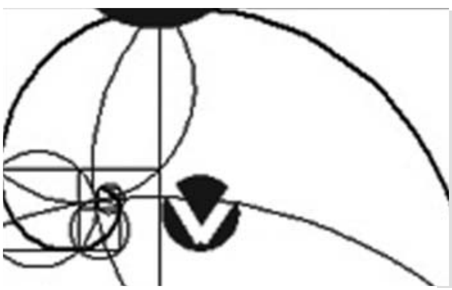
REVISTA Universidad EAFIT
Vol. 43. No. 148. 2007. pp. 91-112

Sistema
paraconsistente y paracompleto LBPcPo



Manuel Sierra Aristizábal
Magister en Ciencias.
Profesor del Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad EAFIT.
msierra@eafit.edu.co

Recepción: 14 de agosto de 2007 | Aceptación: 14 de noviembre de 2007

Resumen

El sistema LBPcPo se construye como una extensión de la lógica clásica positiva al incluir dos operadores de negación alterna, un operador de incompatibilidad y un operador de completez, y a partir de los cuales se definen los operadores de negación fuerte, afirmación alterna y completez alterna. El sistema es caracterizado por una semántica de valuaciones con la cual se prueba que, respecto a un operador de negación alterna el sistema es paracompleto, con respecto al otro es paraconsistente, y además, el operador de negación fuerte tiene todas las características de la negación clásica. También se presenta el sistema LBVA, con el cual se pretende caracterizar deductivamente las definiciones de verdad y falsedad presentadas por Aristóteles, resultando que este sistema es equivalente al sistema LBPcPo, donde el operador de falsedad aristotélica coincide con la negación paracompleta, y el operador de verdad aristotélica coincide con el operador de afirmación alterna.

Palabras Clave
Verdad
Falsedad
Afirmación alterna
Negación alterna
Paracompleto
Paraconsistente

LBPcPo Paraconsistent and paracomplete system

Abstract

LBPcPo system is an extension of classical positive logic. It includes two operators of alternate negation, an incompatibility operator and a completeness operator from which strong negation, alternate affirmation and alternate completeness operators are defined. The defining feature of this system is a valuation semantics that proves that with regards to an operator of alternate negation the system is paracomplete, with regards to the other which is paraconsistent and the operator of strong negation has all the features of classical negation. The LBVA system (Basic Logic for Truth and Falsehood) is also introduced as a tool to deductively characterize definitions of truth and falsehoods stated by Aristotle. Results show that LBVA system is equivalent to LBPcPo system. The Aristotelian falsehood operator matches the paracomplete negation, and the Aristotelian truth operator matches the alternate affirmation.

Key words

Truth
Falsehood
Alternate affirmation
Alternate negation
Paracomplete
Paraconsistent

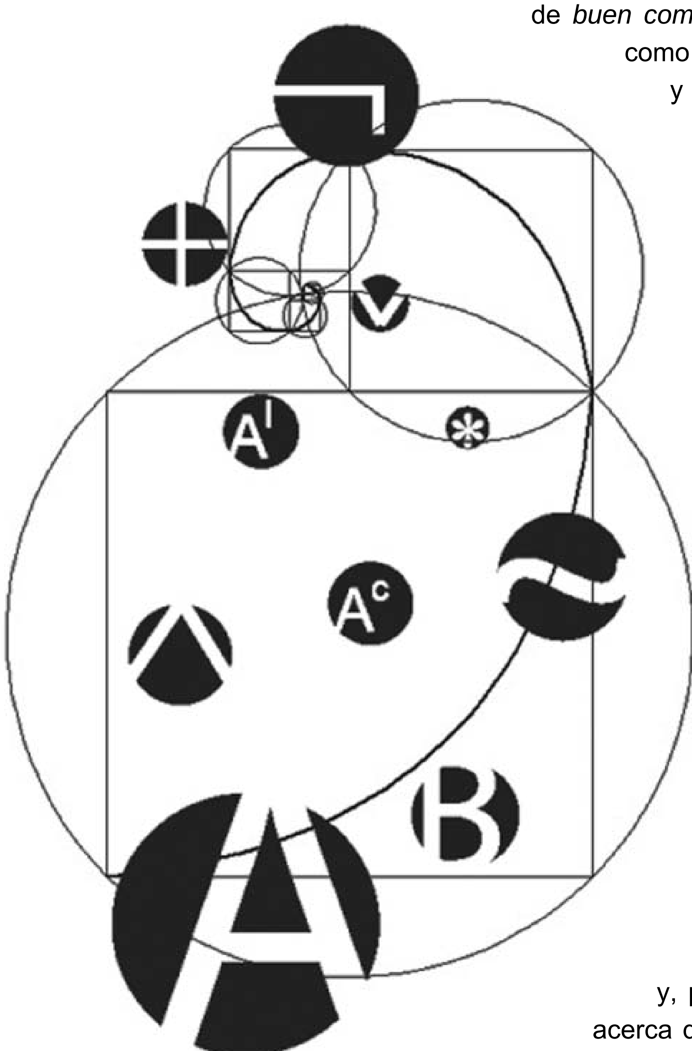
Introducción

Los operadores de *afirmación* y *negación* de la lógica clásica, pueden ser caracterizados como contrarios en el siguiente sentido: si se acepta la negación de la fórmula A entonces se rechaza la afirmación de A, y además, si se rechaza la negación de la fórmula A entonces se acepta la afirmación de A. Lo anterior tiene como consecuencia la validez del *principio de no contradicción*, $\sim(A\wedge\sim A)$, y la validez del principio del *tercero excluido*, $A\vee\sim A$. El primer principio prohíbe que la afirmación de una fórmula y su negación sean ambas aceptadas, no permite que una fórmula sea *compatible* con su negación, es decir, la lógica clásica no soporta las inconsistencias. El segundo principio prohíbe que la afirmación de una fórmula y su negación sean ambas rechazadas, no permite las *indeterminaciones* respecto a la negación, es decir, la lógica clásica no soporta las indeterminaciones.

En la *lógica intuicionista* presentada por Heyting (1971), los operadores de afirmación y negación pueden ser caracterizados por una interpretación que difiere de la que se hace en la lógica clásica. La *afirmación intuicionista* de una fórmula A significa que ‘existe una prueba constructiva de A’, y la *negación intuicionista* de una fórmula A significa que ‘A genera una contradicción’. Bajo esta interpretación es válido el principio de no contradicción, pero no es válido el principio del tercero excluido. Lo anterior tiene como consecuencia que en la lógica intuicionista no vale el principio de *reducción al absurdo*, $[\sim A\rightarrow(B\wedge\sim B)]\rightarrow A$, ni la *ley de Peirce*, $[(A\rightarrow B)\rightarrow A]\rightarrow A$, por lo que tanto la negación como la afirmación intuicionistas son verdaderos operadores de afirmación y negación alternas.

Da Costa (1993) presenta una jerarquía de sistemas deductivos, los cuales soportan las inconsistencias pero no las indeterminaciones. El operador de negación de estos sistemas, al no poseer todas las propiedades de la negación clásica, por ejemplo no satisface $\sim(A\wedge B)\leftrightarrow(\sim A\vee\sim B)$, es realmente un operador de negación alterna. En el sistema C_1, el primero de la jerarquía, se introduce un operador de *buen comportamiento* respecto a las inconsistencias, con el cual se pretende que si una fórmula está negada y tiene buen comportamiento entonces la fórmula negada se debe comportar como si estuviera clásicamente negada. El operador de buen comportamiento de una fórmula es definido como la negación de la conjunción de la afirmación de la fórmula con su negación, la negación clásica de una fórmula A es recuperada en términos de la negación alterna y el buen comportamiento de la fórmula A. Carnielli y Marcos (2002) estudian con mayor profundidad el operador de buen comportamiento, al presentar axiomáticamente un operador de *consistencia*.

Por su parte, Arruda y Alves (1979) presentan las llamadas *lógicas de la vaguedad*, caracterizadas por soportar las inconsistencias y/o las indeterminaciones. Uno de estos sistemas, llamado V_2, no soporta las inconsistencias pero si soporta las indeterminaciones, por lo que el operador de negación del sistema es un operador de negación alterna. En V_2, para cada fórmula se define un operador de *buen comportamiento* respecto a las indeterminaciones, como la disyunción entre la afirmación de la fórmula y su negación, es decir como el *principio del tercero excluido*. La idea es que cuando una fórmula se encuentra negada y tiene buen comportamiento entonces la fórmula negada se debe comportar como si estuviera clásicamente negada. Los sistemas que soportan las indeterminaciones son llamados *paracompletos*, mientras que los sistemas que soportan las inconsistencias son llamados *paraconsistentes*.



El sistema *lógica básica paraconsistente respecto a una negación y paracompleto respecto a otra negación,* LBPcPo, presentado en este trabajo, y el cual incluye como primitivos dos operadores de *negación alterna,* un operador de *incompatibilidad* y un operador de *completez*, resulta ser una generalización de la lógica clásica.

Uno de los operadores de *negación alterna* tiene la particularidad de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación y, por lo tanto, es *paraconsistente*. Los teoremas acerca de la negación clásica son recuperados de dos formas: por un lado, caracterizando en términos de este operador de negación alterna y el de incompatibilidad, un operador de *negación fuerte*; por otro lado, pidiendo a las fórmulas que se encuentran bajo el alcance de la negación, algunos requisitos de incompatibilidad. La *incompatibilidad* respecto a la negación alterna de una fórmula puede ser caracterizada en el sistema como la negación fuerte de la conjunción entre la fórmula y su negación alterna; esta caracterización hace al operador incompatibilidad esencialmente diferente de los operadores de buen comportamiento y consistencia (Carnielli & Marcos, 2002; Da Costa, 1993).

El otro operador de *negación alterna* tiene la característica de no prohibir la indeterminabilidad de un enunciado con su negación, y por lo tanto es *paracompleto*. Los teoremas acerca de la negación clásica son recuperados de dos formas: por un lado, definiendo en términos de este operador de negación alterna y el de determinabilidad, un operador de *negación fuerte*; por otro lado, pidiendo a las fórmulas que se encuentran bajo el alcance de la negación, algunos requisitos de determinabilidad. Así, la determinabilidad o *completez* respecto a la negación alterna de una fórmula se puede caracterizar como la disyunción entre la fórmula y su negación alterna.

También se presenta en este trabajo el sistema *Lógica Básica para la Verdad Aristotélica* (LBVA), con el cual se pretende caracterizar deductivamente las definiciones de verdad y falsedad presentadas por Aristóteles en su *Metafísica*, resultando que los sistemas LBPcPo y LBVA son equivalentes, donde el operador *de falsedad aristotélica* coincide con la *negación paracompleta*, y el operador de *verdad aristotélica* coincide con un operador de *afirmación alterna*, este último operador es definido en términos de la negación paraconsistente y la negación fuerte.

