado, muy probablemente es la solución óptima. Para comprobarlo, nos valemos del método MODI (1), teniendo en cuenta que el número de celdas con asignaciones debe ser igual a: M + N — 1. Si no se cumple esta condición, sería inútil intentar la evaluación de la solución.

Método Simplex

El método de solución "SIMPLEX", generalmente atribuído a George B. Dantzig, profesor de la Universidad de California, es de alcance más general en su aplicación, que los métodos de distribución. Se emplea justamente en la solución de problemas que no pueden resolverse por los métodos de distribución. Tan pronto como se ha establecido el modelo para un determinado problema, con base en este método, podemos considerar la solución como un procedimiento mecánico: obtenida una solución básica, es posible llegar a una solución mínima, en un número finito de pasos. Dicha solución mínima está asociada con M vectores linealmente independientes.

Metzger nos ofrece una buena definición del método Simplex. En efecto, él lo describe como "una técnica de álgebra matriz que se emplea para obtener los valores óptimos para variables relacionadas en un sistema de desigualdades lineales" (1).

Como tendríamos que extendernos demasiado para poder presentar simultáneamente el proceso matemático de la solución de un problema y el procedimiento propiamente dicho del método a que nos referimos, consideramos preferible ilustrarlo con un problema, mostrando solamente el procedimiento y, por ser necesario, las ecuaciones iniciales indispensables:

***Problema:* (2)**

Una compañía fabrica dos productos: I y II cada uno de los cuales tiene que ser sometido a dos procesos. Se dispone de las máquinas A y B. Los tiempos de proceso por cientos de unidades de cada uno de los dos productos en las dos máquinas (el tiempo de montaje es despreciable), son los siguientes:

Producto	*Máquina A*	*Máquina B*
I	4 hr.	5 hr.
II	5 hr.	2 hr.

Para el período próximo, la máquina A dispone de 100 horas y la máquina B dispone de 80 horas.

La utilidad marginal (ingreso por ventas - costo variables), para el producto I es de $ 10.00, por cada 100 unidades, y para el producto II, $ 5.00 por cada 100 unidades. La Compañía espera en un mercado en el cual puede vender cualquier cantidad de ambos productos. Se desea determinar qué cantidad de cada uno de los productos I y II debe producirse para que la utilidad marginal sea máxima.

---

1) "ELEMENTARY MATHEMATICAL PROGRAMMING" by Robert W. Metzger copyright 1.958 by John Wiley & Sons, Inc, Inc - Library of congress catalog card number: 58-13466 - Printed in United States of America - pag. 59 - capítulo 3º

2) "MODERN PRODUCTION MANAGEMENT" By Elwood S. Buffa, Ph. D. third printing, March 1.963 copyright 1.961 by John Wiley & Sons, Inc. - Library of congress catalog card number: 61-11166 - Editado en Estados Unidos. Solución Simple - pag. 612 - Prefacio.

Sea XI = La cantidad en cientos del producto I.

Sea XII = La cantidad en cientos del producto II.

Nuestra primera limitación la constituye el tiempo en horas disponibles en las máquinas A y B. Por tanto, la suma de los tiempos para fabricar los dos productos en las dos máquinas, no puede exceder de 100 horas para la máquina A y de 80 horas para la máquina B. Así, tenemos las siguientes desigualdades:

Máquina A	4 X I + X II	= 100	(1)
Máquina B	5 X I + X II	= 80	(2)

Ahora bien, como pretendemos que la utilidad marginal sea máxima y esta depende solamente de las cantidades de los dos productos fabricados, podemos establecer nuestra *función objetiva:*

$$10 \text{ X I} + 5 \text{ X II} = \text{máximo} \quad (3)$$

Deseamos hallar la combinación de valores para XI y XII que cumpla las restricciones impuestas por el tiempo de fabricación para los dos productos, y el tiempo total disponible, como ya se ha expresado en (1) y (2) y que, en adición, haga máxima la utilidad marginal, como se indica en (3).

Debemos reconocer que es perfectamente posible que las máquinas A y B puedan tener tiempo ocioso. Así, representemos por WA el tiempo ocioso probable de la máquina A, y por WB el tiempo ocioso de la máquina B. En esta forma podemos convertir las desigualdades (1) y (2), en las siguientes ecuaciones:

$$4 \text{ X I} + 5 \text{ X II} + \text{WA} = 100 \quad (4)$$

$$5 \text{ X I} + 2 \text{ X II} + \text{WB} = 80 \quad (5)$$

Solución inicial:

Arreglemos las ecuaciones (4) y (5) en forma de matriz:

	XI	XII	WA	WB
100	4	5	1	0
80	5	2	0	1

Tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas.

