REVISTA Universidad EAFIT
Vol. 41. No. 138. 2005. pp. 84-95

Lógica Básica
con Afirmación y Negación Alternas

Manuel Sierra Aristizábal
Magíster en Matemáticas. Profesor del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad EAFIT e investigador del Grupo Lógica y Computación de la misma Universidad.
msierra@eafit.edu.co

Recepción: 01 de septiembre de 2004 I Aprobación: 16 de diciembre de 2004

Resumen[1]
El sistema *Lógica básica con afirmación y negación alternas* incluye, además de los operadores usuales de afirmación y negación, operadores para las nociones de *afirmación* y *negación alternas* y operadores de *incompatibilidad* y *determinabilidad* entre la afirmación usual y la negación alterna, entre la negación usual y la afirmación alterna y entre los operadores alternos de afirmación y negación. El sistema está caracterizado por una semántica de valuaciones tradicional, con la cual se establece la diferencia entre los operadores afirmación y entre los operadores negación.

Palabras Clave
Afirmación
Negación
Incompatibilidad
Determinabilidad

Basic logics with alternate affirmation and denial

Abstract
The basic logics with alternate affirmation and denial includes, besides the usual affirmation and denial operators; other operators for the notions of alternate affirmation and denial, and incompatibility and determination among the usual affirmation and the alternate denial, the usual denial and alternate affirmation, and the alternate affirmation and denial operators. The system is characterized by a traditional valuation semantics, which establishes the difference between the affirmation operators and between the denial operators.

Key Words
Affirmation
Denial
Incompatibility
Determinability

[1] Este trabajo forma parte de los resultados obtenidos con el proyecto "Árboles de forzamiento semántico para sistemas deductivos con operador afirmación", el cual es financiado por la Universidad EAFIT.

Introducción

En *Inconsistent Formal Systems,* se proponen diversos sistemas deductivos, los cuales soportan las inconsistencias. El operador *negación* de estos sistemas es más débil que el operador *negación clásica*. Da Costa también introduce un operador de *buen comportamiento*, con el cual se pretende que si una fórmula está débilmente negada y tiene buen comportamiento entonces ésta se debe comportar como si estuviera clásicamente negada. Los sistemas son presentados con una sola negación, la débil; el buen comportamiento de una fórmula es definido como la negación débil de la conjunción de la fórmula con su negación débil; la negación clásica es definida en términos de la negación débil y el buen comportamiento. En *A Taxonomy of C-Systems,* se estudia con mayor profundidad el operador de buen comportamiento.

En *Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta y algunas de sus Extensiones,* se presenta una jerarquía de sistemas deductivos con dos negaciones (negación clásica y *negación alterna*), un operador *de incompatibilidad respecto a la negación alterna* y un operador de *determinabilidad respecto a la negación alterna*, y los sistemas son generalizaciones de la Lógica Clásica. La incompatibilidad respecto a la negación alterna de una fórmula, puede ser caracterizada como la negación clásica de la conjunción entre la fórmula y su negación alterna; esta caracterización hace al operador *incompatibilidad* esencialmente diferente del operador de buen comportamiento de Da Costa. La determinabilidad respecto a la negación alterna de una fórmula, puede ser caracterizada como la disyunción de la fórmula con su negación alterna.

En *An Introduction to Modal Logic,* se presentan diversos sistemas de Lógicas Modales, la mayoría de estos sistemas tienen un operador *de necesariedad,* en cierto sentido este operador es una afirmación más fuerte que el operador *afirmación clásica* o afirmación usual. Un operador de *imposibilidad* es definido en términos de los operadores necesariedad y negación clásica. En cierto sentido, el operador de imposibilidad es más fuerte que el operador *negación clásica* o negación usual (la imposibilidad de la fórmula A implica la negación clásica de la fórmula A, pero no necesariamente vale la implicación recíproca). Estos sistemas deductivos no son presentados con operadores de buen comportamiento o similares.

En *Lógica Básica con Aceptación Fuerte,* se presentan un operador de afirmación alterna, un operador de *incompatibilidad respecto a la afirmación alterna* y un operador de *determinabilidad respecto a la afirmación alterna*. La incompatibilidad respecto a la afirmación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la negación clásica de la conjunción entre la negación de la fórmula y su afirmación alterna. La determinabilidad respecto a la afirmación alterna de una fórmula, puede ser caracterizada como la disyunción entre la negación de la fórmula y su afirmación alterna.

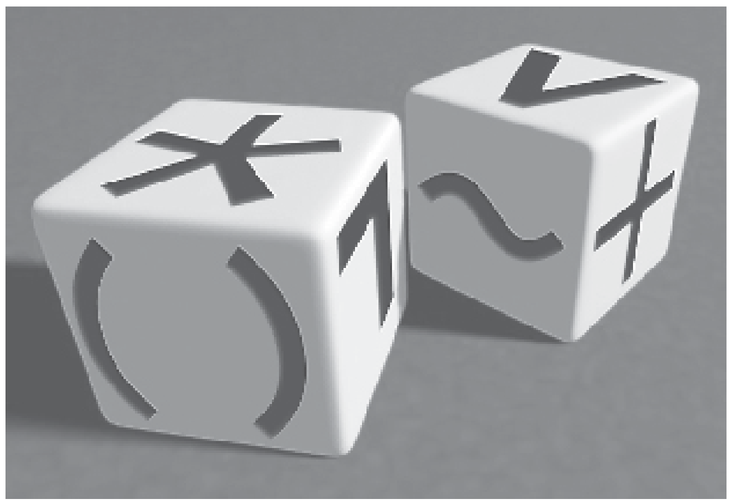
En *Lógica Básica con Afirmación Alterna,* se caracterizan semánticamente 3 sistemas deductivos, uno básico con afirmación alterna y dos subsistemas de él. En uno de estos subsistemas la afirmación alterna es más fuerte que la clásica y en el otro la afirmación alterna es más débil.