El sistema LBPcPo es caracterizado con una semántica de valuaciones tradicional. Las pruebas de validez y completitud, así como las pruebas de la equivalencia de los sistemas son presentadas de manera detallada.

1. Sistema deductivo LBPcPo

El lenguaje de la *Lógica Clásica Positiva* (LCP) consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El *lenguaje del sistema* LBPcPo se obtiene extendiendo el lenguaje de la lógica clásica positiva con los operadores monádicos $\neg$, I, -, C.

El conjunto de *fórmulas de* LBPcPo es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

R1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas*

R2. Si A es una fórmula entonces $\neg$(A), $(A)^C$, -(A) y $(A)^I$ son fórmulas[1]

R3. Si A y B son fórmulas, entonces $(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\rightarrow(B)$ y $(A)\leftrightarrow(B)$ son fórmulas.

El *sistema deductivo para* LBPcPo es una extensión del cálculo proposicional clásico positivo LCP, por lo que se toman dos grupos de axiomas.

Axiomas para el cálculo proposicional clásico:

Ax0.1 $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax0.2 $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax0.3 $A\rightarrow(A\vee B)$
Ax0.4 $B\rightarrow(A\vee B)$
Ax0.5 $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C))$
Ax0.6 $(A\wedge B)\rightarrow A$
Ax0.7 $(A\wedge B)\rightarrow B$
Ax0.8 $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\wedge C)))$
Ax0.9 $(A\leftrightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B)$
Ax0.10 $(A\leftrightarrow B)\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax0.11 $(A\rightarrow B)\rightarrow[(B\rightarrow A)\rightarrow(A\leftrightarrow B)]$
Ax0.12 $((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A$

Axiomas para los nuevos operadores:

Ax1.1. $(A\vee\neg A)\rightarrow A^C$
Ax1.2 $(A\wedge\neg A)\rightarrow B$

Ax2.1. $(A\wedge -A)\vee A^I$
Ax2.2. $A\vee(A^I\wedge -A)$

Ax3.1. $(A^I\wedge A^C)\rightarrow(-A\rightarrow\neg A)$

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* (MP): de A y $A\rightarrow B$ se infiere B.

En el sistema se definen tres operadores monádicos:

[1] $\neg$A es una negación alterna de A. A^C indica que las fórmulas A y $\neg$A son determinables, semánticamente significa que al menos una de A y $\neg$A es verdadera. A^C se lee A es determinable con su negación alterna (C es el operador de completez o determinabilidad). -A es otra negación alterna de A. A^I indica que las fórmulas A y -A son incompatibles, semánticamente significa que al menos una de A y -A es falsa. A^I se lee A es incompatible con su negación alterna (I es el operador de incompatibilidad).

$\sim A = A^C \rightarrow \neg A$ (*negación fuerte* de A)

$+A = \sim -A$ (*afirmación alterna* de A)

$*A = +A \vee \neg A$ (*completez alterna* de A)

Se dice que una fórmula A es un *teorema de LBPcPo*, denotado $\vdash A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de LBPcPo a partir de* Γ, denotado $\Gamma \vdash A$, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Proposición 1. *Consecuencias en LCP*

Principio de identidad: $\vdash A \rightarrow A$

Teorema de deducción: Sean A y B fórmulas y Γ un conjunto de fórmulas. Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$

Introducción y eliminación de la conjunción: $\vdash A \wedge B \Leftrightarrow (\vdash A$ y $\vdash B)$

Conmutatividad de la conjunción: $\vdash A \wedge B \Leftrightarrow \vdash B \wedge A$

Conmutatividad de la disyunción: $\vdash A \vee B \Leftrightarrow \vdash B \vee A$

Introducción de la disyunción: $\vdash A \Rightarrow (\vdash A \vee B$ y $\vdash B \vee A)$

Silogismo hipotético: $(\vdash A \rightarrow B$ y $\vdash B \rightarrow C) \Rightarrow \vdash A \rightarrow C$

Eliminación de la disyunción: $\vdash A \vee B$ y $\vdash A \rightarrow C$ y $\vdash B \rightarrow C \Rightarrow \vdash C$

Dilema constructivo: $\vdash A \vee B$ y $\vdash A \rightarrow C$ y $\vdash B \rightarrow D \Rightarrow \vdash C \vee D$

Exportación: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$

Disyunción en el antecedente: $\vdash (A \vee B) \rightarrow C) \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow C$ y $\vdash B \rightarrow C$

Prueba: Todos son resultados muy conocidos de LCP. Para detalles de las pruebas, véanse Caicedo (1990) y Hamilton (1981).

Proposición 2. *Afirmar es determinar, negar es determinar*

a. $A \rightarrow A^C$

b. $\neg A \rightarrow A^C$

Prueba: Para la parte a, por Ax0.3 se tiene $A \rightarrow (A \vee \neg A)$, y por Ax1.1 se tiene $(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$, utilizando silogismo hipotético, se infiere $A \rightarrow A^C$.

Para la parte b, por Ax0.4 se tiene $\neg A \rightarrow (A \vee \neg A)$, y por Ax1.1 se tiene $(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$, utilizando silogismo hipotético, se infiere $\neg A \rightarrow A^C$.

Proposición 3. *Trivialización con la negación fuerte*

$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$

Prueba: Supóngase que se tienen A y ~A. Por la definición de la negación fuerte al tener ~A resulta $A^C \rightarrow \neg A$. Por la proposición 2a se tiene $A \rightarrow A^C$, y al tener A se infiere A^C, lo cual junto con $A^C \rightarrow \neg A$ permite inferir $\neg A$. Por introducción de la conjunción se obtiene $A \wedge \neg A$, y como por Ax1.2 se tiene $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$, entonces resulta B. Por lo tanto, de A y ~A se infiere B. Aplicando dos veces el teorema de deducción, se concluye $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$.

Proposición 4. *Tercero excluido*

$(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$

Prueba: Se supone $\sim A \rightarrow A$ y se debe probar A. Utilizando la definición de negación fuerte se tiene $(A^C \rightarrow \neg A) \rightarrow A$. Por Ax0.5 se tiene $(A \rightarrow A) \rightarrow \{[(A^I \wedge -A) \rightarrow A] \rightarrow [(A \vee (A^I \wedge -A)) \rightarrow A]\}$, pero por la proposición 1, el principio de identidad, se tiene $A \rightarrow A$, resultando que $[(A^I \wedge -A) \rightarrow A] \rightarrow [(A \vee (A^I \wedge -A)) \rightarrow A]$. Por Ax3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \rightarrow (-A \rightarrow \neg A)$, utilizando exportación y conmutatividad se infiere $(A^I \wedge -A) \rightarrow (A^C \rightarrow \neg A)$. Se tienen $(A^I \wedge -A) \rightarrow (A^C \rightarrow \neg A)$ y $(A^C \rightarrow \neg A) \rightarrow A$, utilizando silogismo hipotético resulta $(A^{I}\wedge -A)\rightarrow A$. Como también se tiene $[(A^{I}\wedge -A)\rightarrow A]\rightarrow[(A\vee(A^{I}\wedge -A))\rightarrow A]$, entonces se infiere $(A\vee(A^{I}\wedge -A))\rightarrow A$, pero el antecedente de este condicional es Ax2.2, por lo que resulta A. Por lo tanto, de $\sim A\rightarrow A$ se sigue A, lo cual por el teorema de deducción significa $(\sim A\rightarrow A)\rightarrow A$.

Proposición 5. *La negación fuerte se comporta como la clásica*

Los teoremas del cálculo proposicional clásico que involucren la negación clásica son teoremas del sistema LBPcPo cuando se cambia la negación clásica por la negación fuerte.

Prueba: Basta notar que el cálculo proposicional clásico puede ser axiomatizado por Ax0.1, …, Ax0.12, proposición 4 y proposición 3. Para los detalles véase Tarski (1983).

2. Semántica para LBPcPo

Una *valuación* v es una función que interpreta las fórmulas atómicas como elementos del conjunto {0, 1}. La valuación v se extiende a una función V que interpreta las fórmulas de LBPcPo en el conjunto {0, 1} de la siguiente manera:

Si p es atómica entonces $V(p) = v(p)$

$V\wedge$. $V(A\wedge B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$

$V\vee$. $V(A\vee B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(B) = 0$

$V\rightarrow$. $V(A\rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$

$V\leftrightarrow$. $V(A\leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = V(B)$

VC. $V(A^{C}) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$

$V\neg$. $V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0$

VI. $V(A^{I}) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(-A) = 1$

V-. $V(-A) = 0 \Rightarrow V(A) = 1$

Se dice que una fórmula A es *válida*, denotado $\models A$, si y solamente si para toda valuación v, $V(A) = 1$.

Proposición 6. *La negación fuerte es clásica*

V~. $V(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$

Prueba: Supóngase que existe una valuación v tal que, $V(\sim A) = 1$ y $V(A) = 1$. Por la definición de negación fuerte se tiene que $V(A^{C}\rightarrow\neg A) = 1$, y entonces de acuerdo a $V\rightarrow$, $V(A^{C}) = 0$ o $V(\neg A) = 1$. Como $V(A) = 1$ por $V\neg$ resulta que $V(\neg A) = 0$. De los dos últimos resultados se obtiene que $V(A^{C}) = 0$, lo cual por VC implica que $V(A) = 0$. Como el último resultado es imposible, se ha probado que, $V(\sim A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0$.

Para probar la recíproca, supóngase que existe una valuación v tal que, $V(A) = 0$ y $V(\sim A) = 0$. Al ser $V(\sim A) = 0$, por la definición de negación fuerte se tiene que $V(A^{C}\rightarrow\neg A) = 0$, y por $V\rightarrow$ resulta $V(A^{C}) = 1$ y $V(\neg A) = 0$. Al tener $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$, por VC se obtiene que $V(A^{C}) = 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $V(A) = 0 \Rightarrow V(\sim A) = 1$.

Proposición 7. *Afirmación alterna, completez alterna*

V+. $V(+A) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$

V*. $V(*A) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = V(\neg A) = 0$

Prueba: Sea v una valuación arbitraria tal que, $V(+A) = 1$. Por la definición de afirmación alterna se tiene que $V(\sim -A) = 1$, y utilizando V~ resulta que $V(-A) = 0$. Aplicando la definición V- se infiere que $V(A) = 1$. Por lo tanto, $V(+A) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$.

Para la segunda parte, por la definición de completez alterna, $V(*A) = 0$ significa $V(+A\vee\neg A) = 0$, lo cual por $V\vee$ es equivalente a $V(+A) = V(\neg A) = 0$. Por lo tanto, $V(*A) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = V(\neg A) = 0$.

En la proposición 19 se prueba que la semántica presentada caracteriza al sistema deductivo LBPcPo, para esto se deben garantizar dos puntos, validez y completitud. El primero dice que todos los teoremas del sistema sean válidos, esto se logra con la proposición 11. El segundo dice que todos los enunciados válidos sean teoremas, esto se logra con la proposición 18. Lo anterior significa que los teoremas del sistema son las fórmulas válidas y solamente ellas.

