Objetos de la Geometría Algebraica Clásica y Espacios Anillados

Carlos A. Cadavid Moreno

Fecha de recepción: 15 de enero de 2002
Fecha de aceptación: 27 de abril de 2002

RESUMEN

La Geometría Algebraica Clásica puede ser definida como el estudio de las variedades cuasiafines y cuasiproyectivas sobre un campo *k,* y en particular, del problema de su clasificación salvo isomorfismos. Estas variedades son, por definición, subconjuntos de los *n*-espacios afínes y de los *n*-espacios proyectivos. Es útil tener a disposición una definición intrínseca de estos objetos, es decir, independiente de un espacio ambiente. En este artículo se muestra como la noción de Espacio Anillado es la clave para formular estas definiciones y reformular el problema de clasificación.

ABSTRACT

Classical Algebraic Geometry can be defined as the study quasiaffine and quasiprojective varieties over a field *k.* One of the main problems in this area is the classification of these objects modulo isomorphism. These varieties are subsets of affine *n*- espace, and subsets of complex projective *n*- space, respectively. It is important to define these objects intrinsecally, tha is, not as part of some ambient space. In this article it is shown how the notion of Ringed Space is the key to formulate such definitions and classification problem.

PALABRAS CLAVES

• Espacios anillados • Geometría Algebraica • Manifold

CARLOS A. CADAVID MORENO. Ph.D. en Matemáticas, Universidad de Texas en Austin, 1998. Master en Matemáticas, Universidad de Cincinnati; 1990. Matemático, Universidad Nacional en Medellín.
E-mail: ccadavid@eafit.edu.co.

1. RESUMEN

La Geometría Algebraica Clásica puede ser definida como el estudio de las variedades cuasiafines y cuasiproyectivas sobre un campo k, y en particular, del problema de su clasificación salvo isomorfismos. Estas variedades son, por definición, subconjuntos de los $n-$espacios afínes y de los $n-$espacios proyectivos. Es útil tener a disposición una definición intrínseca de estos objetos, es decir, independiente de un espacio ambiente. En este artículo se muestra como la noción de Espacio Anillado es la clave para formular estas definiciones y reformular el problema de clasificación.

2. INTRODUCCIÓN

Fue H. Weyl quien a principios del siglo XX planteó por primera vez una formulación matemáticamente precisa y libre de sumergimientos de la noción de Manifold. Los objetos de la Geometría Algebraica Clásica tuvieron que esperar hasta los años 50 para que H. Cartan y J. P. Serre dieran una definición intrínseca de ellos. Cartan y Serre basaron sus definiciones en el concepto de *espacio anillado,* un derivado del concepto de sheaf que J. Leray había introducido alrededor de 1945. El propósito de este artículo es el de formular de manera precisa y detallada como las definiciones y los problemas clásicos se ven modernamente bajo la óptica de espacios anillados. Se advierte al lector que en el artículo no se demuesta casi ninguna afirmación y que es un buen ejercicio tratar de hacerlo. Algunos de los términos un poco más avanzados que se usan en el artículo aparecen seguidos de un asterisco. Esto significa que estos términos son definidos o que hay algún comentario acerca de ellos en la sección 7.

El artículo esta organizado de la siguiente forma. En la sección 3 se presentan los objetos de la Geometría Algebraica Clásica, sus morfismos, isomorfismos y problemas de clasificación. En la sección 4 se define el concepto de espacio anillado haciendo antes una introducción al concepto de sheaf de anillos. En la sección 5 se redefinen los objetos definidos en la sección 3, sus morfismos, isomorfismos y problemas de clasificación usando la noción de espacio anillado. La sección 6 tiene algunas conclusiones, la 7 es un glosario de algunos de los términos más avanzados usados en el artículo y la 8 contiene una lista de las referencias usadas.

Advertencia: En este artículo "anillo" significará anillo conmutativo con unidad* y todos los campos se supondrán algebraicamente cerrados*.

3. OBJETOS DE LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA CLÁSICA Y SUS PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN

El objetivo de esta sección es el de dar una idea de que se entendía clásicamente por Geometría Algebraica. Se definen los objetos clásicos (variedades afines, cuasiafines, proyectivas y cuasiproyectivas), los morfismos entre ellos y las respectivas nociones de isomorfismo. Se da una formulación de el problema de clasificación en forma clásica.

3.1 Variedades afines Clásicas, Variedades Cuasi-afines Clásicas

Sea k un campo algebraicamente cerrado fijo. El conjunto $\{(x_1,\ldots,x_n) / x_i \in k\}$ se denota por A_k^n y es llamado n-espacio afín sobre k. Sea $k[x_1,\ldots,x_n]$ el anillo de polinomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en k. Entenderemos cada elemento de $k[x_1,\ldots,x_n]$ como una función que va de A_k^n en k. Así, si $f(x_1,\ldots,x_n) \in k[x_1,\ldots,x_n]$, y $x = (a_1,\ldots,a_n) \in A_k^n$, entonces f(x) es el elemento de k obtenido substituyendo las coordenadas de x en las variables de f.