En este trabajo se presentan 3 sistemas deductivos. El primer sistema *Lógica Básica con Afirmación y Negación Alternas* extiende los sistemas básicos presentados en *Lógica Básica con Afirmación Alterna,* los operadores de negación alterna y afirmación alterna son relacionados con los correspondientes operadores de incompatibilidad y determinabilidad. Los sistemas son caracterizados semánticamente y las pruebas de validez y completitud son presentadas de manera detallada.

1. Sistema LB

El sistema LB, Lógica Básica con Afirmación y Negación Alternas, tiene 2 afirmaciones y 2 negaciones. Si A es una fórmula entonces, *A o simplemente A es la *afirmación usual* de A, la afirmación de la lógica clásica; +A es una *afirmación alterna* de A; ~A es la *negación usual* de A, la negación de la lógica clásica; $\neg$A es una *negación alterna* de A.

Definición 1. El lenguaje de la Lógica Clásica CL consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, y del operador monádico ~, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El *lenguaje del sistema* LB se obtiene extendiendo el lenguaje de la lógica clásica con los operadores monádicos +, $\neg$, I+~, C+~, I+$\neg$, C+$\neg$, I*$\neg$ y C*$\neg$ (llamados afirmación alterna, negación alterna, incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica, completez entre la afirmación alterna y la negación clásica, incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna, completez entre la afirmación alterna y la negación alterna, incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna, completez entre la afirmación clásica y la negación alterna)[2].



El conjunto de *fórmulas de* LB es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

R1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas*.

R2. Si A es una fórmula, entonces ~(A), $\neg$(A), +(A), $(A)^{I+\sim}$, $(A)^{C+\sim}$, $(A)^{I+\neg}$, $(A)^{C+\neg}$, $(A)^{I^*\neg}$ y $(A)^{C^*\neg}$ son fórmulas[3].

R3. Si A y B son fórmulas, entonces $(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\rightarrow(B)$ y $(A)\leftrightarrow(B)$ son fórmulas.

Al unir al conjunto de las fórmulas atómicas, las fórmulas de la forma +(A) y $\neg$(A), se obtienen las *fórmulas cuasi-atómicas*.

Definición 2. El *sistema deductivo para* LB es una extensión del cálculo proposicional clásico CL, por lo que se toman 2 grupos de axiomas.

Axiomas para el cálculo proposicional clásico:

Ax0.1 $A\rightarrow(B\rightarrow A)$

Ax0.2 $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

---

[2] Respecto al sistema LBPco(+~) presentado en *Lógica básica con afirmación alterna*, el lenguaje de LB se obtiene a partir del de LBPco(+~) agregando los operadores $\neg$, I+$\neg$, C+$\neg$, I*$\neg$ y C*$\neg$.

[3] Si A es una fórmula, *s* un operador monádico, *t* un operador monádico, entonces: A^{Ist} indica que no pueden tenerse las fórmulas s(A) y t(A) simultáneamente; A^{Cst} indica que debe tenerse al menos una de las fórmulas s(A) y t(A).

Ax0.3 $A\to(A\vee B)$

Ax0.4 $B\to(A\vee B)$

Ax0.5 $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$

Ax0.6 $(A\wedge B)\to A$

Ax0.7 $(A\wedge B)\to B$

Ax0.8 $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to(B\wedge C)))$

Ax0.9 $\sim A\to(A\to B)$

Ax0.10 $A\vee\sim A$

Ax0.11 $(A\leftrightarrow B)\to(A\to B)$

Ax0.12 $(A\leftrightarrow B)\to(B\to A)$

Ax0.13 $(A\to B)\to[(B\to A)\to(A\leftrightarrow B)]$

Axiomas para los nuevos operadores[4]:

AxI+~[5]. $A^{I+\sim}\leftrightarrow(+A\to A)$

AxC+~[6]. $A^{C+\sim}\leftrightarrow(A\to +A)$

AxI+¬[7]. $A^{I+\neg}\leftrightarrow(+A\to\sim\neg A)$

AxC+¬[8]. $A^{C+\neg}\leftrightarrow(\sim\neg A\to +A)$

AxI*¬[9]. $A^{I*\neg}\leftrightarrow(\neg A\to\sim A)$

AxC*¬[10]. $A^{C*\neg}\leftrightarrow(\sim A\to\neg A)$

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de A y $A\to B$ se infiere B, denotado A, $A\to B \vdash_{LB}$ B.

[4] Es decir agregando los axiomas AxI+¬, AxC+¬, AxI*¬ y AxC*¬ a los axiomas del sistema LBPco(+~).

[5] AxI+~ es el axioma de incompatibilidad entre los operadores afirmación alterna y negación clásica.

[6] AxC+~ es el axioma de completez (determinabilidad) entre los operadores afirmación alterna y negación clásica.

[7] AxI+¬ es el axioma de incompatibilidad entre los operadores afirmación alterna y negación alterna.

[8] AxC+¬ es el axioma de completez (determinabilidad) entre los operadores afirmación alterna y negación alterna.

[9] AxI*¬ es el axioma de incompatibilidad entre los operadores afirmación clásica y negación alterna.

[10] AxC*¬ es el axioma de completez (determinabilidad) entre los operadores afirmación clásica y negación alterna.

Definición 3. Se dice que una fórmula A es un *teorema de LB* (LB-teorema), denotado $\vdash_{LB}$ A, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tal que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de LB a partir de* Γ (LB-teorema en Γ), denotado $\Gamma\vdash_{LB}$ A, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tal que cada una de ellas es un axioma o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Proposición 1 ***(Principio de identidad).***
$\vdash_{LB} A\to A$

Prueba: Por Ax0.2 se tiene que $(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A))$ y por Ax0.1 se tiene $A\to((A\to A)\to A)$, aplicando MP se infiere $(A\to(A\to A))\to(A\to A)$, pero de nuevo por Ax0.1 se tiene $A\to(A\to A)$, aplicando de nuevo MP se infiere que $A\to A$ es un teorema de LB.

Proposición 2 ***(Teorema de deducción).***
Sean A y B fórmulas de LB y Γ un conjunto de fórmulas de LB. Si $\Gamma\cup\{A\}\vdash_{LB}$ B entonces $\Gamma\vdash_{LB} A\to B$.