Dos de estas variables pueden tener valores positivos y por lo menos dos, deben ser iguales a 0. Esto resulta evidente si partimos de la base de que no producimos nada y resolvemos las ecuaciones (4) y (5). Obtendremos valores positivos para las variables WA y WB y las variables XI y XII serían iguales a cero. Esto nos da la clave para establecer una solución inicial, que podemos usar luego como base para progresar en nuestro proceso hacia la función objetiva. Colocamos ahora esta solución inicial en forma de matriz:

			10	5	0	0	← Coeficiente agregado de la función objetiva
			XI	XII	WA	WB	
0	WA	100	4	5	1	0	
0	WB	80	5	2	0	1	

> **Nota: Las variables que no están en la matriz son iguales a cero; y los números de la primera columna de la izquierda indican las ratas de contribución de las variables WA y WB a la función objetiva.**

Obsérvese que los coeficientes de la función objetiva se han colocado por encima del arreglo o matriz. El cuadro o matriz identifica las variables en la solución y muestra sus valores. Como ni WA ni WB están en la función objetiva, se han colocado ceros en la respectiva columna, lo que tiene su razón de ser, ya que estando las máquinas completamente ociosas, la utilidad marginal es cero. El valor de la función objetiva en este punto es:

$$10\ (0) + 5\ (0) + 0\ (WA) + 0\ (WB = 0$$

Antes de seguir adelante, distingamos las varias partes de la matriz, mediante el uso de la siguiente nomenclatura:

			10	5	0	0	← Fila de Objetivos
			XI	XII	WA	WB	← Fila de Variables
0	WA	100	4	5	1	0	Ecuaciones del problema
0	WB	80	5	2	0	1	
Solución matriz			cuerpo		identidad		

↑ Columna de Constantes (valores de las variables en la sol.)

↑ Columna de Variables (variables en la solución).

↑ Columna de Objetivos (ratas de contribución de las variables de la solución a la función objetiva).

La solución Matriz siempre contendrá tres columnas. El cuerpo y la identidad variarán en tamaño, dependiendo del problema de que se trate.

Mejoramiento de la Solución Inicial:

Para mejorar la solución inicial debemos tener una medida del mejoramiento potencial que haríamos en la función objetiva, al incorporar a la solución algunas de las variables que ahora son cero, en lugar de las variables actualmente comprendidas en la solución. Este paso es comparable a la evaluación de las celdas vacías en los métodos de distribución. Para hacerlo, desarrollaremos una fila de índices que colocaremos debajo de la matriz inicial. Estos números índices aparecerán debajo de la columna de constantes, el cuerpo y la identidad y se calculan por medio de la siguiente fórmula:

Número Indice = Sumatoria (de los números en columna) X (el número correspondiente de la columna de objetivos) — (el número en la fila de objetivos que encabeza la columna).

Calculemos la fila de números índices para el problema que estamos desarrollando:

(1) Número Indice para la columna de constantes
= (100 X 0 + 80 X 0) — 0 = 0

(2) Número Indice para la primera columna del cuerpo
= (4 X 0 + 5 X 0) — 10 = — 10

(3) Número Indice para la segunda columna del cuerpo
= (5 X 0 + 2 X 0) — 5 = — 5

(4) Número Indice para la primera columna de la identidad
= (1 X 0 + 0 X 0) — 0 = 0

(5) Número Indice para la segunda columna de la identidad
= (0 X 0 + 1 X 0) — 0 = 0

Ahora colocamos los números índices en la matriz inicial Simplex:

			10	5	0	0	
			XI	XII	WA	WB	
0	WA	100	4	5	1	0	
0	WB	80	5	2	0	1	
		0	—10	—5	0	0	← (fila de índices)

Obsérvese que la fila de índices no es otra cosa que la fila de objetivos precedida del signo menos. Esto ocurre solamente cuando la columna de objetivos contiene todos los ceros.

En este método, como en los de distribución, el mayor número índice negativo señala el mayor mejoramiento que puede lograrse. Cuando todas las cifras de la fila de índices correspondientes al cuerpo y la identidad son ceros o valores positivos, sabemos que hemos alcanzado la solución óptima.

En nuestro caso la columna encabezada por la variable XI tiene el mayor mejoramiento potencial y, por consiguiente, la seleccionamos como la *columna clave*. Esta selección significa que la variable XI será introducida en la solución en favor de WA o WB. Ahora, para determinar a cuál de estas dos sustituirá, debemos seleccionar una *fila clave*, lo cual hacemos dividiendo cada número de la columna constante por el correspondiente número positivo distinto de cero, en la columna clave. Se comparan los cocientes y se elige aquella que produzca menor cociente positivo. Así, en nuestro problema, tenemos:

Primera Fila: $\dfrac{100}{4} = 25$

Segunda Fila: $\dfrac{80}{5} = 16$ (fila clave)

El número que es común a ambos: la columna clave y la fila clave, lo llamaremos *Número Clave*.