DEFINICIÓN 3.1 (Variedad afín clásica sobre k y sus morfismos)

Un subconjunto X de A_k^n se dice que es una variedad afín clasica sobre k si existe una colección finita $\{f_\alpha\}$ en $k[x_1,\ldots,x_n]$ tal que $X = \{x \in A_k^n / f_\alpha(x) = 0 \text{ para todo } \alpha\}$. Una función $f: X \subset A_k^n \to Y \subset A_k^m$ se dice que es un morfismo entre las variedades afines clásicas X y Y, si cada una de las funciones componentes de f, $f_i : X \to k$, $1 \le i \le m$, es la restricción de un polinomio en $k[x_1,\ldots,x_n]$ al conjunto X.

Advertencia: en el resto de 3.1, las variedades afines clásicas sobre k serán llamadas simplemente "variedades afines".

El conjunto de variedades afines en A_k^n se comporta como los cerrados de una topología: la intersección arbitraria de variedades afines es una variedad afín, la unión de finitas de ellas es otra vez una variedad afín y tanto el conjunto vacío como todo A_k^n son variedades afines. Esto hace que la colección de los complementos de variedades afines en A_k^n, forme una topología. Esta topología se llama topología de Zariski. Si $X \subset A_k^n$ es una variedad afín, entonces X recibe la topología de subespacio* de A_k^n. De esta manera, X puede ser considerado como un espacio topológico. A esta topología se le llama topología de Zariski de X.

Resulta útil considerar una categoría más amplia, en la que los abiertos de los objetos que hemos definido sean otra vez objetos de la categoría.

DEFINICIÓN 3.2 (Variedades cuasiafines clásicas sobre k)

Una variedad cuasiafin clasica sobre k es cualquier abierto de una variedad afín $X \subset A_k^n$.

<u>Advertencia</u>: En el resto de 3.1 las variedades cuasiafines clásicas sobre k se llamarán simplemente "variedades cuasiafines".

Toda variedad afín es una variedad cuasiafín. Las variedades cuasiafines también se consideran como dotadas de la topología de subespacio del espacio afín correspondiente. Esta topología es llamada topología de Zariski de la variedad cuasiafín.

Para poder definir morfismos entre variedades cuasiafines es necesario definir un tipo especial de función k - valuada sobre una variedad cuasiafín.

DEFINICIÓN 3.3 (Función regular en un punto de una variedad cuasiafín, función regular sobre una variedad cuasiafín)

Sea X una variedad cuasiafín en A_k^n, φ una función de X en k, y x un punto de X. Se dice que φ es regular en x, si existe una vecindad* $U \subset X$ de x, y polinomios $f, g \in k[x_1,...,x_n]$, con $g(y) \neq 0$ para todo $y \in U$, tal que $\varphi(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ para cada $y \in U$. Se dice que φ es regular en X, si φ es regular en cada $x \in X$.

DEFINICIÓN 3.4 (Morfismos entre variedades cuasiafines)

Sea $\varphi : X \subset A_k^n \to Y \subset A_k^m$ una función entre variedades cuasiafines. Se dice que φ es un morfismo si cada función componente de φ es una función regular sobre X.

Como ya se había mencionado, toda variedad afín es cuasiafín. Esto hace que se tengan en principio dos nociones de morfismo entre variedades afines. Es un teorema el hecho de que estas dos nociones coinciden.

Una vez se tiene la noción de morfismo, se tiene la de isomorfismo.

DEFINICIÓN 3.5 (Isomorfismo entre variedades cuasiafines y variedades cuasiafines isomorfas)

Sea φ: X→Y un morfismo entre variedades cuasiafines. Se dice que φ es un isomorfismo si existe un morfismo $\psi : Y \to X$ tal que $\varphi \circ \psi = id_Y$ y $\psi \circ \varphi = id_X$. Esto equivale a exigir que φ sea biyectiva y que φ^{-1} sea también morfismo. Se dice que dos variedades cuasiafines son isomorfas si existe algún isomorfismo entre ellas.

Uno de los problemas centrales de la Geometría Algebraica Clásica fue el de clasificar salvo isomorfismos las variedades cuasiafines. La tarea consistía en descubrir invariantes (entes matemáticos asociados a cada variedad, que coinciden para variedades isomorfas), suficientes para distinguir las variedades.

3.2 Variedades proyectivas clásicas, variedades cuasiproyectivas clásicas

Otra categoría de objetos estudiada clásicamente es la categoría de variedades cuasiproyectivas clásicas sobre un campo k algebraicamente cerrado.

3.2.1 n-espacio proyectivo

Para definir variedades cuasiproyectivas, es necesario definir el n-espacio proyectivo sobre k.

Sea k un campo algebraicamente cerrado fijo. Dos elementos $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_n)$, del conjunto $A_k^{n+1} - \{(0,...,0)\}$ se consideran equivalentes si existe $\lambda \in k$, tal que $(\lambda a_0,...,\lambda a_n) = (b_0,...,b_n)$. La clase de equivalencia de $(a_0, \ldots, a_n)$ se denota por $[a_0,...,a_n]$.

DEFINICIÓN 3.6 (n-espacio proyectivo sobre k)

El conjunto de todas las clases de equivalencia recibe el nombre de n-espacio proyectivo sobre k y se denota por P_k^n.