Prueba: La demostración es por inducción sobre el número de fórmulas de la sucesión que constituye la deducción de B a partir de $\Gamma\cup\{A\}$. Para el paso base, supóngase que esta sucesión tenga un solo miembro. Este miembro debe ser la propia B, así que B es un axioma de LB o B es miembro de $\Gamma\cup\{A\}$.

Caso 1: B es un axioma de LB. Por Ax0.1 se tiene $B\to(A\to B)$, y como B es axioma de LB, también se tiene B, aplicando MP se infiere $A\to B$. Así pues, $\Gamma\vdash_{LB} A\to B$.

Caso 2: B es un miembro de Γ. Por Ax0.1 se tiene $B\to(A\to B)$, y como B es un miembro de Γ, también se tiene B, aplicando MP se infiere $A\to B$. Así pues, $\Gamma\vdash_{LB} A\to B$.

Caso 3: B es A. Se sabe por proposición 1 que $A\rightarrow A$ es un teorema de LB, de manera que la demostración de $A\rightarrow A$ en LB servirá como deducción de $A\rightarrow A$ a partir de Γ. Por tanto, también en este caso se tiene que $\Gamma\vdash_{LB} A\rightarrow B$. Esto completa el paso base.

Supóngase ahora que la deducción de B a partir de $\Gamma\cup\{A\}$ es una sucesión de *n* miembros, siendo n>1, y que la proposición se verifica para todas las fórmulas que pueden deducirse de $\Gamma\cup\{A\}$, vía una sucesión de menos de *n* miembros. Ahora hay cuatro casos a considerar.

Caso 1: B es un axioma de LB. Exactamente igual que en el Caso 1 del paso base, se demuestra que $\Gamma\vdash_{LB} A\rightarrow B$.

Caso 2: B es un miembro de Γ. Exactamente igual que en el Caso 2 del paso base, $\Gamma\vdash_{LB} A\rightarrow B$.

Caso 3: B es A. Como en el Caso 3 del paso base.

Caso 4: B se obtiene de dos fórmulas anteriores de la demostración, mediante una aplicación de MP. Estas dos fórmulas tendrán por fuerza las formas C y $C\rightarrow B$ y cada una de ellas puede ciertamente deducirse de $\Gamma\cup\{A\}$, mediante una sucesión de menos de *n* miembros. Se tiene $\Gamma\cup\{A\}\vdash_{LB} C$ y $\Gamma\cup\{A\}\vdash_{LB} C\rightarrow B$, aplicando la hipótesis de inducción resulta $\Gamma\vdash_{LB} A\rightarrow C$ y $\Gamma\vdash_{LB} A\rightarrow(C\rightarrow B)$. Por Ax0.2 se tiene $\Gamma\vdash_{LB} (A\rightarrow(C\rightarrow B))\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B))$, aplicando MP resulta $\Gamma\vdash_{LB} (A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow B)$, de nuevo por MP se obtiene $\Gamma\vdash_{LB} A\rightarrow B$.

Así pues, por el principio de inducción matemática, la proposición se verifica cualquiera que sea el número de fórmulas de la deducción de B a partir de $\Gamma\cup\{A\}$.

2. Semántica para LB

Definición 4[11]. Una *LB-valuación v* es una función que interpreta las fórmulas atómicas como elementos del conjunto {0, 1}. La LB-valuación *v* se extiende a una función V, que interpreta las fórmulas de LB en el conjunto {0, 1}, de la siguiente manera:

Si p es atómica, entonces V(p) = v(p)

V~. $V(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$

V$\wedge$. $V(A\wedge B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$

V$\vee$. $V(A\vee B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(B) = 0$

V$\rightarrow$. $V(A\rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$

V$\leftrightarrow$. $V(A\leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = V(B)$

VI+~. $V(A^{I+\sim}) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = 1$ y $V(A) = 0$

VC+~. $V(A^{C+\sim}) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = 0$ y $V(A) = 1$

VI+$\neg$. $V(A^{I+\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$

VC+$\neg$. $V(A^{C+\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$

VI*$\neg$. $V(A^{I*\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$

VC*$\neg$. $V(A^{C*\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$

Observar que una LB-valuación v se extiende a una función V, en lo que respecta a las fórmulas de la forma +A y $\neg$A, de manera arbitraria y no hay restricciones. Por esta razón, las LB-valuaciones pueden ser definidas como funciones v del conjunto de *fórmulas cuasi-atómicas* en {0,1}, y al extender al conjunto de todas las fórmulas, se cambia la primera cláusula de la definición por: si p es *cuasi-atómica,* entonces V(p) = v(p).

Definición 5. Se dice que una fórmula A es *LB-válida*, denotado $\models_{LB}$ A, si y solamente si para toda LB-valuación v, V(A) = 1.

Proposición 3 ***(LB-validez de los axiomas).*** Los axiomas de LB son LB-válidos.

Prueba: La LB-validez de los axiomas clásicos, de AxI+~ y de AxC+~, es presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

LB-validez del AxI+$\neg$. Si no fuese válido existiría una LB-valuación v y una fórmula A, tal que $V(A^{I+\neg} \leftrightarrow (+A\rightarrow\sim\neg A)) = 0$, y se tendrían, según definición de VI+$\neg$, 2 casos: ó $V(A^{I+\neg}) = 1$ y $V(+A\rightarrow\sim\neg A) = 0$ ó

[11] La semántica presentada extiende la semántica del sistema LBPco(+~) al incluir las cláusulas VI+$\neg$, VC+$\neg$, VI*$\neg$ y VC*$\neg$.

$V(A^{I+\neg}) = 0$ y $V(+A\rightarrow\sim\neg A) = 1$. En el primer caso se tendría que $V(A^{I+\neg}) = 1$, $V(+A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$, es decir $V(A^{I+\neg}) = 1$ y $V(A^{I+\neg}) = 0$, lo cual es imposible. En el segundo caso se tendría que $V(+A) = 1$, $V(\neg A) = 1$ y $V(+A\rightarrow\sim\neg A) = 1$, lo que quiere decir que $V(+A\rightarrow\sim\neg A) = 0$ y $V(+A\rightarrow\sim\neg A) = 1$, lo cual es imposible. Un razonamiento análogo prueba la LB-validez de AxI¬*.

