

Diseño y aplicación del control multifrecuencia con un esquema de muestreo irregular

Carlos Mario Vélez Sánchez

Doctor en Ciencias Físicas, con especialidad en
Automática e Informática Industrial. Profesor Titular del
Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad EAFIT.
cmvelez@eafit.edu.co



Recepción: 29 de enero de 2004 | Aceptación: 27 de julio de 2004

Resumen

El control multifrecuencia permite una mayor libertad en el diseño de reguladores debido a la selección de diversos esquemas de muestreo. Es así como un sistema convencional de una entrada y una salida (SISO) puede convertirse en un sistema multifrecuencia con múltiples entradas y salidas (MIMO) y las dimensiones del modelo pueden hacerse cuadradas, con lo que el diseño se simplifica considerablemente. Esta idea es mencionada por algunos autores, pero sólo hasta ahora se aplica de una manera directa utilizando un tipo especial de muestreo y un método de control por igualación al modelo.

Palabras Clave

Control multifrecuencia
Control en tiempo real
Muestreo irregular
Control por igualación al modelo

Design and application of multirate control with an irregular sampling pattern

Abstract

Multirate control allows a greater freedom for the design of control systems due to the selection of diverse sampling patterns. So, a conventional SISO (Single-Input Single-Output) system may be transformed into a multirate MIMO (Multi-Input Multi-Output) system with square matrices, which considerably simplifies the design. This idea is mentioned by some authors, but only now it is directly applied using a special type of sampling and a model matching control method.

Key Words

Multirate control
Real-time control
Irregular sampling
Model matching control

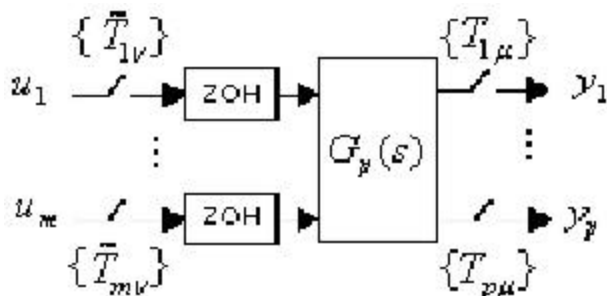
Introducción

Un sistema multifrecuencia o con muestreo no convencional es un sistema digital en el cual dos o más variables son actualizadas a frecuencias distintas. Las variables pueden pertenecer a un mismo lazo de control o a diferentes lazos, como en el caso de sistemas multivariables (Vélez, 2002).

Un hecho común en la mayoría de los modelos de sistemas de control multifrecuencia es la representación por medio de una ecuación de estado invariable en el tiempo del sistema multifrecuencia. La ecuación está dada a un período global T_o , envolvente de todos los períodos de muestreo existentes en el sistema, y contiene más entradas y salidas que el sistema original. En fuentes recientes se especifican algunas propiedades de este tipo de modelos y se actualiza el estado del arte del control multifrecuencia (Vélez, 2001; Lee, 2003; Wang, 2004).

Se considera un sistema de control multifrecuencia irregular de orden n con m entradas y p salidas, tal y como se muestra en la Figura 1. Se considera que todas las entradas y salidas se sincronizan cada período global.

Figura 1. Sistema multifrecuencia



El modelo matemático del sistema multifrecuencia de la Figura 1 se da en la ecuación (1). La definición de parámetros, vectores y matrices se explica brevemente a continuación (Vélez, 2001; Vélez, 2002).

$$\begin{cases} \mathbf{x}^D((k+1)T_o) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}^D(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}^D(kT_o) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}^D(kT_o) \end{cases} \quad (1)$$

Las matrices y vectores en el modelo (1) tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^D(kT_o) &= [\dots | u_j(kT_o + \tilde{T}_{1j}) \dots | u_i(kT_o - \tilde{T}_{2i}, s) \dots] \\ \mathbf{y}^D(kT_o) &= [\dots | y_i(kT_o + T_{1i}) \dots | y_i(kT_o + T_{2i}) | \dots] \\ \mathbf{x}^D(kT_o) &= [x_i(kT_o) \dots | u_i((k-1)T_o + \tilde{T}_{2i}) \dots] \end{aligned}$$