P_k^n puede concebirse conjuntistamente como $n+1$ copias del espacio afín A_k^n "pegadas" entre si a lo largo de ciertos abiertos (de Zariski) por medio de ciertas biyecciones. Dicho con precisión, sea $A_i^n = \{[a_0,...,a_n] \in P_k^n \ / \ a_i \neq 0\}$, $A_{k,i}^n = \{(c_0,....,c_n) \in A_k^{n+1} \ / \ c_i = 1\}$ y $\psi_i : A_i^n \to A_{k,i}^n$ la función definida por $\psi_i([a_0,...,a_n]) = \left(\frac{a_0}{a_i},.....,\frac{a_i}{a_i},...,\frac{a_n}{a_i}\right)$ para $0 \leq i \leq n$.

La función ψ, puede verse como una función de A_i^n en A_k^n, si A_k^n se identifica de la manera obvia con $A_{k,i}^n$. Es fácil ver que $P_k^n = \bigcup_{i=0}^n A_i^n$ y que las funciones ψ, son todas biyecciones. Ahora, si $0 \leq i,j \leq n$ e $i \neq j$, entonces $A_i^n \cap A_j^n = \{[a_0,..., a_n] \in P_k^n \ / \ a_i, a_j \neq 0\}$ y $\psi_i(A_i^n \cap A_j^n) = \{(c_0,..., c_n) \in A_{k,i}^n \ / \ c_j \neq 0\}$. Este último conjunto es un abierto en la topología que $A_{k,i}^n$ recibe de su identificación con A_k^n. La función $\psi_{ji} := \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(A_i^n \cap A_j^n) \to \psi_j(A_i^n \cap A_j^n)$ es dada por $\psi_{ji}(c_0,....,c_n) = \left(\frac{c_0}{c_j},...,\frac{c_n}{c_j}\right)$. Note que esta función, vista como una función entre abiertos de A_k^n, es un morfismo de variedades cuasiafines. De hecho es un isomorfismo. Si dos elementos del conjunto $\coprod_{i=0}^n A_{k,i}^n$ se declaran equivalentes si son iguales o si existe una función ψ_{ij} que envía uno en el otro, entonces el conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación está en biyección con el espacio proyectivo P_k^n.

3.1.2 Variedades proyectivas y cuasiproyectivas clásicas

El proceso clásico de "homogenización de variables" de un sistema algebraico de ecuaciones condujo a la introducción del espacio proyectivo y de las variedades en él definidas por sistemas homogéneos de ecuaciones.

DEFINICIÓN 3.7 (Variedad proyectiva clásica sobre k)

Una *variedad proyectiva* clasica sobre k es un subconjunto de P_k^n de la forma

$\{[a_0,...,a_n] \ / \ f_\beta(a_0,...,a_n) = 0 \text{ para cada } \beta\}$, donde $\{f_\beta\}$ es una familia finita de polinomios homogéneos* en $k[x_0,...,x_n]$.

De manera similar a como ocurre con el espacio afín A_k^n, el espacio proyectivo P_k^n se dota de una topología, llamada también topología de Zariski. Los abiertos de la topología de Zariski de P_k^n son los complementos de sus variedades proyectivas. A su vez, cada variedad proyectiva $X \subset P_k^n$ se dota de la topología de subespacio. A esta topología se le denomina, como es de esperarse, topologia de Zariski de X.

Es importante ampliar la Definición 3.7 de la siguiente manera.

<u>DEFINICIÓN 3.8</u> (Variedad cuasiproyectiva clásica sobre k)

Una *variedad cuasiproyectiva* sobre k es cualquier abierto de una variedad proyectiva clásica sobre k.

<u>Advertencia</u>: en lo que resta de 3.2.2 las variedades proyectivas y cuasiproyectivas clásicas sobre k, serán llamadas simplemente "variedades proyectivas" y "variedades cuasiproyectivas".

<u>Notas</u>

1. Toda variedad proyectiva es una variedad cuasiproyectiva.
2. Si $X \subset P_k^n$ es una variedad cuasiproyectiva, entonces $X = \bigcup_{i=0}^n X_i$ donde $X_i = X \cap A_i^n$ y $\psi_i(X_i)$ es una variedad cuasiafín de A_k^n.

Para definir los morfismos entre variedades cuasiproyectivas, es necesario el concepto de función regular sobre una variedad cuasiproyectiva y de función regular yendo de una variedad cuasiproyectiva en un espacio afín A_k^m.

<u>DEFINICIÓN 3.9</u> (Función regular sobre una variedad cuasiproyectiva)

Sea $X \subset P_k^n$ una variedad cuasiproyectiva y $\varphi: X \to k$ una función. Se dice que φ es regular en X si cada composición $\varphi \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(X_i) \to k$ es regular como función sobre la variedad cuasiafín $\psi_i(X_i)$.

Se puede ver que φ es regular sobre X, si y solamente si para cada $x \in X$ existe una vecindad $U \subset X$ de x, y polinomios $f, g \in k[x_0,...,x_n]$ homogéneos y del mismo grado con $g(y) \neq 0$ para todo $y \in U$, tal que $\varphi(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ para cada $y \in U$.