LB-validez del AxC+¬. Si no fuese válido existiría una LB-valuación v y una fórmula A, tal que $V(A^{C+\neg} \leftrightarrow (\sim\neg A\rightarrow +A)) = 0$, y se tendrían, según definición de VC+¬, 2 casos: ó $V(A^{C+\neg}) = 1$ y $V(\sim\neg A\rightarrow +A) = 0$ ó $V(A^{C+\neg}) = 0$ y $V(\sim\neg A\rightarrow +A) = 1$. En el primer caso se tendría que $V(A^{C+\neg}) = 1$ y $V(\neg A) = 0$ y $V(+A) = 0$, es decir $V(A^{C+\neg}) = 1$ y $V(A^{C+\neg}) = 0$, lo cual es imposible. En el segundo caso se tendría que $V(\neg A) = 0$, $V(+A) = 0$ y $V(\sim\neg A\rightarrow +A) = 1$, lo que quiere decir que $V(\sim\neg A\rightarrow +A) = 0$ y $V(\sim\neg A\rightarrow +A) = 1$, lo cual es imposible. Un razonamiento análogo prueba la LB-validez de AxC*¬.

Proposición 4 ***(MP preserva LB-validez).***

Sean A y B fórmulas de LB. Si A y A→B son LB-válidas, entonces B también es LB-válida.

Prueba: Similar a la prueba de *MP preserva LBPco(+~)-validez* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Proposición 5 *(Teorema de LB-validez).*

Todo LB-teorema es LB-válido.

Prueba: Similar a la prueba del *teorema de LBPco(+~)-validez* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Definición 6. Una *extensión* de LB es un sistema formal, obtenido alterando o ampliando el conjunto de axiomas, de manera que todos los teoremas de LB sigan siendo teoremas. Frecuentemente se dirá simplemente: fórmulas o fórmulas de LB cuando se quiera hacer referencia a las fórmulas de una extensión de LB.

Definición 7. Una extensión de LB es *consistente* si no existe ninguna fórmula A de LB, tal que tanto A como ~A sean teoremas de la extensión. Si la extensión no es consistente, se dice que es *inconsistente*.

Definición 8. Una extensión de LB es *trivial* si toda fórmula es teorema de la extensión.

Proposición 6 *(Consistencia de LB)*

LB es consistente.

Prueba: Similar a la prueba de *consistencia de LBPco(+~)* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Proposición 7 ***(Inconsistencia significa trivialidad)***

Una extensión LB* de LB es consistente, sí y sólo si no es trivial.

Prueba: Sea LB* consistente. Entonces: para toda fórmula A, o bien A no es teorema o bien ~A no es teorema, ya que ambas no pueden serlo al ser LB* consistente. Por lo tanto LB* no es trivial.

Recíprocamente, supóngase que LB* no es consistente. Se demostrará que no hay fórmulas que no sean teoremas de LB*, es decir, que toda fórmula es teorema de LB*. Sea A cualquier fórmula; LB* no es consistente, así que $\vdash_{LB^*}$ B y $\vdash_{LB^*}$ ~B para cierta fórmula B. Ahora bien, $\vdash_{LB}$ ~B→(B→A) por Ax0.9. Así, $\vdash_{LB^*}$ ~B→(B→A) pues LB* es extensión de LB. Aplicando dos veces MP, obtenemos ahora $\vdash_{LB^*}$ A. Así pues, toda fórmula es teorema de LB*, como se quería.

Proposición 8 ***(Completando con nuevos axiomas)***

Sea LB* una extensión de LB y sea A una fórmula de LB que no sea teorema de LB*. Entonces LB** es también consistente, siendo LB** la extensión de LB, obtenida añadiendo ~A como nuevo axioma a LB*.

Prueba: Similar a la prueba de *la proposición 2.8* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Definición 9. Una extensión de LB es *completa* si para toda fórmula A, o bien A o bien ~A es teorema de la extensión.

Si LB^c es una extensión consistente y completa de LB, entonces cualquier otra extensión de LB, en la cual la clase de los teoremas extienda a la clase de los teoremas de LB^c, es inconsistente. En efecto, supóngase que A no es teorema de LB^c. Entonces ~A es teorema de LB^c. Así pues, si A es un teorema de otra extensión, también lo es ~A, de modo que esta otra extensión no puede ser consistente.

En este punto se probarán algunas reglas derivadas que se requieren para la prueba de la proposición 26, el teorema de completitud.

Proposición 9 (*Introducción y eliminación de la conjunción).*

$\vdash_{LB} A \wedge B \Leftrightarrow \vdash_{LB} A$ y $\vdash_{LB} B$

Prueba: Supóngase que $A \wedge B$ es un teorema de LB, por Ax0.6 y MP se tiene A y por Ax0.7 y MP se tiene B. Ahora supóngase que A y B son teoremas de LB, por Ax0.8 se tiene $(A \to A) \to [(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))]$, pero el antecedente es un teorema, por lo que se infiere $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$; el antecedente de este condicional se obtiene de B utilizando Ax0.1, por lo que se infiere $A \to (A \wedge B)$, y como se tiene A, entonces también se tiene $A \wedge B$.

Proposición 10 *(Introducción de la disyunción).*

$\vdash_{LB} A \Rightarrow \vdash_{LB} A \vee B$ y $\vdash_{LB} B \vee A$.

Prueba: Supóngase que A es un teorema de LB, por Ax0.3 y MP se tiene $A \vee B$ y por Ax0.4 y MP se tiene $B \vee A$.

Proposición 11 *(Silogismo hipotético).*

$\vdash_{LB} A \to B$ y $\vdash_{LB} B \to C \Rightarrow \vdash_{LB} A \to C$.