3. Validez de LBPcPo

Proposición 8. *Validez de los axiomas positivos*
Los axiomas Ax0.1, …, Ax0.12 son válidos.

Prueba: Estos son resultados bien conocidos de la LCP. Para detalles de las pruebas véase a Sierra (2005).

Proposición 9. *Validez de los axiomas para los nuevos operadores*

Ax1.1, Ax1.2, Ax2.1, Ax2.2 y Ax3.1 son válidos.

Prueba: Supóngase que Ax1.1 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A\vee\neg A)\rightarrow A^C) = 0$, es decir según $V\rightarrow$, $V(A\vee\neg A) = 1$ y $V(A^C) = 0$. Al ser $V(A^C) = 0$, por VC, se tiene que $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$, pero esto según $V\vee$, significa que $V(A\vee\neg A) = 0$ lo cual es imposible. Por lo tanto, Ax1.1 es válido.

Supóngase que Ax1.2 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A\wedge\neg A)\rightarrow B) = 0$, es decir según $V\rightarrow$, $V(A\wedge\neg A) = 1$. Se tiene entonces por $V\wedge$ que $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$. Al ser $V(\neg A) = 1$, de acuerdo a $V\neg$ resulta que $V(A) = 0$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, Ax1.2 es válido.

Supóngase que Ax2.1 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A\wedge -A)\vee A^I) = 0$, es decir según $V\vee$, $V(A\wedge -A) = 0$ y $V(A^I) = 0$. Al ser $V(A^I) = 0$, por VI, se tiene que $V(A) = 1$ y $V(-A) = 1$, es decir según $V\wedge$, $V(A\wedge -A) = 1$, lo cual es imposible. Por lo tanto, Ax2.1 es válido.

Supóngase que Ax2.2 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V(A\vee(A^I\wedge -A)) = 0$, por $V\vee$ se tiene $V(A) = 0$ y $V(A^I\wedge -A) = 0$. Como $V(A) = 0$ por V- resulta que $V(-A) = 1$. Como $V(A^I\wedge -A) = 0$ según $V\wedge$ resulta que $V(A^I) = 0$ o $V(-A) = 0$, pero al ser $V(-A) = 1$ se infiere que $V(A^I) = 0$. Este resultado, según VI indica que $V(A) = 1$, lo cual contradice el que $V(A) = 0$. Por lo tanto, Ax2.2 es válido.

Supóngase que Ax3.1 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, $V((A^I\wedge A^C)\rightarrow (-A\rightarrow\neg A)) = 0$, por $V\rightarrow$ se obtienen $V(A^I\wedge A^C) = 1$ y $V(-A\rightarrow\neg A) = 0$, por $V\wedge$ y $V\rightarrow$ se infieren $V(A^I) = 1$, $V(A^C) = 1$, $V(-A) = 1$ y $V(\neg A) = 0$. Al tener $V(A^I) = 1$ y $V(-A) = 1$, por VI se obtiene que $V(A) = 0$, pero como $V(A^C) = 1$, por VC resulta que $V(\neg A) = 1$, lo cual es imposible ya que $V(\neg A) = 0$. Por lo tanto, Ax3.1 es válido.

Proposición 10. *Modus Ponens preserva validez*
Sean A y B fórmulas de LBPcPo. Si A y $A\rightarrow B$ son válidas entonces B también es válida.

Prueba: Sean A y B fórmulas de LBPcPo tales que A y $A\rightarrow B$ son válidas, y sea v una valuación arbitraria. Se tiene entonces que $V(A) = V(A\rightarrow B) = 1$, y no puede ocurrir que $V(B) = 0$, ya que al ser $V(A) = 1$, según $V\rightarrow$, se tendría que $V(A\rightarrow B) = 0$. Se concluye que para toda valuación v, $V(B) = 1$, es decir B también es válida.

Proposición 11. *Validez*
Todo teorema de LBPcPo es válido.

Prueba: Sea A un teorema de LBPcPo. Se prueba la validez de A, por inducción sobre el número de fórmulas de LBPcPo, que figuran en la sucesión finita que constituya una demostración de A en LBPcPo.

Para el paso base, supóngase que la demostración de A consta de una sola fórmula, la propia A, entonces A tiene que ser un axioma de LBPcPo, y se tiene por las proposiciones 8 y 9 que todos los axiomas de LBPcPo son fórmulas válidas.

Supóngase ahora que la demostración de A contiene n fórmulas, siendo $n > 1$, y supóngase como hipótesis de inducción que todos los teoremas de LBPcPo que poseen demostraciones de menos de n pasos son fórmulas válidas. O bien A es un axioma, en cuyo caso A es una fórmula válida, o A se deduce mediante MP de dos fórmulas anteriores en la demostración. Estas dos fórmulas deberían tener las formas B y $B\rightarrow A$. Pero B y $B\rightarrow A$ son teoremas de LBPcPo cuyas demostraciones son sucesiones de menos de n fórmulas. Así pues, B y $B\rightarrow A$ son fórmulas válidas por hipótesis de inducción, y de este modo, puesto que, según la proposición 10, MP preserva validez, A es una fórmula válida.

De esta forma, por el principio de inducción matemática, todo teorema de LBPcPo es una fórmula válida.

4. Completitud de LBPcPo

Para la prueba de completitud se siguen las directrices dadas por Henkin (1949), con el fin de probar la completitud de la lógica de primer orden.

Una *extensión* de un sistema deductivo se obtiene alterando o ampliando el conjunto de axiomas de manera que todos los teoremas del sistema sigan siendo teoremas. Mientras no se diga lo contrario, se trabajará con extensiones de LBPcPo pero el conjunto de fórmulas no se cambiará, por lo que se dirá simplemente fórmulas o fórmulas de LBPcPo cuando se quiera hacer referencia a las fórmulas de una extensión de LBPcPo.

Una extensión es *consistente* si no existe ninguna fórmula A tal que tanto A como ~A sean teoremas de la extensión. Una extensión es *completa* si para toda fórmula A, o bien A o bien ~A es teorema de la extensión.

Proposición 12. *Consistencia*

LBPcPo es consistente.

Prueba: Supóngase que LBPcPo no fuese consistente, por lo que debe existir una fórmula A tal que tanto A como ~A sean teoremas. Entonces por la proposición 11, tanto A como ~A son fórmulas válidas, pero esto es imposible, ya que si ~A es una fórmula válida, entonces para toda valuación v, V(~A) = 1, es decir, según la proposición 6, V(A) = 0, por lo que A no puede ser válida, lo cual no es el caso. Por lo tanto, LBPcPo es consistente.

Proposición 13. *Extensión consistente*

Sea E una extensión de LBPcPo y sea A una fórmula que no sea teorema de E. Entonces E* es también consistente, siendo E* la extensión de LBPcPo obtenida añadiendo ~A como nuevo axioma a E.

Prueba: Sea A una fórmula LBPcPo que no es teorema de E, y sea E* la extensión obtenida añadiendo ~A como nuevo axioma a E. Supóngase que E* es inconsistente. Entonces, para alguna fórmula B, tanto B como ~B son teoremas de E*. Ahora bien, por la proposición 3 se tiene que B→(~B→A) es teorema de LBPcPo y por lo tanto de E*, aplicando dos veces MP se obtiene que A es teorema de E*. Pero E* tan sólo se diferencia de E en que tiene ~A como axioma adicional, así que 'A es un teorema de E*' es equivalente a 'A es un teorema de E a partir del conjunto {~A}' (Una demostración en E* es justamente una deducción a partir de ~A en E). Por el teorema de deducción resulta que ~A→A es un teorema de E. Como por la proposición 4 se tiene que (~A→A)→A es teorema de LBPcPo (y por lo tanto de E), entonces utilizando MP, A también es teorema de E, lo cual es imposible. Por lo tanto, E* es consistente.

En la proposición 14 se presentan algunas reglas derivadas que se requieren para la prueba de completitud. Todas ellas son resultados bien conocidos de la lógica clásica, y se tienen como consecuencia de la proposición 5. Para detalles de las pruebas véanse en Caicedo (1990) y en Hamilton (1981).

Proposición 14. *Reglas de inferencia para la negación fuerte*

Silogismo disyuntivo: (├ A∨B y ├ ~A) ⇒ ├ B.

Demostración indirecta: ├ A→(B∧~B) ⇒ ├ ~A. ├ ~A→(B∧~B) ⇒ ├ A.

Doble negación: ├ A ⇔ ├ ~~A.

Negación de la disyunción: ├ ~(A∨B) ⇔ ├ ~A∧~B.

Negación de la conjunción: ├ ~(A∧B) ⇔ ├ ~A∨~B.

Negación del condicional: ├ ~(A→B) ⇔ ├ A∧~B.

Transposición: ├ A→B ⇔ ├ ~B→~A.

Modus Tollens MT: (├ A→B y ├ ~B) ⇒ ├ ~A.

Implicación material: $\vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \vdash \sim A \vee B$.

Equivalencia material: $\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$.

Transposición en la equivalencia: $\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash \sim A \leftrightarrow \sim B$.

Dilema destructivo: $(\vdash \sim B \vee \sim D,\ \vdash A \rightarrow B$ y $\vdash C \rightarrow D) \Rightarrow \vdash \sim A \vee \sim C$.

Proposición 15. *Disyunción y Equivalencia en las extensiones completas.*

Si J es una extensión consistente y completa de LBPcPo, entonces:

a. $\vdash_J A \vee B \Leftrightarrow (\vdash_J A$ o $\vdash_J B)$

b. $\vdash_J A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J B)$

Prueba: Para la parte a, supóngase que $\vdash_J A \vee B$ pero no $\vdash_J A$ y no $\vdash_J B$, entonces se tendría que $\vdash_J \sim A$ al ser J completa. Al tener $\vdash_J A \vee B$ y $\vdash_J \sim A$, por silogismo disyuntivo, se infiere $\vdash_J B$, pero se supuso que no. Por lo tanto, $\vdash_J A \vee B \Rightarrow (\vdash_J A$ o $\vdash_J B)$. La recíproca es aplicación inmediata de la introducción de la disyunción.

Para la parte b, supóngase que $A \leftrightarrow B$ es un teorema de J, entonces, utilizando Ax0.9 y Ax0.10, también lo son $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$. Si A fuese teorema de J entonces por MP también lo sería B, es decir, $\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B$. De igual forma se prueba que $\vdash_J B \Rightarrow \vdash_J A$.