DEFINICIÓN 3.10 (Función regular de una variedad cuasiproyectiva en A_k^m)

Una función $\varphi: X \to A_k^m$ definida en la variedad cuasiproyectiva X, se dice que es regular, si cada una de sus m funciones componentes es una función regular sobre X.

DEFINICIÓN 3.11 (Morfismos entre variedades cuasiproyectivas)

Sea $\varphi: X \subset P_k^n \to Y \subset P_k^m$ una función entre variedades cuasiproyectivas. Se dice que φ es un morfismo, si por cada punto $x \in X$, y cada A_i^m conteniendo a $\varphi(x)$, existe una vecindad de x $U \subset X$ tal que $\varphi(U) \subset A_i^m$, y tal que la composición $\psi_i \circ \varphi$ es una función regular sobre U.

DEFINICIÓN 3.12 (Isomorfismo entre variedades cuasiproyectivas y variedades cuasiproyectivas isomorfas)

Un morfismo $\varphi: X \to Y$ entre variedades cuasiproyectivas se dice que es un isomorfismo, si existe otro morfismo $\psi: X \to Y$ tal que $\varphi \circ \psi = id_Y$ y $\psi \circ \varphi = id_X$. Equivalentemente, φ es un isomorfismo si es biyectiva y su inversa es también un morfismo. Dos variedades cuasiafines son *isomorfas* si existe algún isomorfismo entre ellas.

Como en el caso de las variedades cuasiafines, el problema de clasificación de variedades cuasiproyectivas es uno de los problemas centrales de la Geometría Algebraica Clásica, consiste en listar y describir las clases de equivalencia bajo la relación "ser isomorfo a".

4. DEFINICIÓN DE ESPACIO ANILLADO

Como se señaló en la Introducción, la noción de espacio anillado se basó en la noción de sheaf de anillos formulada por Leray, a mediados de la década del 40. El concepto de sheaf juega un papel fundamental en la Geometría Algebraica moderna. No solamente es clave en la formulación de las mejores definiciones conocidas de los objetos, sino que es esencial en la construcción de las herramientas para estudiar estos objetos.

4.1 Sheaves de anillos

Para definir el concepto de espacio anillado, es necesario saber antes que es una sheaf* de anillos.

DEFINICIÓN 4.1 (Sheaf de anillos)

Sea X un espacio topológico. Una sheaf de anillos F sobre X consta de:

i. Una regla que le asigna a cada abierto U de X, un anillo F(U). Se exige que F envíe el conjunto vacío en el anillo trivial*.

ii. Un homomorfismo de anillos $\rho_{VU}: F(U) \to F(V)$, por cada par de abiertos $V \subset U$ de X (a veces se denotará $\rho_{VU}(s)$ por $s|_V$), que satisface:

Sh 1) si $W \subset V \subset U$ son abiertos de X, entonces $\rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$, y

Sh 2) si U es un abierto de X, $\{U_\alpha\}$ una colección de abiertos de X tal que $\bigcup_\alpha U_\alpha = U$, y $\{s_\alpha\}$ es una colección con $s_á \in F(U_\alpha)$ para cada α, tal que siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varphi$, $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, entonces existe un único $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ para cada α.

Notas

1. De aquí en adelante las sheaves de anillos se llamarán simplemente "sheaves".

2. Los homomorfismos ρ_{VU} son llamados "homomorfismos restricción", o simplemente "restricciones".

3. A veces se denota una sheaf por una sola letra, como F, y otras veces es necesario destacar la letra genérica que se usa para denotar los homomorfismos restricción de la sheaf. En este último caso se escribe, por ejemplo, $\{F, \rho\}$.

Es claro pues lo que es una sheaf de anillos formalmente, ¿pero cuál es el significado de esta definición formal?. Los ejemplos que se dan a continuación sirven de modelo para la definición misma de sheaf de anillos, es decir, una sheaf de anillos debe ser entendida como una abstracción de estos ejemplos.

Ejemplo 1

Sea S un anillo, y X un espacio topológico. A cada abierto $U \subset X$ se le asigna el anillo $F(U)$ de todas las funciones de U en S, con la suma y multiplicación usual de funciones. Ahora, si $V \subset U$, entonces $\rho_{VU} : F(U) \to F(V)$ se toma como la restricción usual de funciones. Estos son homomorfismos de anillos. Se deja al lector la verificación de que $\{F, \rho\}$ es una sheaf de anillos.

Ejemplo 2

Si en el Ejemplo 1 se toma $S = R$ (el conjunto de los números reales con su topología usual), $X = R^2$ (el plano cartesiano con su topología usual) y $F(U)$ se toma, no como el conjunto de todas las posibles funciones, sino solamente como el formado por aquellas que son continuas, entonces tenemos una sheaf de anillos sobre R^2. Esta sheaf se denota por C^0.

Ejemplo 3

Si el Ejemplo 2 se modifica tomando a $F(U)$ como el conjunto de todas las funciones con valores reales de tipo C^∞ (*), se tiene otra sheaf sobre R^2. Esta sheaf se denota por C^∞.