Prueba: Supóngase que $A \to B$ y $B \to C$ son teoremas de LB, se probará $A \to C$ utilizando la proposición 2, teorema de deducción, por lo que se supone A y se debe probar C. Por MP entre $A \to B$ y A se tiene B, como además se tiene $B \to C$, se infiere C.

Proposición 12 *(Eliminación de la disyunción).*

$\vdash_{LB} A \vee B$ y $\vdash_{LB} A \to C$ y $\vdash_{LB} B \to C \Rightarrow \vdash_{LB} C$.

Prueba: Consecuencia inmediata de Ax0.5.

Proposición 13 *(Dilema constructivo).*

$\vdash_{LB} A \vee B$ y $\vdash_{LB} A \to C$ y $\vdash_{LB} B \to D \Rightarrow \vdash_{LB} C \vee D$.

Prueba: Supóngase que $A \vee B$, $A \to C$ y $B \to D$ son teoremas de LB, utilizando Ax0.3 $C \to (C \vee D)$, Ax0.4 $D \to (C \vee D)$ y silogismo hipotético con las dos últimas premisas se tiene $A \to (C \vee D)$ y $B \to (C \vee D)$, y por la eliminación de la disyunción con la primera premisa se infiere $C \vee D$.

Proposición 14 *(Silogismo disyuntivo).*

$\vdash_{LB} A \vee B$ y $\vdash_{LB} {\sim}A \Rightarrow \vdash_{LB} B$.

Prueba: Supóngase que $A \vee B$ y ~A son teoremas de LB; utilizando Ax0.9 ${\sim}A \to (A \to B)$, resulta $A \to B$, por lo que de Ax0.5 $(A \to B) \to [(B \to B) \to ((A \vee B) \to B)]$ se infiere $(B \to B) \to ((A \vee B) \to B)$; como el antecedente es teorema entonces resulta $(A \vee B) \to B$, y por MP con la primera premisa se infiere B.

Proposición 15 *(Demostración indirecta).*

$\vdash_{LB} A \to B$ y $\vdash_{LB} A \to {\sim}B \Rightarrow \vdash_{LB} {\sim}A$.

$\vdash_{LB} {\sim}A \to B$ y $\vdash_{LB} {\sim}A \to {\sim}B \Rightarrow \vdash_{LB} A$.

Prueba: Supóngase que $A \to B$ y $A \to {\sim}B$. Se probará $A \to {\sim}A$ utilizando la proposición 2, teorema de deducción, por lo que se supone A y se prueba ~A. Al tener A, $A \to B$ y $A \to {\sim}B$ se tienen B y ~B; por la introducción de la disyunción se tiene $B \vee {\sim}A$ y por el silogismo disyuntivo se infiere ~A. Se ha probado entonces $A \to {\sim}A$, por lo que de Ax0.5 $(A \to {\sim}A) \to [({\sim}A \to {\sim}A) \to ((A \vee {\sim}A) \to {\sim}A)]$ se deduce $({\sim}A \to {\sim}A) \to ((A \vee {\sim}A) \to {\sim}A)$, pero ${\sim}A \to {\sim}A$ es un teorema y $A \vee {\sim}A$ es Ax0.10, por lo que se infiere ~A. De manera similar se prueba la segunda parte de la proposición.

Proposición 16 *(Doble negación).*

$\vdash_{LB} A \Leftrightarrow \vdash_{LB} {\sim}{\sim}A$.

Prueba: Consecuencia inmediata de la proposición 15, demostración indirecta.

Proposición 17 ***(Negación de la disyunción).***
$\vdash_{LB} \sim(A\vee B) \Leftrightarrow \vdash_{LB} \sim A\wedge\sim B$.

Prueba: Supóngase que ~(A∨B) es un teorema de LB, por Ax0.1 y MP se infiere A→~(A∨B), y por Ax0.3 se tiene A→(A∨B). Por la proposición 15, demostración indirecta, en estos dos últimos resultados se infiere ~A. De manera similar se prueba ~B, y finalmente, por la introducción de la conjunción, resulta ~A∧~B.

Supóngase ahora que ~A∧~B es teorema de LB, por eliminación de la conjunción también lo serán ~A y ~B. Al tener ~B por Ax0.1 se tiene (A∨B)→~B. Se utilizará el teorema de deducción para probar (A∨B)→B, por lo que se supone A∨B y se debe probar B. Al suponer A∨B, y como se tiene ~A, se infiere B por el silogismo disyuntivo. Se tiene entonces que (A∨B)→~B y (A∨B)→B, y por la demostración indirecta, se concluye ~(A∨B).

Proposición 18 ***(Negación del condicional).***
$\vdash_{LB} \sim(A\to B) \Leftrightarrow \vdash_{LB} A\wedge\sim B$.

Prueba: Supóngase que ~(A→B) es un teorema de LB, por Ax0.1 y MP se infiere ~A→~(A→B), y por Ax0.9 se tiene ~A→(A→B). Por la proposición 15, demostración indirecta, en estos dos últimos resultados se infiere A. Por Ax0.1 se tiene B→(A→B) y de Ax0.1 y ~(A→B) se obtiene B→~(A→B); de nuevo por la demostración indirecta se infiere ~B. Al tener A y ~B se infiere A∧~B por la introducción de la conjunción.

Supóngase ahora que A∧~B es teorema de LB; por la eliminación de la conjunción, también lo serán A y ~B. Al tener ~B de Ax0.1 se deduce (A→B)→~B. Al suponer A→B se infiere B puesto que se tiene A, y por el teorema de deducción se ha probado (A→B)→B. Se tienen así (A→B)→~B y (A→B)→B, y por la demostración indirecta se deduce ~(A→B).

Proposición 19 ***(Transposición).***
$\vdash_{LB} A\to B \Leftrightarrow \vdash_{LB} \sim B\to\sim A$.

Prueba: Supóngase que A→B es un teorema de LB, se utilizará el teorema de deducción para probar ~B→~A. Supóngase ~B, utilizando Ax0.1 resulta A→~B; se tienen así A→B y A→~B y por la demostración indirecta se genera ~A. Lo que por teorema de deducción prueba ~B→~A.

El recíproco se prueba de manera similar.