Para la recíproca supóngase que $\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J B$, por lo que $\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B$, y supóngase que no se tiene $\vdash_J A \rightarrow B$. Al ser J completa resulta que $\vdash_J \sim(A \rightarrow B)$, lo cual por negación del condicional significa que $\vdash_J A \wedge \sim B$ y por eliminación de la conjunción se obtienen $\vdash_J A$ y $\vdash_J \sim B$. Al tener $\vdash_J A$ y $(\vdash_J A \Rightarrow \vdash_J B)$, se infiere $\vdash_J B$, lo cual es imposible ya que $\vdash_J \sim B$ y J es consistente. De igual forma se prueba $\vdash_J B \rightarrow A$, y con Ax0.11 se obtiene $\vdash_J A \leftrightarrow B$.

Proposición 16. *Extensión consistente y completa*

Sea E una extensión consistente de LBPcPo. Entonces existe una extensión consistente y completa de E.

Prueba: Sea $A_0, A_1, A_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de LBPcPo. Se construye una sucesión $J_0, J_1, J_2, \ldots$ de extensiones de E como sigue:

Sea $J_0 = E$. Si A_0 es teorema de J_0, sea $J_1 = J_0$. En caso contrario añádase $\sim A_0$ como nuevo axioma para obtener J_1 a partir de J_0.

En general, dado $n \geq 1$, para construir J_n a partir de J_{n-1}, se procede de la siguiente manera: si A_{n-1} es teorema de J_{n-1}, entonces $J_n = J_{n-1}$, en caso contrario, sea J_n la extensión de J_{n-1} obtenida añadiendo $\sim A_{n-1}$ como nuevo axioma.

E es consistente, es decir, J_0 es consistente por hipótesis. Dado $n \geq 1$, si J_{n-1} es consistente, entonces, por la proposición 13, J_n es consistente. Así pues, por inducción, todo J_n es consistente. Se define ahora J, como aquella extensión de E, la cual tiene como axiomas a aquellas fórmulas que son axiomas de al menos uno de los J_n.

Se probará que J es consistente. Supóngase lo contrario. Entonces, existe una fórmula A tal que, tanto A como $\sim A$ son teoremas de J. Ahora bien, las demostraciones de A y $\sim A$ en J son sucesiones finitas de fórmulas, de modo que cada demostración solamente puede contener casos particulares de un número finito de axiomas de J. Por lo que, debe existir un n suficientemente grande, para que todos estos axiomas utilizados sean axiomas de J_n. Se deduce que tanto A como $\sim A$ son teoremas de J_n, lo cual es imposible ya que Jn es consistente. Por lo tanto J es consistente.

Para probar que J es completo, sea A una fórmula de LBPcPo. A debe aparecer en la lista $A_0, A_1, A_2, \ldots$, supóngase que A es A_k. Si A_k es teorema de J_k, entonces A_k también es teorema de J, puesto que J es una extensión de J_k. Si A_k no es teorema de J_k, entonces de acuerdo con la construcción de J_{k+1}, $\sim A_k$ es un axioma de J_{k+1}, con lo que $\sim A_k$ es teorema de J_{k+1}, y entonces $\sim A_k$ también es teorema de J. Así, en todo caso se tiene que A_k es teorema de J o $\sim A_k$ es teorema de J, con lo que J es completo.

Proposición 17. *Valuación asociada a una extensión*

Si E es una extensión consistente de LBPcPo, entonces existe una valuación en la cual todo teorema de E toma el valor 1.

Prueba: Se define V sobre las fórmulas de LBPcPo haciendo: $V(A) = 1$ si $\vdash_J A$, y $V(A) = 0$ si $\vdash_J \sim A$, donde J es una extensión consistente y completa de E, como la dada en la proposición 16. Nótese que V está definida sobre todas las fórmulas, por ser J completa. Ahora bien, ya que J es consistente, entonces $V(A) \neq V(\sim A)$ y por lo tanto, $V(A) = 1 \Leftrightarrow V(\sim A) = 0$ para toda fórmula A, por lo que se satisface la definición $V\sim$.

Para el caso del condicional, utilizando la negación del condicional, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A\rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim(A\rightarrow B) \Leftrightarrow\ \vdash_J A\wedge\sim B \Leftrightarrow (\vdash_J A$ y $\vdash_J \sim B) \Leftrightarrow (V(A) = 1$ y $V(B) = 0)$, por lo que se satisface la definición $V\rightarrow$.

Para el caso de la conjunción, utilizando la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A\wedge B) = 1 \Leftrightarrow\ \vdash_J A\wedge B \Leftrightarrow (\vdash_J A$ y $\vdash_J B) \Leftrightarrow (V(A) = 1$ y $V(B) = 1)$, por lo que se satisface la definición $V\wedge$.

Para el caso de la disyunción, utilizando la proposición 15, disyunción en las extensiones completas, se tiene que $V(A\vee B) = 1 \Leftrightarrow\ \vdash_J A\vee B \Leftrightarrow (\vdash_J A$ o $\vdash_J B) \Leftrightarrow (V(A) = 1$ o $V(B) = 1)$, por lo que se satisface la definición $V\vee$.

Para el caso de bicondicional, utilizando la proposición 15, equivalencia en las extensiones completas, se tiene que $V(A\leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow\ \vdash_J A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\vdash_J A \Leftrightarrow\ \vdash_J B) \Leftrightarrow (V(A) = 1 \Leftrightarrow V(B) = 1) \Leftrightarrow V(A) = V(B)$, por lo que se satisface la definición $V\leftrightarrow$.

Para el caso de la determinabilidad. Supóngase que $V(A^C) = 0$, por la definición de V resulta $\vdash_J \sim A^C$, como por Ax1.1 se tiene $\vdash_J (A\vee\neg A)\rightarrow A^C$, entonces por *modus tollens* se infiere $\vdash_J \sim(A\vee\neg A)$, y por negación de la disyunción resultan $\vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim\neg A$, utilizando la definición de V se obtienen $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$. Se ha probado entonces que, $V(A^C) = 0 \Rightarrow (V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0)$.

Para probar la recíproca supóngase que $V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$. Por la definición de V resultan $\vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim\neg A$, y por la definición de negación fuerte se obtiene que $\vdash_J A^C\rightarrow\neg A$. Por modus tollens se infiere $\vdash_J \sim A^C$, lo que por la definición de V es $V(A^C) = 0$. Por lo tanto, $(V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0) \Rightarrow V(A^C) = 0$.

Se ha probado entonces que $V(A^C) = 0 \Leftrightarrow (V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0)$, por lo que se satisface la definición VC.

Para el caso de la primera negación alterna, supóngase que $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$. Por la definición de V resultan $\vdash_J A$ y $\vdash_J \neg A$, y por introducción de la conjunción se infiere $\vdash_J A\wedge\neg A$. Por Ax1.2 se tiene $\vdash_J (A\wedge\neg A)\rightarrow\sim A$, y por modus ponens resulta $\vdash_J \sim A$, lo cual es imposible ya que $\vdash_J A$ y J es consistente. Por lo tanto, $V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0$, por lo que se satisface la definición $V\neg$.

Para el caso de la incompatibilidad. Supóngase que $V(A^I) = 0$, por la definición de V resulta $\vdash_J \sim A^I$, y como por Ax2.1 se tiene $\vdash_J (A\wedge\text{-}A)\vee A^I$, entonces, por silogismo disyuntivo se infiere $\vdash_J (A\wedge\text{-}A)$, por eliminación de la conjunción se obtienen $\vdash_J A$ y $\vdash_J \text{-}A$, finalmente por la definición de V se concluyen $V(A) = 1$ y $V(\text{-}A) = 1$. De esta forma, se ha probado que $V(A^I) = 0 \Rightarrow (V(A) = 1$ y $V(\text{-}A) = 1)$.

Para probar la recíproca supóngase que $V(A) = 1$ y $V(\text{-}A) = 1$, pero que $V(A^I) = 1$. Por la definición de V resultan $\vdash_J A$, $\vdash_J \text{-}A$ y $\vdash_J A^I$, Por la proposición 2a se tiene $\vdash_J A\rightarrow A^C$, por lo que se infiere $\vdash_J A^C$, y por introducción de la conjunción resulta $\vdash_J A^I\wedge A^C\wedge\text{-}A$. Por Ax3.1 se tiene $\vdash_J (A^I\wedge A^C)\rightarrow(\text{-}A\rightarrow\neg A)$, lo cual por exportación genera $\vdash_J (A^I\wedge A^C\wedge\text{-}A)\rightarrow\neg A$, como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\vdash_J \neg A$, y por introducción de la conjunción se obtiene $\vdash_J A\wedge\neg A$. Por Ax1.2 se tiene $\vdash_J (A\wedge\neg A)\rightarrow\sim\neg A$, y como se tiene $\vdash_J A\wedge\neg A$, entonces resulta $\vdash_J \sim\neg A$, y como también se tiene $\vdash_J \neg A$, resulta que J es inconsistente, lo cual no es el caso. Por lo tanto, $(V(A) = 1$ y $V(\text{-}A) = 1) \Rightarrow V(A^I) = 0$.

Se ha probado entonces que, $V(A^I) = 0 \Leftrightarrow (V(A) = 1$ y $V(-A) = 1)$, por lo que se satisface la definición VI.

Para el caso de la segunda negación alterna, supóngase que $V(A) = 0$. Por la definición de V resulta $\vdash_J \sim A$, y como por Ax2.2 se tiene $\vdash_J A \vee (A^I \wedge -A)$, utilizando silogismo disyuntivo resulta $\vdash_J A^I \wedge -A$, y por eliminación de la conjunción se infiere $\vdash_J -A$. Por la definición de V resulta $V(-A) = 1$. Se tiene entonces que $V(A) = 0 \Rightarrow V(-A) = 1$, por lo que se satisface la definición V-.

Con base en el análisis anterior se concluye finalmente que V es una valuación.

Sea ahora A un teorema de E. Entonces $\vdash_J A$, donde J es una extensión consistente y completa de E. Por lo tanto, $V(A) = 1$.

Proposición 18. *Completitud*

Sea A es una fórmula de LBPcPo, si A es válida entonces A es un teorema.

Prueba: Sea A una fórmula de LBPcPo. Si A no es un teorema, entonces, por la proposición 13, la extensión E, obtenida añadiendo ~A como nuevo axioma, es consistente. Así pues, según la proposición 17, existe una valuación V que da a todo teorema de E el valor 1, y como ~A es un teorema de E entonces, $V(\sim A) = 1$, es decir, $V(A) = 0$, y por lo tanto, A no es válida. Se ha probado de esta forma que, si A no es un teorema entonces A no es válida, o dicho de otra manera, si A es válida entonces A es un teorema.

Proposición 19. *Caracterización semántica*

Sea A es una fórmula de LBPcPo, A es válida si y solamente si A es un teorema.

Prueba: consecuencia de las proposiciones 11 y 18.

5. Características del sistema

Grana (1990) muestra que un sistema deductivo es *paracompleto respecto al operador de negación* ¬, si existe una fórmula y una valuación tal que tanto la fórmula como su negación son falsas. Para probar que un sistema es *paracompleto respecto al operador* ¬, basta probar que no tiene como teorema la fórmula $A \vee \neg A$, es decir que $A \vee \neg A$ no es válida.