Ejemplo 4

Si en el Ejemplo 1 se toma $S=R$, $X = R^2$, y $F(U)$ como el conjunto de todas las funciones acotadas*, entonces $\{F, \rho\}$ ya no será una sheaf de anillos. Los axiomas i), ii) y Sh1) se satisfacen. Pero el axioma Sh2) no. Sea $U = R^2$, $U_n = \{x \in R^2 / |x| < n\}$, y $s_n : U_n \to R$ definida por $s_n(x) = |x|^2$, para $n=1,2,\ldots$. La única posible candidata a ser s sería la función que va de R^2 en R dada por $s(x) = |x|^2$. Pero esta función no es acotada, es decir, no pertenece a $F(R^2)$.

Estos ejemplos destacan dos puntos importantes. Primero, que en espíritu, es útil imaginarse los elementos de F(U) como ciertas funciones de U en algún anillo, y ρ_{VU} como las restricciones usuales de funciones. Este es el contenido de los axiomas i), ii) y Sh1). La comparación de los ejemplos 1, 2 y 3, con el ejemplo 4, señala el papel que juega la condición Sh2) . Esta condición dice que el conjunto de funciones debe ser dado por una condición de tipo local. La continuidad y la diferenciabilidad de una función son propiedades que se verifican alrededor de cada punto. El que una función sea acotada es una condición que no se verifica de esta manera. Es necesario advertir en este punto que no todas las sheaves útiles en Geometría Algebraica, son sheaves de funciones. De ahí que sea tan útil la noción abstracta de sheaf de anillos. De hecho es necesario en Geometría Algebraica usar otros tipos de sheaves, como las sheaves de grupos abelianos, de módulos, etc.

El siguiente concepto será clave en la definición de espacio anillado.

DEFINICIÓN 4.2 (Stalk* de una sheaf en un punto)

Sea X un espacio topológico dotado de una sheaf de anillos F, y sea $x \in X$. Se dice que dos elementos (s,U), (t,V) del conjunto $\{(s,U) / U \text{ vecindad de } x, s \in F(U)\}$ están relacionados si existe una vecindad W de x, contenida en $U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. Se puede verificar inmediatamente que ésta es una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de (s,U) se denota por $[s,U]$. El conjunto de clases de equivalencia se denota por F_x y se llama stalk de la sheaf F en el punto x. Definimos operaciones suma y producto en F_x por las reglas $[s,U]+[t,V]=[s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V}, U\cap V]$ y $[s,U]\cdot[t,V]=[s|_{U\cap V}\cdot t|_{U\cap V}, U\cap V]$. Estas operaciones están bien definidas y convierten a F_x en un anillo.

Las sheaves sobre un mismo espacio topológico son comparadas por los morfismos entre ellas.

DEFINICIÓN 4.3 (Morfismos de sheaves sobre un mismo espacio X)

Sean $\{F, \rho\}$ y $\{G, \zeta\}$ sheaves sobre un mismo espacio topológico X. Un morfismo φ: $F \to G$ es una colección de homomorfismos de anillos $\varphi(U)$: $F(U) \to G(U)$ por cada abierto U de X, tal que siempre que $V \subset U$, $\varphi(V) \circ \rho_{VU} = \zeta_{VU} \circ \varphi(U)$.

DEFINICIÓN 4.4 (Morfismo identidad)

Si F es una sheaf de anillos sobre X, se denotará por id_F al morfismo de F en F, tal que $id_F(U) = id_{F(U)}$ para cada abierto de U de X. Este morfismo se denomina morfismo identidad.

DEFINICIÓN 4.5 (Composición de morfismos de sheaves sobre un mismo espacio X)

Si H es otra sheaf sobre X, y ψ: G$\rightarrow$H es un morfismo, entonces definimos el morfismo composicion $\psi \circ \varphi$: F$\rightarrow$H, por $(\psi \circ \varphi)(U) = \psi(U) \circ \varphi(U)$, para cada U abierto de X.

DEFINICIÓN 4.6 (Sheaf imagen directa)

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Para cada sheaf $\{F, \rho\}$ sobre X, definimos su imagen directa $\{f_*F, \zeta\}$ como la sheaf sobre Y dada por $f_*F(U) = F(f^{-1}(U))$ para cada abierto $U \subset Y$ y homomorfismos restricción $\zeta_{VU} = \rho_{F(f^{-1}(V)), F(f^{-1}(U))}$ para cada par de abiertos $V \subset U \subset Y$.

4.2 Espacios Anillados

Las definiciones anteriores permiten definir la noción de espacio anillado.

DEFINICIÓN 4.7 (Espacio anillado)

Un *espacio anillado* es un par (X, O_X) donde X es un espacio topológico y O_X es una sheaf de anillos, tal que para cada $x \in X$, el stalk $O_{X,x}$ es un anillo local*.

Los espacios anillados son comparados por los morfismos entre ellos.

DEFINICIÓN 4.8 (Morfismos entre espacios anillados)

Un *morfismo* del espacio anillado (X, O_X) en el espacio anillado (Y, O_Y) es un par $(f, f^{\#})$ donde f: X$\rightarrow$Y es una función continua, y $f^{\#}: O_Y \rightarrow f_*O_X$ es un morfismo de sheaves sobre Y, tal que para cada $x \in X$, el homomorfismo inducido $f_x^{\#}: O_{Y,f(x)} \rightarrow O_{X,x}$ (que es descrito a continuación) es un homomorfismo local de anillos*.