Para facilidad de comprensión, veamos cómo aparece nuestro arreglo:

Habiendo seleccionado la columna y la fila claves, podemos preparar otro arreglo que represente una mejora en nuestra solución. El primer paso consiste en calcular los coeficientes para la *fila principal*, lo que se hace dividiendo los coeficientes de la fila clave por el número clave. Ilustrémoslo:

Como puede observarse, en la fila principal la variable y su número objetivo que encabezan la columna clave, esto es, XI y 10, son introducidos en la matriz, en sustitución de WB y cero. Todos los coeficientes restantes, incluyendo la columna constante, el cuerpo, la identidad y la fila índice, pueden calcularse mediante la siguiente fórmula:

				10	5	0	0
				X_1	X_{II}	WA	WB
	0	WA	100	4	5	1	0
Fila clave →	0	WB	80	5	2	0	1
			0	-10	-5	0	0

Número Clave ← Columna Clave

			10	5	0	0
			X_1	X_{II}	WA	WB
0	WA	100	4	5	1	0
0	WB	80	5	2	0	1
		0	-10	-5	0	0
0	WA					
10	X_1	16	1	2/5	0	1/5 ← Fila Principal

$$\text{Nuevo Número} = \text{número ant.} - \frac{(\text{N}^{\circ}\ \text{Corresp. fila clave})\ \text{X}\ (\text{N}^{\circ}\ \text{corresp c/clave})}{\text{Número Clave}}$$

(1) Primera fila de la columna constante:

$$\text{Nuevo número} = 100 - \frac{80 \text{ X } 4}{5} = 36$$

(2) Primera fila, primera columna del cuerpo:

$$\text{Nuevo número} = 4 - \frac{4 \text{ X } 5}{5} = 0$$

(3) Fila índice, columna constante:

$$\text{Nuevo número} = 0 - \frac{80 \text{ X } (-10)}{5} = 160$$

Los coeficientes restantes pueden calcularse de la misma manera. La solución mejorada completa, aparecería con una nueva fila índice que muestra cualesquiera posibilidades de mejoramiento y aparecería el mismo arreglo con las siguientes tres filas principales:

0	WA	36	0	17/5	1	-4/5
10	XI	16	1	2/5	0	1/5
		160	0	-1	0	2

Aun existe la posibilidad de mejorar nuestra solución, dado que aparece un valor negativo (-1) en la fila índice bajo la variable XII; y como es el único valor negativo, se selecciona como la columna clave para la proxima iteración.

Se selecciona luego la fila clave. Los cocientes serían:

$$\text{Primera fila: } \frac{36}{17/5} = 10.59$$

$$\text{Segunda fila: } \frac{16}{2/5} = 40$$

La primera fila tiene el cociente positivo más pequeño y, por consiguiente, se selecciona como la fila clave. Se calcula ahora una nueva fila principal dividiendo los coeficientes de la fila principal por el número clave. La nueva variable XII y su número objetivo se introducen en la matriz. Los nuevos números en el cuerpo, la identidad y la fila índice se computan como se indicó atrás.

La nueva solución es ya la óptima, puesto que la fila índice no indica posible mejora, puesto que todas las cifras son ceros o cantidades positivas. Los valores de las variables para la solución óptima son:

$$XI = 200/17, \quad XII = 180/17, \quad WA = 0, \quad WB = 0$$

Si resolvemos las ecuaciones (4) y (5) mencionadas al principio del desarrollo del problema, en base a estos valores, encontramos que se cumplen exactamente. La solución indica que los productos I y II deben producirse en las cantidades correspondientes de XI y XII (en cientos de unidades), para que la utilidad sea máxima. Dicha utilidad sería:

$$E = \frac{2.900}{17} = \$\ 170.50$$

Obsérvese que para cada iteración, el valor de la función objetiva aparece en la columna constante, fila índice. Así, la segunda solución reportaría una utilidad de $ 160.00.

La solución óptima es única, es decir, ninguna otra combinación de XI y XII producirá una cifra representativa de la utilidad marginal que sea mayor que ésta.

DEGENERACION:

Un aspecto de la mecánica del desarrollo de una solución que debe mencionarse, es la condición que se conoce como "degeneración". Esta ocurre en los problemas relacionados con los métodos de distribución cuando, al hacer cambios de asignaciones en busca de un mejoramiento potencial, dos de las asignaciones existentes, en vez de una, se convierten en cero. En el método Simplex la degeneración se presenta al momento de la selección de la fila clave, cuando dos o más filas presentan un cociente menor positivo igual. No entraremos aquí a explicar el procedimiento que se sigue para resolver el problema de la degeneración, por cuanto que éste será analizado por otro estudiante en trabajo práctico sobre el mismo tema de programación lineal.