De manera similar, un sistema deductivo es *paraconsistente respecto al operador de negación* -, si permite que de algún conjunto de fórmulas se tengan como consecuencia alguna fórmula A y su negación -A y que exista al menos una fórmula B que no sea consecuencia de dicho conjunto de fórmulas. Para probar que un sistema es *paraconsistente respecto al operador* -, basta probar que no tiene como teorema la fórmula $A \rightarrow (-A \rightarrow B)$.

Proposición 20. *Paracompletez de LBPcPo*

El sistema LBPcPo es *paracompleto respecto al operador* ¬.

Prueba: La valuación v, tal que $V(A) = V(\neg A) = 0$, hace que $V(A \vee \neg A) = 0$. Por lo que, $A \vee \neg A$ no es válida, y por lo tanto no es teorema.

Proposición 21. *Paraconsistencia de LBPcPo*

El sistema LBPcPo es *paraconsistente respecto al operador* -.

Prueba: La valuación v tal que $V(A) = V(-A) = 1$ y $V(B) = 0$, hace que $V(A \rightarrow (-A \rightarrow B)) = 0$. Por lo que, $A \rightarrow (-A \rightarrow B)$ no es válida, y por lo tanto no es teorema.

Proposición 22. *Caracterización de C*

a. $A^C \leftrightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$
b. $\neg A \rightarrow \sim A$
c. $\sim A$ no implica $\neg A$

Prueba: Para la parte a, supóngase A^C y $\sim A$. Por Ax2.2 se tiene $A \vee (A^I \wedge -A)$, y como se tiene ~A, por silogismo disyuntivo se infiere $A^I \wedge -A$, lo cual por eliminación de la conjunción genera A^I y $-A$. Por Ax3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \rightarrow (-A \rightarrow \neg A)$, pero al tener A^C y

A^I, por introducción de la conjunción resulta $A^I \wedge A^C$, por lo que se infiere $-A \rightarrow \neg A$, pero como se tiene el antecedente, entonces se deduce el consecuente $\neg A$. Aplicando dos veces el teorema de deducción se concluye que $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$.

Para la recíproca, supóngase que $\sim A \rightarrow \neg A$ y $\sim A^C$. Por Ax1.1 se tiene $(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$, y al tener $\sim A^C$ se infiere $\sim(A \vee \neg A)$, aplicando negación de la disyunción resultan $\sim A$ y $\sim\neg A$. Al tener $\sim A \rightarrow \neg A$ y $\sim A$ se infiere $\neg A$. Por la introducción de la conjunción se obtiene $\neg A \wedge \sim\neg A$. Por lo que, según el teorema de deducción de $\sim A \rightarrow \neg A$ se sigue $\sim A^C \rightarrow (\neg A \wedge \sim\neg A)$. Por lo tanto, gracias a la proposición 14, demostración indirecta, se ha probado que bajo el supuesto $\sim A \rightarrow \neg A$ se infiere A^C. Utilizando el teorema de deducción se obtiene $(\sim A \rightarrow \neg A) \rightarrow A^C$.

En resumen, se tienen $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$ y $(\sim A \rightarrow \neg A) \rightarrow A^C$. Utilizando Ax0.11 se infiere $A^C \leftrightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$.

Para la parte b, supóngase $\neg A$ y A. Por introducción de la conjunción resulta $A \wedge \neg A$, y como por Ax1.2 se tiene $(A \wedge \neg A) \rightarrow \sim A$, entonces se infiere $\sim A$. Por introducción de la conjunción se obtiene $A \wedge \sim A$. Utilizando el teorema de deducción resulta que de $\neg A$ se sigue $A \rightarrow (A \wedge \sim A)$. Utilizando demostración indirecta se tiene que de $\neg A$ se sigue $\sim A$, y por teorema de deducción queda probado $\neg A \rightarrow \sim A$.

Para la parte c, la valuación v tal que $V(A) = V(\neg A) = 0$, hace que $V(\sim A \rightarrow \neg A) = 0$. Por lo que, $\sim A \rightarrow \neg A$ no es válida, y por lo tanto no es teorema.

Proposición 23. *Caracterización de I*

a. $A^I \leftrightarrow (-A \rightarrow \sim A)$

b. $\sim A \rightarrow -A$

c. $-A$ no implica $\sim A$

d. $A^I \leftrightarrow (A \rightarrow +A)$

e. $+A \rightarrow A$

f. A no implica $+A$

Prueba: Para la parte a, supóngase A^I, $-A$, A^C. Por introducción de la conjunción se obtiene $A^I \wedge A^C$, por Ax3.1 se tiene $(A^I \wedge A^C) \rightarrow (-A \rightarrow \neg A)$, por lo que se infiere $-A \rightarrow \neg A$, y como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\neg A$. Aplicando 3 veces el teorema de deducción resulta $A^I \rightarrow (-A \rightarrow (A^C \rightarrow \neg A)$, finalmente utilizando la definición de negación fuerte se concluye $A^I \rightarrow (-A \rightarrow \sim A)$.

Para la recíproca, supóngase $-A \rightarrow \sim A$ y $\sim A^I$. Por Ax2.1 se tiene $(A \wedge -A) \vee A^I$, y al tener $\sim A^I$, por conmutatividad y silogismo disyuntivo resulta $A \wedge -A$. Por eliminación de la conjunción resultan A y $-A$.

De $-A$ y $-A \rightarrow \sim A$ se infiere $\sim A$. Por la introducción de la conjunción se tiene $A \wedge \sim A$. Por lo que, según el teorema de deducción de $-A \rightarrow \sim A$ se sigue $\sim A^I \rightarrow (A \wedge \sim A)$. Por lo tanto, gracias a la proposición 14, demostración indirecta, se ha probado que bajo el supuesto $-A \rightarrow \sim A$ se infiere A^I. Utilizando el teorema de deducción se obtiene $(-A \rightarrow \sim A) \rightarrow A^I$.

En resumen, se tienen $A^I \rightarrow (-A \rightarrow \sim A)$ y $(-A \rightarrow \sim A) \rightarrow A^I$. Utilizando Ax0.11 se infiere $A^I \leftrightarrow (-A \rightarrow \sim A)$.

Para la parte b, supóngase $\sim A$. Puesto que por Ax2.2 se tiene $A \vee (A^I \wedge -A)$, utilizando silogismo disyuntivo se obtiene $A^I \wedge -A$. Por conmutatividad y eliminación de la conjunción se infiere –A. Por el teorema de deducción se ha probado $\sim A \rightarrow -A$.

Para la parte c, la valuación v tal que $V(A) = V(-A) = 1$, hace que $V(-A \rightarrow \sim A) = 0$. Por lo que, $-A \rightarrow \sim A$ no es válida, y por lo tanto no es teorema.

Las partes d, e y f, resultan de las partes a, b y c respectivamente utilizando transposición, doble negación y definición de la afirmación alterna.

Proposición 24. *Caracterización de **

a. $\neg A \rightarrow -A$

b. $+A \rightarrow \sim\neg A$

c. $-A$ no implica $\neg A$

d. $\sim\neg A$ no implica $+A$

e. $*A \leftrightarrow (-A \rightarrow \neg A)$

Prueba: Para la parte a, supóngase $\neg A$ y $\sim -A$. Por la definición de afirmación alterna resulta $+A$.

Por la proposición 23e, se tiene que $+A\to A$, por lo que se infiere A. Por introducción de la conjunción se obtiene $A\wedge\neg A$, y como por Ax1.2 se tiene que $(A\wedge\neg A)\to -A$ entonces se infiere $-A$. Utilizando dos veces el teorema de deducción se infiere $\neg A\to(\sim -A\to -A)$. Puesto que por la proposición 4 se tiene $(\sim -A\to -A)\to -A$, entonces, por silogismo hipotético, se concluye que $\neg A\to -A$.

La parte b, resulta de a, por transposición y definición de la afirmación alterna.

Para las partes c y d, basta considerar una asignación v tal que $V(-A) = 1$ y $V(\neg A) = 0$.

Para la parte e, por el principio de identidad y Ax0.11 se obtiene $*A\leftrightarrow *A$, aplicando la definición de completez alterna resulta $*A\leftrightarrow(+A\vee\neg A)$, por implicación material se infiere $*A\leftrightarrow(\sim +A\to\neg A)$, finalmente, por la definición afirmación alterna y doble negación se concluye $*A\leftrightarrow(-A\to\neg A)$.

Proposición 25. *Caracterización de la negación fuerte*

a. $(A^I\wedge -A)\leftrightarrow\sim A$

b. $(A^I\wedge -A)\leftrightarrow(A^C\to\neg A)$

Prueba: De la proposición 23a y Ax0.9 resulta $A^I\to(-A\to\sim A)$ y por exportación se infiere $(A^I\wedge -A)\to\sim A$. Para probar la recíproca supóngase $\sim A$. Con Ax0.1 se obtiene $-A\to\sim A$, lo cual por la caracterización de I dada en la proposición 23a, significa A^I. Por la proposición 23b se tiene $\sim A\to -A$, y como se tiene el antecedente se infiere $-A$. Por introducción de la conjunción resulta $A^I\wedge -A$. Por el teorema de deducción se tiene que $\sim A\to(A^I\wedge -A)$.

Al tener $(A^I\wedge -A)\to\sim A$ y $\sim A\to(A^I\wedge -A)$, utilizando Ax0.11 se concluye que $(A^I\wedge -A)\leftrightarrow\sim A$.

La parte b, se sigue de la parte a, al utilizar la definición de negación fuerte.

En la tabla 1 se presenta un paralelo entre algunas de las principales leyes lógicas que involucran la negación clásica, con las correspondientes leyes en LBPcPo.