El homomorfismo $f_x^{\#}$ se define de la siguiente manera. El morfismo $f^{\#}: O_Y \rightarrow f_*O_X$ induce un homomorfismo de anillos $O_Y(V) \rightarrow O_X(f^{-1}(V))$ para cada V abierto de Y. Cuando V varía sobre todas las vecindades de f(x), $f^{-1}(V)$, varía sobre algunas vecindades de x. Tomando límites directos obtenemos un homomorfismo $O_{Y,f(x)} = \varinjlim_V O_Y(V) \rightarrow \varinjlim_V O_X(f^{-1}(V))$ (*). Existe un homomorfismo natural de anillos yendo de este último límite a $O_{X,x}$. $f_x^{\#}$ es la composición de estos homomorfismos.

Cada que se tiene un espacio anillado, se pueden obtener otros de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 4.9 (Sheaf restricción a un abierto y espacio anillado restricción a un abierto)

Sea (X, O_X) un espacio anillado, y sea U un abierto de X. Entonces sobre el espacio topológico U se define la sheaf $O_X|_U$ como aquella que le asigna a cada abierto $V \subset U$ el anillo $O_X(V)$ y cuyos homomorfismos restricción son los mismos que los correspondientes de O_X. La sheaf $O_X|_U$ es llamada *restriccion de la sheaf* O_X *al abierto* U. El par $(U, O_X|_U)$ es un espacio anillado y es llamado *espacio anillado restriccion al abierto* U.

DEFINICIÓN 4.10 (Composición de morfismos)

Sean $(f, f^{\#})$: $(X, O_X)\rightarrow(Y, O_Y)$ y $(g, g^{\#})$: $(Y, O_Y)\rightarrow(Z, O_Z)$ morfismos entre espacios anillados. El *morfismo composición* $(g, g^{\#}) \circ (f, f^{\#})$: $(X, O_X)\rightarrow(Z, O_Z)$ se define como $(g \circ f, (g \circ f)^{\#})$ donde $(g \circ f)^{\#}(W) := f^{\#}(g^{-1}(W)) \circ g^{\#}(W)$ para cada W abierto en Z.

La siguiente noción captura cuando es que se consideran dos espacios anillados como básicamente los mismos.

DEFINICIÓN 4.11 (Isomorfismo entre espacios anillados y espacios anillados isomorfos)

Sean (X, O_X), (Y, O_Y) espacios anillados. Un morfismo $(f, f^{\#})$: $(X, O_X)\rightarrow(Y, O_Y)$ es un *isomorfismo* si existe otro morfismo $(g, g^{\#})$: $(Y, O_Y)\rightarrow(X, O_X)$ tal que $(f, f^{\#}) \circ (g, g^{\#}) = (id_Y, id_{O_Y})$ y $(g, g^{\#}) \circ (f, f^{\#}) = (id_X, id_{O_X})$. Equivalentemente, $(f, f^{\#})$ es un isomorfismo si y solo si f es un homeomorfismo y $f^{\#}$ es un isomorfismo de sheaves sobre Y. Dos espacios anillados son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos.

5. OBJETOS Y PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN DE LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA CLÁSICA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE ESPACIOS ANILLADOS

Los problemas clásicos de clasificación admiten un planteamiento moderno. La idea es no mirar las variedades cuasiafines (resp. cuasiproyectivas) como simples conjuntos, sino como espacios anillados, y ver que dos variedades cuasiafines (resp. cuasiproyectivas) son isomorfas si y solo si éstas son isomorfas como espacios anillados. A continuación se desarrolla este punto rigurosamente.

5.1 Variedades cuasiafines y su clasificación

Sea X una variedad cuasiafín, y $U \subset X$ un abierto. El conjunto de todas las funciones regulares en U, bajo la suma y el producto ordinario de funciones forma un anillo. Este anillo se denota por $O_X(U)$. Ahora, si $V \subset U \subset X$ son abiertos, sea $\rho_{VU} : O_X(U) \to O_X(V)$ el homomorfismo que toma cada función regular en U y la restringe a V. Es fácil ver que O_X es una sheaf de anillos sobre X. De esta manera, a la variedad cuasiafín X se le asocia el espacio anillado (X, O_X). Si $\varphi: X \to Y$ es un morfismo entre variedades cuasiafines, entonces φ es continua e induce un morfismo $(\varphi, \varphi^{\#})$ donde $\varphi^{\#}(U): O_Y(U) \to \varphi_* O_X(U) = O_X(\varphi^{-1}(U))$ envía una función regular ψ sobre el abierto $U \subset Y$ en la composición $\psi \circ \varphi$ que es regular sobre el abierto $\varphi^{-1}(U)$. Esta transformación de objetos y morfismos es un functor*.

El hecho más importante acerca de este functor es que traduce el problema de clasificación de variedades cuasiafines, ya que dos variedades cuasiafines X y Y son isomorfas si y solo si los espacios anillados (X, O_X) y (Y, O_Y) asociados son isomorfos.