Observar que se ha probado también el llamado *Modus Tollens MT*:

$\vdash_{LB} A\to B$ y $\vdash_{LB} \sim B \Rightarrow \vdash_{LB} \sim A$.

Proposición 20 ***(Equivalencia material).***

$\vdash_{LB} A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash_{LB} (A\wedge B)\vee(\sim A\wedge\sim B)$.

Prueba: Supóngase que A↔B es un teorema de LB; usando Ax0.11 se infiere A→B y con Ax0.8 resulta (A→A)→[(A→(A∧B))], y puesto que A→A es teorema, se infiere A→(A∧B). De A↔B y Ax0.12 se infiere B→A y por la transposición se tiene ~A→~B; este resultado con Ax0.8 produce (~A→~A)→(~A→(~A∧~B)), y al ser ~A→~A teorema, se infiere ~A→(~A∧~B). En resumen, se tienen A→(A∧B) y ~A→(~A∧~B), pero A∨~A es Ax0.10, luego por el dilema constructivo se infiere (A∧B)∨(~A∧~B).

Supóngase ahora que A∧B es teorema de LB, por la eliminación de la conjunción se tienen A y B; utilizando Ax0.1 se tienen A→B y B→A, y utilizando Ax0.13 resulta A↔B. Por teorema de deducción se ha probado (A∧B)→(A↔B).

Supóngase ahora que ~A∧~B es teorema de LB, por la eliminación de la conjunción se tienen ~A y ~B, utilizando Ax0.9 se tienen A→B y B→A, y utilizando Ax0.13 resulta A↔B. Por teorema de deducción se ha probado (~A∧~B)→(A↔B).

Resumiendo se tienen (A∧B)→(A↔B) y (~A∧~B)→(A↔B), y utilizando Ax0.5 resulta [(A∧B)∨(~A∧~B)]→(A↔B). Esto significa que $\vdash_{LB} (A\wedge B)\vee(\sim A\wedge\sim B) \Rightarrow \vdash_{LB} A\leftrightarrow B$.

Proposición 21 ***(Transposición en la equivalencia).***
$\vdash_{LB} A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash_{LB} \sim A\leftrightarrow\sim B$.

Prueba: Supóngase que $A \leftrightarrow B$ es un teorema de LB; usando Ax0.11 y Ax0.12 se infieren $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$, utilizando la transposición del condicional resultan $\sim A \rightarrow \sim B$ y $\sim B \rightarrow \sim A$, usando Ax0.13 se infiere $\sim A \leftrightarrow \sim B$. La recíproca se prueba de la misma forma.

Proposición 22 ***(Equivalencia externa).***

Si J es una extensión consistente y completa de LB, entonces $\vdash_J A \leftrightarrow B$ si y solo si $\vdash_J A \Leftrightarrow \vdash_J B$.

Prueba: Similar a la prueba de *la proposición 2.22* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Proposición 23.

Si J es una extensión consistente y completa de LB, entonces $\vdash_J A \vee B$ si y sólo si $\vdash_J A$ o $\vdash_J B$.

Prueba: Similar a la prueba de *la proposición 2.23* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Proposición 24.

Sea LB* una extensión consistente de LB. Entonces existe una extensión consistente y completa de LB*.

Prueba: Similar a la prueba de *la proposición 2.24* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Proposición 25.

Si LB* es una extensión consistente de LB, entonces existe una LB-valuación en la cual todo teorema de LB* toma el valor 1.

Prueba: Se define v sobre fórmulas de LB, poniendo: $V(A) = 1$ si $\vdash_J A$, $V(A) = 0$ si $\vdash_J \sim A$, siendo J una extensión consistente y completa de LB*, como la dada en la demostración de la proposición 24. Nótese que V está definida sobre todas las fórmulas por ser J completa. Ahora bien, $V(A) = 1 \Leftrightarrow V(\sim A) = 0$ para toda fórmula A, ya que J es consistente, por lo que se satisface la definición V~.

Para el caso de los conectivos clásicos, de la incompatibilidad +~ y de la completez +~ se precede como en la prueba de la proposición 2.25 de *Lógica básica con afirmación alterna*.

Para el caso de la incompatibilidad $+\neg$, utilizando la transposición en la equivalencia, equivalencia externa, negación del condicional, doble negación e introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A^{I+\neg}) = 0 \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim A^{I+\neg} \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim(+A \rightarrow \sim\neg A) \Leftrightarrow \vdash_J +A \wedge \sim\sim\neg A \Leftrightarrow\ \vdash_J +A \wedge \neg A \Leftrightarrow\ \vdash_J +A$ y $\vdash_J \neg A \Leftrightarrow V(+A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$, por lo que se satisface la definición VI$+\neg$.

Para el caso de la completez $+\neg$, utilizando la transposición en la equivalencia, equivalencia externa, negación del condicional e introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A^{C+\neg}) = 0 \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim A^{C+\neg} \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim(\sim +A \rightarrow \neg A) \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim +A \wedge \sim\neg A \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim +A$ y $\vdash_J \sim\neg A \Leftrightarrow V(+A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$, por lo que se satisface la definición VC$+\neg$.

Para el caso de la incompatibilidad $*\neg$ utilizando la transposición en la equivalencia, la equivalencia externa, la negación del condicional, la doble negación y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A^{I*\neg}) = 0 \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim A^{I*\neg} \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim(\neg A \rightarrow \sim A) \Leftrightarrow \vdash_J \neg A \wedge \sim\sim A \Leftrightarrow\ \vdash_J \neg A \wedge A \Leftrightarrow\ \vdash_J \neg A$ y $\vdash_J A \Leftrightarrow V(\neg A) = 1$ y $V(A) = 1$, por lo que se satisface la definición VI$*\neg$.

Para el caso de la completez $*\neg$, utilizando la transposición en la equivalencia, la equivalencia externa, la negación del condicional y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que $V(A^{C*\neg}) = 0 \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim A^{C*\neg} \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim(\sim A \rightarrow \neg A) \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim A \wedge \sim\neg A \Leftrightarrow\ \vdash_J \sim A$ y $\vdash_J \sim\neg A \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$, por lo que se satisface la definición VC$*\neg$.