Tabla 1. Comparación entre algunas leyes de la lógica clásica y las correspondientes en LBPcPo

$\sim(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)$	$\neg(A\wedge B)$ no implica $(\neg A\vee\neg B)$
	$-(A\wedge B)$ no implica $(-A\vee -B)$
	$[A^C\wedge B^C]\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$
	$(A\wedge B)^I\to[-(A\wedge B)\to(-A\vee -B)]$
$(\sim A\vee\sim B)\to\sim(A\wedge B)$	$(\neg A\vee\neg B)$ no implica $\neg(A\wedge B)$
	$(-A\vee -B)$ no implica $-(A\wedge B)$
	$(A\wedge B)^C\to[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]$
	$[A^I\wedge B^I]\to[(-A\vee -B)\to -(A\wedge B)]$
$\sim(A\wedge B)\leftrightarrow(\sim A\vee\sim B)$	$[(A\wedge B)^C\wedge A^C\wedge B^C]\to[\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)]$
	$[(A\wedge B)^I\wedge A^I\wedge B^I]\to[-(A\wedge B)\leftrightarrow(-A\vee -B)]$

$\sim(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)$	$\neg(A\vee B)$ no implica $(\neg A\wedge\neg B)$
	$-(A\vee B)$ no implica $(-A\wedge -B)$
	$[A^C\wedge B^C]\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$
	$(A\vee B)^I\to[-(A\vee B)\to(-A\wedge -B)]$
$(\sim A\wedge\sim B)\to\sim(A\vee B)$	$(\neg A\wedge\neg B)$ no implica $\neg(A\vee B)$
	$(-A\wedge -B)$ no implica $-(A\vee B)$
	$(A\vee B)^C\to[(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)]$
	$[A^I\wedge B^I]\to[(-A\wedge -B)\to -(A\vee B)]$

$\sim(A\vee B)\leftrightarrow(\sim A\wedge\sim B)$	$[(A\vee B)^C\wedge A^C\wedge B^C]\rightarrow[\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)]$
	$[(A\vee B)^I\wedge A^I\wedge B^I]\rightarrow[-(A\vee B)\leftrightarrow(-A\wedge -B)]$

$\sim(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)$	$\neg(A\rightarrow B)$ no implica $(A\wedge\neg B)$
	$-(A\rightarrow B)$ no implica $(A\wedge -B)$
	$B^C\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$
	$(A\rightarrow B)^I\rightarrow[-(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge -B)]$
$(A\wedge\sim B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$	$(A\wedge\neg B)$ no implica $\neg(A\rightarrow B)$
	$(A\wedge -B)$ no implica $-(A\rightarrow B)$
	$(A\rightarrow B)^C\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$
	$B^I\rightarrow[(A\wedge -B)\rightarrow -(A\rightarrow B)]$
$\sim(A\rightarrow B)\leftrightarrow(A\wedge\sim B)$	$[(A\rightarrow B)^C\wedge B^C]\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\leftrightarrow(A\wedge\neg B)]$
	$[(A\rightarrow B)^I\wedge B^I]\rightarrow[-(A\rightarrow B)\leftrightarrow(A\wedge -B)]$

$\sim\sim A\rightarrow A$	$\neg\neg A$ no implica A
	$--A$ no implica A
	$A^C\rightarrow(\neg\neg A\rightarrow A)$
	$(-A)^I\rightarrow(--A\rightarrow A)$
$A\rightarrow\sim\sim A$	A no implica $\neg\neg A$
	A no implica $--A$
	$(\neg A)^C\rightarrow(A\rightarrow\neg\neg A)$
	$A^I\rightarrow(A\rightarrow --A)$
$\sim\sim A\leftrightarrow A$	$[(\neg A)^C\wedge A^C]\rightarrow(\neg\neg A\leftrightarrow A)$
	$[(-A)^I\wedge A^I]\rightarrow(--A\leftrightarrow A)$

$(A\vee B)\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$	$(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$
	$(A\vee B)$ no implica $(-A\rightarrow B)$
	$A^I\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(-A\rightarrow B)]$
$(\sim A\rightarrow B)\rightarrow(A\vee B)$	$(\neg A\rightarrow B)$ no implica $(A\vee B)$
	$A^C\rightarrow[(\neg A\rightarrow B)\rightarrow(A\vee B)]$
	$(-A\rightarrow B)\rightarrow(A\vee B)$
$(A\vee B)\leftrightarrow(\sim A\rightarrow B)$	$A^C\rightarrow[(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\rightarrow B)]$
	$A^I\rightarrow[(A\vee B)\leftrightarrow(-A\rightarrow B)]$

$(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$	$(A\rightarrow B)$ no implica $(\neg B\rightarrow\neg A)$
	$(A\rightarrow B)$ no implica $(-B\rightarrow -A)$
	$A^C\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$
	$B^I\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(-B\rightarrow -A)]$
$(\sim B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)$	$(\neg B\rightarrow\neg A)$ no implica $(A\rightarrow B)$
	$(-B\rightarrow -A)$ no implica $(A\rightarrow B)$
	$B^C\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$
	$A^I\rightarrow[(-B\rightarrow -A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$

$(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$	$[B^{C}\wedge A^{C}]\rightarrow[(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$
	$[B^{I}\wedge A^{I}]\rightarrow[(A\rightarrow B)\leftrightarrow(-B\rightarrow -A)]$
$(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\sim B\leftrightarrow\sim A)$	$[B^{C}\wedge A^{C}]\rightarrow[(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\neg B\leftrightarrow\neg A)]$
	$[B^{I}\wedge A^{I}]\rightarrow[(A\leftrightarrow B)\rightarrow(-B\leftrightarrow -A)]$
$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(\sim B\leftrightarrow\sim A)$	$[B^{C}\wedge A^{C}]\rightarrow[(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\leftrightarrow\neg A)]$
	$[B^{I}\wedge A^{I}]\rightarrow[(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(-B\leftrightarrow -A)]$

$[(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\sim B)]\rightarrow\sim A$	$[(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)]$ no implica $\neg A$
	$[(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow -B)]$ no implica $-A$
	$A^{C}\rightarrow\{[(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)]\rightarrow\neg A\}$
	$B^{I}\rightarrow\{[(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow -B)]\rightarrow -A\}$
$[(\sim A\rightarrow B)\wedge(\sim A\rightarrow\sim B)]\rightarrow A$	$[(\neg A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow\neg B)]$ no implica A
	$[(-A\rightarrow B)\wedge(-A\rightarrow -B)]$ no implica A
	$A^{C}\rightarrow\{[(\neg A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow\neg B)]\rightarrow A\}$
	$B^{I}\rightarrow\{[(-A\rightarrow B)\wedge(-A\rightarrow -B)]\rightarrow A\}$

$(A\wedge\sim A)\rightarrow B$	$(A\wedge\neg A)\rightarrow B$
	$(A\wedge -A)$ no implica B
	$A^{I}\rightarrow[(A\wedge -A)\rightarrow B]$

$(\sim\sim A\wedge\sim A)\rightarrow B$	$(\sim A\wedge\sim\neg A)$ no implica B
	$A^{C}\rightarrow[(\sim A\wedge\sim\neg A)\rightarrow B]$
	$(\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow B$
	$(\sim A\wedge\sim -A)\rightarrow B$
	$(-A\wedge --A)$ no implica B
	$(-A)^{I}\rightarrow[(-A\wedge --A)\rightarrow B]$

La forma como se prueban estas reglas se ilustra con las pruebas de las *negaciones alternas de la conjunción*.

Proposición 26. *Negación paracompleta de la conjunción*

a. $\neg(A\wedge B)$ no implica $(\neg A\vee\neg B)$

b. $(\neg A\vee\neg B)$ no implica $\neg(A\wedge B)$

c. $[A^{C}\wedge B^{C}]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$

d. $(A\wedge B)^{C}\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$

e. $[(A\wedge B)^{C}\wedge A^{C}\wedge B^{C}]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)]$

Prueba: Para probar que $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(\neg(A\wedge B)) = 1$, $V(A) = 0$, $V(B) = 1$, $V(\neg A) = 0$ y $V(\neg B) = 0$. Para probar que $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(\neg(A\wedge B)) = 0$, $V(A) = 0$, $V(B) = 0$, $V(\neg A) = 1$ y $V(\neg B) = 1$.

Para probar $[A^{C}\wedge B^{C}]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$, gracias al teorema de deducción y a las reglas de conmutatividad y de eliminación de la conjunción basta con probar que, de A^{C}, B^{C} y $\neg(A\wedge B)$ se infiere $\neg A\vee\neg B$. Por la proposición 22b se tiene $\neg(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$, como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\sim(A\wedge B)$. Por negación de la conjunción se obtiene $\sim A\vee\sim B$. De la proposición 22a se tienen $A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$ y $B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$, y como se tienen los antecedentes, se infieren

$\sim A \rightarrow \neg A$ y $\sim B \rightarrow \neg B$. Se tienen $\sim A \vee \sim B$, $\sim A \rightarrow \neg A$ y $\sim B \rightarrow \neg B$, utilizando dilema constructivo se concluye $\neg A \vee \neg B$.

Para probar $(A \wedge B)^C \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg (A \wedge B)]$, gracias al teorema de deducción basta con probar que, de $(A \wedge B)^C$ y $\neg A \vee \neg B$ se infiere $\neg (A \wedge B)$. Por la proposición 22b se tienen $\neg A \rightarrow \sim A$ y $\neg B \rightarrow \sim B$, y como se tiene $\neg A \vee \neg B$, por dilema constructivo se infiere $\sim A \vee \sim B$. Por negación de la conjunción se obtiene $\sim (A \wedge B)$. De la proposición 22a se tiene $(A \wedge B)^C \rightarrow (\sim (A \wedge B) \rightarrow \neg (A \wedge B))$, como se tiene el antecedente, se infiere $\sim (A \wedge B) \rightarrow \neg (A \wedge B)$. De nuevo se tiene el antecedente, por lo que se sigue $\neg (A \wedge B)$.

La prueba de $[(A \wedge B)^C \wedge A^C \wedge B^C] \rightarrow [\neg (A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ es consecuencia inmediata de las dos pruebas anteriores.

Proposición 27. *Negación paraconsistente de la conjunción*

a. $-(A \wedge B)$ no implica $(-A \vee -B)$

b. $(-A \vee -B)$ no implica $-(A \wedge B)$

c. $(A \wedge B)^I \rightarrow [-(A \wedge B) \rightarrow (-A \vee -B)]$

d. $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(-A \vee -B) \rightarrow -(A \wedge B)]$

e. $[(A \wedge B)^I \wedge A^I \wedge B^I] \rightarrow [-(A \wedge B) \leftrightarrow (-A \vee -B)]$

Prueba: Para probar que $-(A \wedge B) \rightarrow (-A \vee -B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(-(A \wedge B)) = 1$, $V(A) = 1$, $V(B) = 1$, $V(-A) = 0$ y $V(-B) = 0$. Para probar que $(-A \vee -B) \rightarrow -(A \wedge B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(-(A \wedge B)) = 0$, $V(A) = 1$, $V(B) = 1$, $V(-A) = 1$ y $V(-B) = 1$.

Para probar $(A \wedge B)^I \rightarrow [-(A \wedge B) \rightarrow (-A \vee -B)]$, gracias al teorema de deducción basta con probar que, de $(A \wedge B)^I$ y $-(A \wedge B)$ se infiere $-A \vee -B$. De $(A \wedge B)^I$ por la proposición 23a resulta $-(A \wedge B) \rightarrow \sim (A \wedge B)$, como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\sim (A \wedge B)$. Por negación de la conjunción se obtiene $\sim A \vee \sim B$. De la proposición 23b se tienen $\sim A \rightarrow -A$ y $\sim B \rightarrow -B$. Utilizando dilema constructivo en los tres últimos resultados se obtiene $-A \vee -B$.