5.2 Variedades cuasiproyectivas y su clasificación

Las variedades cuasiproyectivas también pueden ser vistas como espacios anillados. Sea $X \subset P_n^k$ una variedad cuasiproyectiva. X dotada de la topología de Zariski es un espacio topológico. Ahora, si a cada abierto $U \subset X$ se le asocia el anillo $O_X(U)$ formado por todas las funciones k-valuadas regulares sobre U, y se toma $\rho_{VU} : O_X(U) \to O_X(V)$ con $V \subset U$ como la restricción de funciones, entonces $\{O_X, \rho\}$ es una sheaf de anillos, y (X, O_X) un espacio anillado asociado a X.

Además, se puede ver que cada morfismo $\varphi: X \to Y$ es una función continua e induce el morfismo de espacios anillados $(\varphi, \varphi^{\#}): (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ donde $\varphi^{\#}(U): O_Y(U) \to (\varphi_* O_X)(U) = O_X(\varphi^{-1}(U))$ envía la función regular ψ sobre el abierto $U \subset X$, en la función regular $\psi \circ \varphi$ sobre $\varphi^{-1}(U)$. La asignación que envía a cada variedad cuasiproyectiva X en su espacio anillado asociado (X, O_X), y a cada morfismo φ en el morfismo $(\varphi, \varphi^{\#})$ es un functor.

El problema de clasificación de variedades cuasiproyectivas es equivalente al problema de clasificación de éstas vistas como espacios anillados vía este functor.

5.3 La categoría de variedades cuasiproyectivas abstractas

Es posible formar una categoría que reune todos los objetos clásicos sobre un campo fijo k. Esta categoría es llamada *categoria de variedades cuasiproyectivas abstractas sobre k*. Sus objetos son aquellos espacios anillados isomorfos a los espacios anillados asociados a variedades afines, cuasiafines, proyectivas y cuasiproyectivas clásicas sobre k, sus morfismos son los morfismos entre estos objetos como espacios anillados. La razón para que el nombre de esta categoría solamente mencione las variedades cuasiproyectivas, es que, como espacios anillados todas las variedades afines y cuasiafines son isomorfas a variedades cuasiproyectivas. Asi, los problemas de clasificación clásicos quedan reunidos en el problema de clasificación en la categoría de variedades cuasiproyectivas abstractas sobre k.

6. COMENTARIO FINAL

La búsqueda de definiciones que capten la esencia abstracta de los objetos de una teoría es importante por varias razones. Primero, hace visible aquellas propiedades de los objetos que hacen funcionar las demostraciones de los teoremas de la teoría. Esto permite establecer relaciones entre dos teorías aparentemente distintas pero similares a un nivel más profundo. Tal fenómeno ha sido la constante en Geometría Algebraica. Por ejemplo, el punto de vista de sheaves y espacios anillados permite conjeturar que resultados conocidos en variedades complejas y demostrados por métodos analíticos y de geometría diferencial, son también ciertos en el mundo más "abstracto" de los esquemas provenientes de una situación aritmética. Segundo, permite ampliar el universo de objetos considerados, incluyendo objetos que pudieramos llamar "virtuales" (de tipo lógico) y que resultan muy útiles como apoyo en las demostraciones de teoremas acerca de los objetos iniciales.

7. GLOSARIO

Anillo conmutativo con unidad

Un anillo S se dice que es *conmutativo con unidad* si para todo par de elementos $a,b \in S$, $ab = ba$ y además existe un elemento $1 \in S$ tal que $1a = a$, para todo $a \in S$.

Campo algebraicamente cerrado

Se dice que un campo k es *algebraicamente cerrado* si todo polinomio en una variable y con coeficientes en k tiene una raíz en k.

Topología de subespacio

Sea Y un espacio topológico y X un subconjunto de Y. Entonces la colección $\{U \cap X \,/\, U \text{ abierto de } Y\}$ es una topología de X. Esta topología se denomina *topología de subespacio de Y.*

Vecindad

Sea X un espacio topológico y $x \in X$. A cualquier abierto de X que contenga a x se le llama *vecindad de x* en X.

Polinomio homogéneo y su grado

El peso del monomio $ax_0^{m_0} \ldots x_n^{m_n}$ es $m_0 + \ldots + m_n$. Se dice que un polinomio $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ es *homogéneo de grado m,* si todos los monomios que lo forman son de peso m.

Sheaf

Esta palabra es usualmente traducida como "haz", o sea, manojo de espigas.

Anillo trivial

Se llama *anillo trivial* a aquel que consta solamente del elemento cero. En este anillo $1 = 0$.

Función C^∞

Una función $f : U \subset R^n \to R$ donde U abierto, se dice que es de tipo C^∞ si las derivadas parciales de f de todos los órdenes son funciones continuas en U.

Función acotada

Una función de valores reales se dice que es acotada si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo x en el dominio de definición de f.

Stalk

Esta palabra significa "tallo".

Anillo local

Sea S un anillo conmutativo con unidad. Un subconjunto $I \subset S$ se dice que es un ideal, si I es un subgrupo respecto a la suma, y si $a \in I$ y $r \in S$, entonces $ar \in I$. Un ideal $I \subset S$ se dice que es *maximal,* si no existe un ideal $J \neq S$, que contiene propiamente a I. Se dice que el anillo S es *local* si tiene exactamente un ideal maximal.