Se concluye finalmente que v es una LB-valuación, ya que se satisfacen los requisitos de la definición 4.

Sea ahora A un teorema de LB*. Entonces $\vdash_J A$, donde J es una extensión consistente y completa de LB*. Con ello, $V(A) = 1$.

Proposición 26 ***(El Teorema de Completitud para LB).***

Sea A una fórmula de LB, si A es LB-válida entonces A es LB-teorema.

Prueba: Similar a la prueba de *la proposición 2.26* presentada en *Lógica básica con afirmación alterna*.

Se ha comprobado, con las proposiciones 5 y 26, que los LB-teoremas son las fórmulas LB-válidas y sólo ellas. Para toda fórmula de LB, se tiene: $\vdash_{LB} A \Leftrightarrow\ \models_{LB} A$.

3. Dos extensiones de LB

Definición 10. El *sistema LBPo(+¬)* se construye a partir del sistema LB, alterando únicamente el conjunto de axiomas para los nuevos operadores. El *sistema* LBPo(+¬) tiene como axiomas para los nuevos operadores:

AxI+~. $A^{I+\sim} \leftrightarrow (+A \rightarrow A)$

AxC+~. $A^{C+\sim} \leftrightarrow (A \rightarrow +A)$

AxPI+¬[12]. $+A \rightarrow \sim\neg A$

AxC+¬. $A^{C+\neg} \leftrightarrow (\sim\neg A \rightarrow +A)$

AxI*¬. $A^{I*\neg} \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$

AxC*¬. $A^{C*\neg} \leftrightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$

$\vdash_{LBo} A$ indica que A es un LBPo(+¬)-teorema.

Definición 11. Una *LBPo(+¬)-valuación,* se define de manera similar a la *LB-valuación*. Sólo se cambia VI+¬ por VPI+¬: $V(+A) = 1 \Rightarrow V(\neg A) = 0$. $\models_{LBo} A$ indica que A es LBPo(+¬)-válida.

Definición 12. El *sistema LBPc(+¬)* se construye a partir del sistema LB, alterando únicamente el conjunto de axiomas para los nuevos operadores. El *sistema* LBPc(+¬) tiene como axiomas para los nuevos operadores:

AxI+~. $A^{I+\sim} \leftrightarrow (+A \rightarrow A)$

AxC+~. $A^{C+\sim} \leftrightarrow (A \rightarrow +A)$

AxI+¬. $A^{C+\neg} \leftrightarrow (+A \rightarrow \sim\neg A)$

AxPC+¬[12]. $\sim\neg A \rightarrow +A$

AxI*¬. $A^{I*\neg} \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$

AxC*¬. $A^{C*\neg} \leftrightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$

$\vdash_{LBc} A$ indica que A es un LBPc(+¬)-teorema.

Definición 13. Una *LBPc(+¬)-valuación* se define de manera similar a la *LB-valuación*. Sólo se cambia VC+¬ por VPC+¬: $V(+A) = 0 \Rightarrow V(\neg A) = 1$. $\models_{LBc} A$ indica que A es LBPc(+¬)-válida.

Definición 14. El *sistema CL** se construye a partir del sistema LB, alterando únicamente el conjunto de axiomas para los nuevos operadores. El sistema CL* tiene como axiomas para los nuevos operadores:

AxPI+~. $+A \rightarrow A$

AxPC+~. $A \rightarrow +A$

AxPI+¬. $+A \rightarrow \sim\neg A$

AxPC+¬. $\sim\neg A \rightarrow +A$

AxPI*¬. $\neg A \rightarrow \sim A$

AxPC*¬. $\sim A \rightarrow \neg A$

Como consecuencias inmediatas se tienen $+A \leftrightarrow A$ y $\neg A \leftrightarrow \sim A$, es decir, los dos tipos de afirmación coinciden y los dos tipos negación coinciden. En cierto sentido, CL* es la misma lógica clásica CL con dos notaciones para el operador afirmación y dos notaciones para el operador negación.

$\vdash_{CL*} A$ indica que A es un CL*-teorema.

Definición 15. Una CL*-*valuación* se define de manera similar a la *LB-valuación*. Sólo se cambian VI+~, VC+~, VI+¬, VC+¬, VI*¬ y VC*¬ por VPIC+~: $V(+A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y por VPIC*¬: $V(\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$. Como consecuencia, se tiene VPIC+¬: $V(+A) = 1 \Leftrightarrow V(\neg A) = 0$. $\models_{CL*} A$ indica que A es CL*-válida.

Definición 16. Inicialmente se tiene el cálculo proposicional clásico CL, se amplía su lenguaje y se

[12] AxPI+¬ recibe el nombre de *axioma de petición de incompatibilidad entre los operadores afirmación alterna y negación alterna*. Este axioma puede ser cambiado por la pareja de axiomas: $A^{I+\neg} \leftrightarrow (+A \rightarrow \sim\neg A)$ y $A^{I+\neg}$. Esto significa que el sistema un LBPo(+¬) puede ser obtenido a partir de LB, agregando como nuevo axioma $A^{I+\neg}$.

[13] AxPC+¬ recibe el nombre de *axioma de petición de determinabilidad entre los operadores afirmación alterna y negación alterna*. Este axioma puede ser cambiado por la pareja de axiomas: $A^{C+\neg} \leftrightarrow (\sim\neg A \rightarrow +A)$ y $A^{C+\neg}$. Esto significa que el sistema un LBPc(+¬) puede ser obtenido a partir de LB agregando como nuevo axioma $A^{C+\neg}$.

extiende el sistema resultante a LB; posteriormente se extiende LB a LBPc(+,¬) y a LBPo(+,¬), y a CL*. Por esta razón los sistemas arriba presentados, diferentes de CL y de CL*, son llamados *Sistemas Intermedios*.

Observando la prueba de la caracterización del sistema LB, se concluye que cada uno de los sistemas intermedios está caracterizado por la respectiva semántica presentada.