Para probar $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(-A \vee -B) \rightarrow -(A \wedge B)]$, gracias al teorema de deducción y a las reglas de conmutatividad y de eliminación de la conjunción basta con probar que, de A^I, B^I y $-A \vee -B$ se infiere $-(A \wedge B)$. De A^I y B^I por la proposición 23a resultan $-A \rightarrow \sim A$ y $-B \rightarrow \sim B$, y como se tiene $-A \vee -B$, por dilema constructivo se infiere $\sim A \vee \sim B$. Por negación de la conjunción se obtiene $\sim (A \wedge B)$. De la proposición 23b se tiene $\sim (A \wedge B) \rightarrow -(A \wedge B)$, como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $-(A \wedge B)$.

La prueba de $[(A \wedge B)^I \wedge A^I \wedge B^I] \rightarrow [-(A \wedge B) \leftrightarrow (-A \vee -B)]$ es consecuencia inmediata de las dos pruebas anteriores.

6. Sistema LBVA

En el libro IV de la *Metafísica* (capítulo 7, 1011 b), Aristóteles define el concepto de verdad de la siguiente manera “decir de *lo que es* que es, y de *lo que no es* que no es, es *lo verdadero*; decir de *lo que es* que no es, y de *lo que no es* que es, es *lo falso*”. Con el sistema LBPcPo se puede modelar esta definición interpretando $+X$ como ‘X es verdadero’, $\neg X$ como ‘X es falso’, $*X$ como ‘decir X’, X como ‘X es’ y $\sim X$ como ‘X no es’. La definición de *verdad aristotélica* estaría codificada por la fórmula $(A \wedge *A) \leftrightarrow +A$, y la definición de *falsedad aristotélica* estaría codificada por la fórmula $(\sim A \wedge *A) \leftrightarrow \neg A$.

Proposición 28. *Verdad y falsedad aristotélicas en LBPcPo*

a. $(A \wedge *A) \leftrightarrow +A$ es un teorema de LBPcPo

b. $(\sim A \wedge *A) \leftrightarrow \neg A$ es un teorema de LBPcPo

Prueba: Supóngase $A \wedge *A$. Por eliminación de la conjunción se obtienen A y $*A$. Al tener A, por la proposición 22b, se infiere $\sim \neg A$. Al tener $*A$, por la definición de completez alterna, resulta $+A \vee \neg A$. Aplicando silogismo disyuntivo en estos dos resultados se obtiene $+A$. Por el teorema de deducción se ha probado $(A \wedge *A) \rightarrow +A$.

Por Ax0.3 se tiene $+A \rightarrow (+A \vee \neg A)$, lo cual por la definición de completez alterna significa $+A \rightarrow *A$. Por la proposición 23e se tiene $+A \rightarrow A$. De estos dos resultados, utilizando Ax0.8 se obtiene $+A \rightarrow (A \wedge *A)$.

Como se tienen $(A\wedge *A)\to +A$ y $+A\to(A\wedge *A)$, utilizando Ax0.11 se infiere $(A\wedge *A)\leftrightarrow +A$.

Para la parte b, supóngase $\sim A\wedge *A$. Por eliminación de la conjunción se obtienen $\sim A$ y $*A$. Al tener $\sim A$, por la proposición 23b, se infiere $-A$, lo cual por la definición de afirmación alterna y doble negación significa $\sim +A$. Al tener $*A$, por la definición de completez alterna, resulta $+A\vee\neg A$. Aplicando silogismo disyuntivo en estos dos resultados se obtiene $\neg A$. Por el teorema de deducción se ha probado $(\sim A\wedge *A)\to\neg A$.

Por Ax0.4 se tiene $\neg A\to(+A\vee\neg A)$, lo cual por la definición de completez alterna significa $\neg A\to *A$. Por la proposición 22b se tiene $\neg A\to\sim A$. De estos dos resultados, utilizando Ax0.8 se obtiene $\neg A\to(\sim A\wedge *A)$.

Como se tienen $(\sim A\wedge *A)\to\neg A$ y $\neg A\to(\sim A\wedge *A)$, utilizando Ax0.11 se infiere $(\sim A\wedge *A)\leftrightarrow \neg A$.

Se define el sistema deductivo LBVA, *Lógica Básica para la Verdad Aristotélica*, como una extensión del CPC, *Cálculo Proposicional Clásico* (axiomatizado por Ax0.1, ..., Ax0.12, proposiciones 3 y 4, y como regla de inferencia se tiene *modus ponens*), adicionando los axiomas AxVA: $(A\wedge *A)\leftrightarrow +A$ y AxFA: $(\sim A\wedge *A)\leftrightarrow\neg A$, y definiendo $-A = \sim +A$ (*negación alterna* de A), $A^{I} = -A\to\sim A$ (*incompatibilidad* de A), $A^{C} = \sim A\to\neg A$ (*completez* de A).

Con base en la anterior definición, la proposición 28 indica que los axiomas de LBVA son derivables en LBPcPo y, por lo tanto, los teoremas de LBVA también son derivables en LBPcPo. En las proposición 30 se muestra que los sistemas realmente son equivalentes, es decir, sus teoremas coinciden.

Proposición 29. *Axiomas de LBPcPo en LBVA*

Los axiomas de LBPcPo son teoremas de LBVA.

Prueba: Por el principio de identidad se tiene $(A\vee\neg A)\to(A\vee\neg A)$, por doble negación, implicación material y la definición de completez en el consecuente resulta $(A\vee\neg A)\to A^{C}$, por lo que Ax1.1 es teorema de LBVA.

Supóngase $A\wedge\neg A$, por eliminación de la conjunción se obtienen A y $\neg A$. Por AxFA se tiene $(\sim A\wedge *A)\leftrightarrow\neg A$, utilizando Ax0.10 resulta $\neg A\to(\sim A\wedge *A)$, y como se tiene $\neg A$, se infiere $\sim A\wedge *A$, lo cual por eliminación de la conjunción implica $\sim A$. Puesto que la proposición 3, $A\to(\sim A\to B)$, es axioma de LBVA, y como se tienen A y $\sim A$, entonces se infiere B. Como el teorema de deducción vale en LBVA, resulta $(A\wedge\neg A)\to B$, por lo que Ax1.2 es teorema de LBVA.

Supóngase que $\sim[(A\wedge -A)\vee A^{I}]$, por negación de la disyunción y eliminación de la conjunción se infieren $\sim(A\wedge -A)$ y $\sim A^{I}$, y por negación de la conjunción resulta $\sim A\vee\sim -A$. Al tener $\sim A^{I}$, por definición de la incompatibilidad se obtiene $\sim(-A\to\sim A)$, lo cual por negación del condicional, eliminación de la conjunción y doble negación genera $-A$ y A. Al tener $\sim A\vee\sim -A$ y $-A$, por silogismo disyuntivo resulta $\sim A$, y como también se tiene A, por introducción de la conjunción se infiere $A\wedge\sim A$. Por el teorema de deducción se obtiene $\sim[(A\wedge -A)\vee A^{I}]\to(A\wedge\sim A)$, y como en LBVA vale demostración indirecta, entonces se infiere $(A\wedge -A)\vee A^{I}$, es decir, Ax2.1 es teorema de LBVA.

Supóngase que $\sim[A\vee(A^{I}\wedge -A)]$, por negación de la disyunción y eliminación de la conjunción se infieren $\sim A$ y $\sim(A^{I}\wedge -A)$. De $\sim A$ por Ax0.3 resulta $\sim A\vee\sim *A$, lo cual por negación de la conjunción significa $\sim(A\wedge *A)$. Por AxVA se tiene $(A\wedge *A)\leftrightarrow +A$, utilizando Ax0.10 resulta $+A\to(A\wedge *A)$, y al tener $\sim(A\wedge *A)$, por *modus tollens* se infiere $\sim +A$, lo que según la definición de negación alterna equivale a $-A$. Como se tiene $\sim(A^{I}\wedge -A)$, por negación de la conjunción se infiere $\sim A^{I}\vee\sim -A$, y al tener $-A$, por silogismo disyuntivo, se genera $\sim A^{I}$. Utilizando la definición de incompatibilidad se obtiene $\sim(-A\to\sim A)$, lo cual por negación del condicional y eliminación de la conjunción implica A. Al tener A y $\sim A$, por introducción de la conjunción resulta

$A\wedge{\sim}A$. Utilizando el teorema de deducción resulta que $\sim[A\vee(A^I\wedge\text{-}A)]\rightarrow(A\wedge{\sim}A)$, y por demostración indirecta se concluye $A\vee(A^I\wedge\text{-}A)$, por lo que Ax2.2 es teorema de LBVA.

Supóngase $A^I\wedge A^C$. Por eliminación de la conjunción se obtienen A^I y A^C, utilizando las definiciones de incompatibilidad y completez resultan $\text{-}A\rightarrow{\sim}A$ y ${\sim}A\rightarrow\neg A$, los cuales por silogismo hipotético producen $\text{-}A\rightarrow\neg A$. Por lo tanto, según el teorema de deducción, se ha probado $(A^I\wedge A^C)\rightarrow(\text{-}A\rightarrow\neg A)$, es decir, Ax3.1 es teorema de LBVA.

Proposición 30. *LBPcPo y LBVA son equivalentes*

Los sistemas LBPcPo y LBVA tienen el mismo conjunto de teoremas.

Prueba: Consecuencia de las proposiciones 28 y 29.

En la tabla 2 se presentan algunas de las consecuencias en LBVA, las cuales tienen que ver con la semántica bivalente del cálculo proposicional clásico. Por ejemplo, para el caso de la conjunción se sabe que 'una conjunción es falsa (en el sentido clásico) si y sólo si al menos uno de los coyuntos es falso (en el sentido clásico)', mientras que en el sentido Aristotélico no se tiene esta equivalencia[2].

Tabla 2.

Verdad y falsedad de la conjunción	No son teoremas	$\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ $+(A\wedge B)\rightarrow(+A\wedge +B)$ $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$ $(+A\wedge +B)\rightarrow +(A\wedge B)$
	Teoremas	$(*A\wedge *B)\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$ $(*A\wedge *B)\rightarrow[+(A\wedge B)\rightarrow(+A\wedge +B)$ $*(A\wedge B)\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$ $*(A\wedge B)\rightarrow[(+A\wedge +B)\rightarrow +(A\wedge B)]$
		$[*(A\wedge B)\wedge *A\wedge *B]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)]$ $[*(A\wedge B)\wedge *A\wedge *B]\rightarrow[+(A\wedge B)\leftrightarrow(+A\wedge +B)]$

Verdad y falsedad de la disyunción	No son teoremas	$\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$ $+(A\vee B)\rightarrow(+A\vee +B)$ $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$ $(+A\vee +B)\rightarrow +(A\vee B)$
	Teoremas	$(*A\wedge *B)\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]$ $(*A\wedge *B)\rightarrow[+(A\vee B)\rightarrow(+A\vee +B)]$ $*(A\vee B)\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$ $*(A\vee B)\rightarrow[(+A\vee +B)\rightarrow +(A\vee B)]$
		$[*(A\vee B)\wedge *A\wedge *B]\rightarrow[\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)]$ $[*(A\vee B)\wedge *A\wedge *B]\rightarrow[+(A\vee B)\leftrightarrow(+A\vee +B)]$

[2] Desde este punto de vista, el operador de completez alterna '*' puede ser interpretado como '*tiene un valor de verdad (0 o 1)*', el operador de afirmación alterna '+' puede ser interpretado como '*el valor de verdad es 1 (verdadero)*', y el operador de negación alterna '¬' puede ser interpretado como '*el valor de verdad es 0 (falso)*'.