Homomorfismo local de anillos

Sea $\varphi: R \to S$ un homomorfismo entre anillos locales. Sean $I \subset S$ y $J \subset S$ los ideales maximales respectivos. Entonces se dice que φ es un *homomorfismo local,* si $\varphi(I) \subset J$.

Límite directo de anillos

Un conjunto A dotado de una relación de orden parcial $\leq$ se dice que es un *conjunto dirigido* si para todo par de elementos $\alpha, \beta \in A$ existe un elemento $\gamma \in A$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$. Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de anillos subindizada por A, y tal que siempre que $\alpha \leq \beta$, hay asignado un homomorfismo de anillos $\varphi_{\beta\alpha}: S_\alpha \to S_\beta$ tal que si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ entonces $\varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha}$. Bajo estas condiciones es posible definir un anillo, llamado *límite directo* de $\{S_\alpha\}$ y denotado por $\lim_{\vec{\alpha}} S_\alpha$ de la siguiente manera. En el conjunto $\coprod_{\alpha \in A} S_\alpha$ se declaran dos elementos $s \in S_\alpha$ y $t \in S_\beta$ como equivalentes si existe $\gamma \geq \alpha, \beta$ tal que $\varphi_{\gamma\alpha}(s) = \varphi_{\gamma\beta}(t)$. A la clase de equivalecia de $s \in S_\alpha$ se le denota por $[s]$. El conjunto de clases de equivalencia se denota por $\lim_{\vec{\alpha}} S_\alpha$ y se convierte en un anillo si se definen la suma y el producto por las reglas y $[s]+[t] = [\varphi_{\gamma\alpha}(s) + \varphi_{\gamma\beta}(t)]$ y $[s][t] = [\varphi_{\gamma\alpha}(s)\, \varphi_{\gamma\beta}(t)]$ donde $s \in S_\alpha$, $t \in S_\beta$ y $\gamma \geq \alpha, \beta$. Es fácil ver que estas operaciones están bien definidas. El anillo así definido se llama *límite directo de la colección* $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ junto con los homomorfismos $\{\varphi_{\beta\alpha}\}_{\alpha \leq \beta}$.

Sea X un espacio topológico, F una sheaf de anillos sobre X, y x un punto de X. El conjunto $\{V\}$ formado por todas las vecindades de x en X, equipado de la relación de inclusión, es un conjunto dirigido. Ahora, la colección de anillos $\{F(V)\}$ junto con sus restricciones satisface las condiciones para formar el límite directo $\varinjlim_{V} F(V)$. Se puede ver que este anillo coincide con F_x.

Functor

Para definir la noción de functor hay que definir antes lo que es una *categoría.* Una categoria es una colección de *objetos* $\{X, Y, \ldots\}$ tal que para cada par de ellos X, Y, se tiene un conjunto Mor(X, Y) y para cada tres objetos X, Y, Z una función llamada *ley de composición* Mor(X, Y) x M(Y, Z) $\rightarrow$ Mor(X, Z) que satisfacen los siguientes axiomas:

Cat 1) Dos conjuntos Mor(X, Y) y Mor(X, Y) son disjuntos, a menos que $X = X'$ y $Y = Y'$.

Cat 2) Cada conjunto Mor(X, X) tiene un elemento id_X que actúa como una identidad a izquierda y a derecha respecto a la ley de composición.

Cat 3) La ley de composición es asociativa.

Los elementos de Mor(X, Y) son llamados *morfismos* de X en Y, y $f \in Mor(X, Y)$ se denota algunas veces por $f : X \rightarrow Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$. La composición de dos morfismos f, g se denota por f o g.

Ahora, sean **A, B** categorías. Un *functor covariante* (resp. *contravariante)* G de **A** en **B** es una regla que le asigna a cada objeto X de **A** un objeto G(X) de **B**, y a cada morfismo $f \in Mor(X, Y)$ entre objetos de **A**, un morfismo $G(f) \in Mor(G(X), G(Y))$ (resp. $G(f) \in Mor(G(Y), G(X))$) que satisface:

Func 1) Si $f \in Mor(X, Y)$ y $g \in Mor(Y, Z)$ entonces G(g o f) G(g) o G(f) (resp. G(g o f) = G(f) o G(g)).

Func 2) $G(id_X) = id_{G(X)}$ para todo X.

Los functores deben ser entendidos como los comparadores de las categorías.

8. BIBLIOGRAFÍA

J. Dieudonne. (1985). History of Algebraic Geometry. Monterey, California. Wadsworh.

R. Hartshorne. (1993). Algebraic Geometry. Heidelberg. Springer-Verlag.

S. Lang. (1988). Differential Manifolds, Heidelberg. Springer-Verlag.

J.R. Munkres. (1984). Elements of Algebraic Topology. USA: Addison-Wesley.

M. Reid. (1990). Undergraduate Algebraic Geometry. London. Cambridge University Press.

I.R. Shafarevich. (1974). Basic Algebraic Geometry. Heidelberg. Springer-Verlag.