Proposición 27. ***(Caracterización de los sistemas intermedios).***

Los sistemas LBPc(+¬),LBPo(+¬) y CL* son caracterizados por la respectiva semántica presentada.

4. Jerarquización de los Sistemas Intermedios

Definición 17. Se dice que el sistema Sf es *más fuerte que* el sistema Sd, si y solamente si el conjunto de consecuencias de Sf incluye propiamente al conjunto de consecuencias de Sd; es decir, si todo teorema de Sd es también teorema de Sf, y además existe una fórmula de LB, la cual es válida en Sf y no es válida en Sd. Se dice que Sd es *más débil que* Sf si y solamente si Sf es *más fuerte que* Sd.

Definición 18. Se dice que los sistemas S1 y S2 *son independientes,* si y solamente si ni S1 es más fuerte que S2, ni S2 es más fuerte que S1 y los conjuntos de teoremas de S1 y S2 son diferentes, es decir; si existe un teorema de S1 que no es teorema de S2 y existe un teorema de S2 que no es teorema de S1.

Proposición 28.

LBPo(+,¬) es más fuerte que LB.

Prueba: Por la definición de los sistemas, todo teorema de LB es teorema de LBPo(+,¬). Sea v una LB-*valuación* y A una fórmula atómica tal que: V(A) = 1, V(¬A) = 1 y V(+A) = 1. Se verifica que V(AxPI+¬) = V(+A→~¬A) = 0. Por lo tanto AxPI+¬ no es teorema de LB. Se concluye así que LBPo(+,¬) es más fuerte que LB.

Proposición 29.

LBPc(+,¬) es más fuerte que LB.

Prueba: Por la definición de los sistemas, todo teorema de LB es teorema de LBPc(+,¬). Sea v una LB-*valuación* y A una fórmula atómica tal que: V(A) = 1, V(¬A) = 0 y V(+A) = 0. Se verifica que V(AxPC+¬) = V(~¬A→+A) = 0. Por lo tanto AxPC+¬ no es teorema de LB. Se concluye así que LBPc(+,¬) es más fuerte que LB.

Proposición 30.

LBPc(+,¬) es independiente de LBPo(+,¬).

Prueba: Sea v_1 una LB-*valuación* y A una fórmula atómica tal que: V_1(A) = 1, V_1(¬A) = 1 y V_1(+A) = 1. Se verifica que V_1(AxPI+¬) = V_1(+A→~¬A) = 0 y V_1(AxPC+¬) = V_1(~¬A→+A) = 1. Por lo tanto AxPI+¬ no es teorema de LBPc(+,¬). Sea v_2 una LB-*valuación* y A una fórmula atómica tal que: V_2(A) = 1, V_2(¬A) = 0 y V_2(+A) = 0. Se verifica que V_2(AxPC+¬) = V_2(~¬A→+A) = 0 y V_2(AxPI+¬) = V_2(+A→~¬A) = 1. Por lo tanto AxPC+¬ no es teorema de LBPo(+,¬). Se concluye así que LBPc(+,¬) y LBPo(+,¬) son independientes.

Proposición 31.

CL* es más fuerte que LBPo(+,¬).

Prueba: Por la definición de los sistemas, todo teorema de LBPo(+,¬) es teorema de CL*. Sea v una LB-*valuación* y A una fórmula atómica tal que: V(A) = 1, V(¬A) = 1 y V(+A) = 1. Se verifica que V(AxPI+¬) = V(+A→~¬A) = 0 y V(AxPC+¬) = V(~¬A→+A) = 1. Por lo tanto AxPI+¬ no es teorema de LBPo(+,¬). Se concluye así que CL* es más fuerte que LBPo(+,¬).

Proposición 32.

CL* es más fuerte que LBPc(+,¬).

Prueba: Por la definición de los sistemas, todo teorema de LBPc(+,¬) es teorema de CL*. Sea v una LB-*valuación* y A una fórmula atómica tal que: V(A) = 1, V(¬A) = 0 y V(+A) = 0. Se verifica que V(AxPC+¬) = V(~¬A→+A) = 0 y V(AxPI+¬) = V(+A→~¬A) = 1. Por lo tanto, AxPC+¬ no es teorema de LBPc(+,¬). Se concluye así que CL* es más fuerte que LBPc(+,¬).

Conclusiones

Los últimos resultados, proposiciones 28 a 32, indican que los axiomas AxPI+¬ y AxPC+¬ son independientes de los demás axiomas en los sistemas presentados. La metodología expuesta para jerarquizar los sistemas puede ser utilizada para estudiar extensiones de LB, en las cuales se requiera por ejemplo una afirmación alterna fuerte y una negación alterna débil. Algunos sistemas pueden ser extendidos haciendo peticiones más fuertes; por ejemplo, en un sistema con afirmación fuerte se puede requerir que de la afirmación fuerte de una conjunción, se infiera la conjunción de las afirmaciones fuertes de los coyuntos, pero no la recíproca.

Los comentarios anteriores sugieren la existencia de una extensa variedad de sistemas, los cuales pueden ser finamente articulados.

Bibliografía

Caicedo, X. (1990). *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Universidad de los Andes. Bogotá

Carnielli, W. y Marcos, J. (2002). “A Taxonomy of C-Systems”. En: *Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent. Lecture Notes In Pure and Applied Mathematics*. Vol. 228

Da Costa, N. (1993). *Inconsistent Formal Systems*. Curitiba: UFPR.

Hamilton, A. (1981). *Lógica para Matemáticos*. Madrid: Paraninfo.

Hughes, G. y Cresswell, M. (1968) *An Introduction to Modal Logic*. Londres: Methuen.

Sierra, M. (2005). “Lógica Básica con Afirmación Alterna”. En: *Revista Ingeniería y Ciencia*. Vol. 1, No. 1. Medellín.

________ (2004). “Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta y algunas de sus Extensiones”. En: *Revista Universidad EAFIT*. Vol. 40. No. 133.

_________ (2002). “Lógica Básica con Aceptación Fuerte”. En: *Revista Boletín de Matemáticas*. Vol. IX, No. 1.