Métodos de Aproximación

Muchos problemas pueden ser resueltos mediante una aproximación apropiada. Frecuentemente una aproximación al óptimo puede ser más útil y económica que la solución óptima absoluta.

Como no podemos internarnos en el campo, por demás extenso, de estos métodos de aproximación, simplemente indicamos que en el texto "Elementary Mathematical Programming" de Robert W. Metzger, están ampliamente descritos e ilustrados. (1).

CAMPOS DE APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL

La programación lineal, producto de las matemáticas modernas, es una disciplina que ofrece vastísimos campos de aplicación, además de

1) "ELEMENTARY MATHEMATICAL PROGRAMMING" By Robert W. Metzger copyright 1.958 by John Wiley & Sons, Inc. - Library of congress catalog card number: 58-13466 - Editado en Estados Unidos - pag. 119 - capítulo 4º

que el extraordinario dinamismo que la caracteriza, conducirá a los matemáticos hacia el descubrimiento de más y más campos de aplicación para ella.

A grandes rasgos podemos decir que la programación lineal encuentra gran aplicación en complejos problemas de producción industrial; en el campo de la investigación de mercados y de la distribución de productos; en la evaluación del trabajo y en el análisis de salarios; en el control de inventarios y el manejo de materiales y, en forma muy general, en problemas de planeación. Ha sido empleada en la solución de problemas de rutas aéreas, en aplicaciones agrícolas, en análisis del tránsito urbano de las ciudades y una de sus aplicaciones más generalizadas y explotadas, son las atinentes al problema del transporte. También cobija el campo de la medicina, como claramente se desprende del problema tipo de la dieta humana económica.

LIMITACIONES

Indiscutiblemente la principal limitación de la programación lineal estriba en el hecho de que requiere que todas las relaciones sean lineales. Por ejemplo, sabemos que el costo de mano de obra directa en la producción puede cambiar con el volumen, dependiendo de los sistemas de pago y la capacidad operativa de una planta. Análogamente, muchas otras medidas que quisiéramos usar en los modelos de programación lineal, pueden no ser lineales o relaciones de línea recta.

Puede decirse en términos generales, que la programación lineal está íntimamente asociada a los computadores electrónicos, dado que las más de las veces la magnitud de las operaciones que surgen del planteamiento de los problemas comprendidos dentro del marco del modelo de programación lineal, además de las restricciones de tiempo que exigen las soluciones para que puedan servir como herramienta determinante del curso de acción que deba tomarse, necesariamente implican el uso de los computadores electrónicos. De otro lado, el costo de los computadores mismos, bien por adquisición o en arrendamiento, constituye otro factor seriamente limitante, puesto que infinidad de aplicaciones posibles en el campo industrial, no pueden realizarse por falta de recursos económicos, aún en ciudades que ya cuentan con un "Service Bureau" como en nuestro medio, Bogotá y Cali. Por último y con referencia específica a los países en proceso de desarrollo, como el nuestro, el más limitante de los factores, indudablemente, es la falta de personal idóneo y especializado, capaz de llevar a la práctica la aplicación de las técnicas complejas de la programación lineal.

SUMARIO

Para los administradores de negocios y, en general, para todo ejecutivo, lo importante es tener la capacidad suficiente para reconocer los problemas potenciales de la programación lineal. Ciertamente no constituye esta técnica la panacea para resolver todos los problemas, pero sí es un nuevo enfoque capaz de suministrar más y mejor información a la dirección para apoyar sus decisiones y obtener mayores aciertos. Antes de que la programación lineal apareciera, el análisis de los problemas descansaban por entero en la intuición, el juicio y la experiencia; el modelo matemático no las sustituye, pero sí proporciona asistencia de valor inconmensurable a toda persona que tenga que tomar decisiones. La mayoría de los problemas se repiten y, por ende, hay que resolverlos periódicamente. Encontramos aquí una gran ventaja, puesto que los problemas típicos son tan largos y dispendiosos, que en ocasiones el costo del análisis implicado en el desarrollo de un módelo, resulta ser superior a las economías derivadas de una aplicación única.

BIBLIOGRAFIA

Robert W. Llewellyn: Linear Programming.

Robert W. Metzger: Elementary Mathematical Programming.

Elwood S. Buffa, Ph. D. "Modern Production Managment".

Saúl I. Gass, Programación Lineal "Métodos y Aplicaciones".