Verdad y falsedad del condicional	No son teoremas	¬(A→B)→(A∧¬B) +(A→B)→(A→+B) (A∧¬B)→¬(A→B) (A→+B)→ +(A→B)
	Teoremas	*B→[¬(A→B)→(A∧¬B)] *B→[+(A→B)→(A→+B)] *(A→B)→[(A∧¬B)→¬(A→B)] *(A→B)→[(A→+B)→+(A→B)]
		[*(A→B)∧*B]→[¬(A→B)↔(A∧¬B)] [*(A→B)∧*B]→[+(A→B)↔(A→+B)]

Verdad y falsedad del condicional	No son teoremas	¬(A→B)→(+A∧¬B) (+A∧¬B)→¬(A→B) +(A→B)→(+A→+B) (+A→+B)→+(A→B) ~(+A∧¬B)→+(A→B)
	Teoremas	(*A∧*B)→[¬(A→B)→(+A∧¬B)] *(A→B)→[(+A∧¬B)→¬(A→B)] *B→[+(A→B)→(+A→+B)] [*(A→B)∧*A]→[(+A→+B)→+(A→B)] +(A→B)→~(+A∧¬B) [*(A→B)∧*A∧*B]→[~(+A∧¬B)→+(A→B)]
		[*(A→B)∧*A∧*B]→[¬(A→B)↔(+A∧¬B)] [*(A→B)∧*A∧*B]→[+(A→B)↔(+A→+B)] [*(A→B)∧*A∧*B]→[+(A→B)↔~(+A∧¬B)]

Verdad y falsedad de la negación	No son teoremas	¬~A→+A +~A→¬A +A→¬~A ¬A→+~A
	Teoremas	*A→(¬~A→+A) *A→(+~A→¬A) *~A→(+A→¬~A) *~A→(¬A→+~A)
		(*A∧*~A)→(¬~A↔+A) (*A∧*~A)→(+~A↔¬A)

Verdad y falsedad de la falsedad	No son teoremas	¬¬A→+A +A→¬¬A ¬A→+¬A
	Teoremas	*A→(¬¬A→+A) +¬A→¬A *¬A→(+A→¬¬A) *¬A→(¬A→+¬A)
		(*A∧*¬A)→(¬¬A↔+A) *¬A→(¬A↔+¬A)

Verdad y falsedad de la verdad	No son teoremas	¬A→¬+A
		+A→++A
		¬+A→¬A
	Teoremas	*+A→(¬A→¬+A)
		*+A→(+A→++A)
		*A→(¬+A→¬A)
		++A→+A
		(*A∧*+A)→(¬A↔¬+A)
		*+A→(+A↔++A)

Verdad de la falsedad y falsedad de la verdad	No son teoremas	+¬A→¬+A
		¬+A→+¬A
	Teoremas	*+A→(+¬A→¬+A)
		(*A∧*¬A)→(¬+A→+¬A)
		(*A∧*+A∧*¬A)→(+¬A↔¬+A)

Silogismo disyuntivo	No es teorema	+(A∨B)→(¬A→+B)
	Teorema	*B→[+(A∨B)→(¬A→+B)]

Implicación material	No son teoremas	+(A→B)→(¬A∨+B)
		(¬A∨+B)→+(A→B)
	Teoremas	(*A∧*B)→[+(A→B)→(¬A∨+B)]
		*(A→B)→[(¬A∨+B)→+(A→B)]
		[*A∧*B∧*(A→B)]→[+(A→B)→(¬A∨+B)]

Modus tollens y transposición	No son teoremas	+(A→B)→(¬B→¬A)
		(¬B→¬A)→+(A→B)
	Teoremas	*A→[+(A→B)→(¬B→¬A)]
		[*B∧*(A→B)]→[(¬B→¬A)→+(A→B)]
		[*A∧*B∧*(A→B)]→[+(A→B)↔(¬B→¬A)]

Reducción al absurdo	No son teoremas	[(+A→+B)∧(+A→¬B)]→¬A
		[(¬A→+B)∧(¬A→¬B)]→+A
	Teoremas	*A→([(+A→+B)∧(+A→¬B)]→¬A)
		*A→([(¬A→+B)∧(¬A→¬B)]→+A)

Trivialización con las contradicciones	Teorema	(+A∧¬A)→B

Trivialización con indeterminaciones	No teorema	(~+A∧~¬A)→B
	Teorema	*A→[(~+A∧~¬A)→B]

La forma como se prueban estas consecuencias en LBVA (o en LBPcPo) se ilustra en la siguiente proposición.

Proposición 31. *Falsedad aristotélica del condicional*

Si tanto un condicional como su antecedente y su consecuente tienen valores de verdad, entonces, el condicional es falso si y solamente si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

a. $\neg(A\to B)$ no implica $(+A\wedge\neg B)$

b. $(+A\wedge\neg B)$ no implica $\neg(A\to B)$

c. $(*A\wedge *B)\to[\neg(A\to B)\to(+A\wedge\neg B)]$

d. $*(A\to B)\to[(+A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)]$

e. $[*(A\to B)\wedge *A\wedge *B]\to[\neg(A\to B)\leftrightarrow(+A\wedge\neg B)]$

Prueba: Para probar que $\neg(A\to B)\to(+A\wedge\neg B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(A) = V(+A) = V(*A) = V(\neg(A\to B)) = V(*(A\to B)) = 1$ y $V(B) = V(+B) = V(*B) = V(+(A\to B)) = V(\neg A) = V(\neg B) = 0$.

Para probar que $(+A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que,
$V(A) = V(+A) = V(*A) = V(*B) = V(\neg B) = 1$ y $V(B) = V(+B) = V(\neg A) = V(\neg(A\to B)) = V(+(A\to B)) = V(*(A\to B)) = 0$.

Para probar la parte c, supóngase $*A\wedge *B$ y $\neg(A\to B)$. Por eliminación de la conjunción resultan $*A$ y $*B$, y por la definición de completez alterna se infieren $+A\vee\neg A$ y $+B\vee\neg B$. Al tener $\neg(A\to B)$, utilizando la proposición 22b, resulta $\sim(A\to B)$, lo cual por negación del condicional y eliminación de la conjunción genera A y $\sim B$. Por la proposición 22b se tiene $\neg A\to\sim A$, y como se tiene A, entonces resulta $\sim\neg A$, y como además se tiene $+A\vee\neg A$, por silogismo disyuntivo se infiere $+A$. Por la proposición 23e se tiene $+B\to B$, y como se tiene $\sim B$, entonces resulta $\sim +B$, y como además se tiene $+B\vee\neg B$, entonces por silogismo disyuntivo se infiere $\neg B$. Finalmente, por introducción de la conjunción se obtiene $+A\wedge\neg B$, y utilizando el teorema de deducción dos veces se concluye que $(*A\wedge *B)\to[\neg(A\to B)\to(+A\wedge\neg B)]$.

Para probar la parte d, supóngase $*(A\to B)$ y $+A\wedge\neg B$. Por eliminación de la conjunción se infieren $+A$ y $\neg B$. Al tener $+A$, por la proposición 23e, resulta A, y al tener $\neg B$, por la proposición 22b, se obtiene $\sim B$, utilizando introducción de la conjunción y negación del condicional en los dos últimos resultados, se infiere $\sim(A\to B)$, lo cual, de acuerdo a la proposición 23e, implica $\sim +(A\to B)$. Por otro lado, al tener $*(A\to B)$, por la definición de completez alterna, resulta $+(A\to B)\vee\neg(A\to B)$, y como se tiene $\sim +(A\to B)$, entonces se infiere $\neg(A\to B)$. Utilizando el teorema de deducción dos veces se concluye que $*(A\to B)\to[(+A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)]$.

La parte e, es consecuencia de las partes c y d.

Conclusiones

En el sistema LBPcPo, de acuerdo con la proposición 5, se recuperan todos los teoremas del cálculo proposicional clásico. Pero además, tal como se indica en la Tabla 1, es posible probar estos mismos resultados con las negaciones alternas, haciendo explícitos los requisitos mínimos de completez o de incompatibilidad de las fórmulas involucradas en el resultado clásico. En la proposición 30 se muestra la equivalencia del sistema LBPcPo con el sistema LBVA, con el cual se caracterizan deductivamente las definiciones de verdad y falsedad aristotélicas. Esta equivalencia, junto a las consecuencias presentadas en la Tabla 2, muestran que los operadores de verdad y falsedad aristotélicas son auténticas generalizaciones de las nociones usuales de verdad y falsedad. Se sabe que las nociones usuales de verdad y falsedad se encuentran estrechamente vinculadas a la negación clásica, mientras que los resultados presentados muestran que los nuevos operadores de verdad y falsedad se encuentran ligados a operadores de negación paraconsistentes y paracompletos, respectivamente. Este hecho puede ser de interés, puesto que el análisis con estas lógicas, en lo referente a las negaciones alternas, es más fino que el hecho con la lógica clásica.

Bibliografía

Aristóteles. (1998). *Metafísica*. Libro 4, capítulo 7, 1011 b. Madrid: Gredos.

Arruda, A. & E. Alves. *(1979).* "Semantical study of some systems of vagueness logic", *Bulletin of the Section of Logic 8*, Polish Academy of Sciences.

Caicedo, X. (1990). *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Carnielli, W. & J. Marcos. (2002)*. "*Taxonomy of C-Systems", *Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 228. New York: Marcel Dekker.

Da Costa, N. (1993). *Inconsistent Formal Systems*. Curitiba: Editora UFPR.

Grana, N. (1990). *Sulla Teoría delle Valutazioni di N. C. A. da Costa.* Nàpoli: Ligoure.

Hamilton, A. (1981). *Lógica para matemáticos*. Madrid: Paraninfo.

Henkin, L. (1949). "The completeness of the first order functional calculus", *The journal of symbolic logic*, 3 (14).

Heyting, A. (1971). *Intuitionism, an Introduction.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

Sierra, A. (2005). "Lógica básica con afirmación alterna", *Revista Ingeniería y Ciencia*, 1 (1), Medellín.

Tarski, A. (1983). *Logic, semantics and metamathematics*. (2ª ed.). Indianapolis: Hackett Publ.