Las dimensiones de las matrices son:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &\in (n-m) \times (n-m) & \mathbf{B} &\in (n-m) \times \bar{m} \\ \tilde{\mathbf{C}} &\in \bar{p} \times (n-m) & \mathbf{D} &\in \bar{p} \times \bar{m} \\ \mathbf{x} &\in (n-m) \times 1 & \mathbf{u}^D &\in \bar{m} \times 1 & \mathbf{y}^D &\in \bar{p} \times 1 \end{aligned}$$

\tilde{N}_j - Número de muestras de la entrada en el período global T_o .

N_i - Número de muestras de la salida en el período global T_o .

$$i = 1, 2, 3, \dots, p \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\bar{N} = N_1 \dots N_p \quad \bar{N} = \tilde{N}_1 + \dots + \tilde{N}_m$$

Los vectores (\mathbf{u}^D , \mathbf{y}^D) son vectores con todas las muestras de las entradas y salidas durante un período global T_o . De esta manera, un sistema SISO ("Single Input Single Output", una entrada y una salida) se convierte en un sistema MIMO ("Multi-Input Multi-Output", múltiples entradas y múltiples salidas). Seleccionando adecuadamente el muestreo, se puede lograr que todas las matrices en el modelo (1) sean cuadradas.

En el presente artículo se aprovecha la ventaja mencionada anteriormente para obtener un regulador multifrecuencia por igualación al modelo ("model matching"), el cual tiene ciertas características interesantes.

1. Método de control multifrecuencia por igualación al modelo

Para el diseño del control multifrecuencia que se expone a continuación, se tiene en cuenta que el modelo del sistema multifrecuencia es una representación invariable en el tiempo y que conserva todas las características del sistema multifrecuencia original (Meyer, 1990). De esta manera se pueden aplicar métodos de control clásico y moderno para sistemas discretos monofrecuencia, bajo ciertas condiciones (Lee, 2003; Wang, 2004). La principal condición es la restricción de causalidad: el regulador multifrecuencia $[\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n]$ satisface la restricción de causalidad si para $D_n = [D_n^c]$ y $D_n^D = [d_{y,w}^D]$, se tiene que $d_{y,w}^D = 0$ siempre que $T_{im} < T_{ju}$ (las salidas actuales no dependen de las entradas futuras). En otras palabras, se cumple la restricción de causalidad si \tilde{D}_n tiene una estructura triangular inferior por bloques.

En control existe un enfoque de diseño que propone métodos para el rediseño de reguladores continuos con base en las características en lazo o cerrado (problema de rediseño digital). Es decir, métodos en los cuales se pretende diseñar un regulador discreto (realimentación del estado o de la salida) que permita obtener una respuesta en lazo cerrado con un comportamiento coincidente en los instantes de muestreo con la respuesta con el regulador continuo. En particular, que permita que todos los estados del sistema muestreado en lazo cerrado coincidan con los estados del sistema original continuo en todo instante de muestreo (Torneró, 1999; Aström, 1997; Kuo, 1973; Yuping, 1999; Yuping, 2000; Er, 1991; Rafee, 1996; Yackel, 1974; Colaneri, 1997; In, 1994; Fujimoto, 1997).

En estos métodos el regulador continuo original es del tipo de realimentación del estado. Sin embargo, los distintos métodos propuestos no aseguran, en general, el comportamiento deseado (estabilidad en lazo cerrado y respuesta temporal), debido a que son métodos aproximados. La aproximación surge debido a que no siempre es posible despejar directamente las matrices de diseño (generalmente la dimensión del vector de entradas es menor que la del estado) y es necesario recurrir a algoritmos aproximados para el cálculo de dichos reguladores (Misra, 1989).

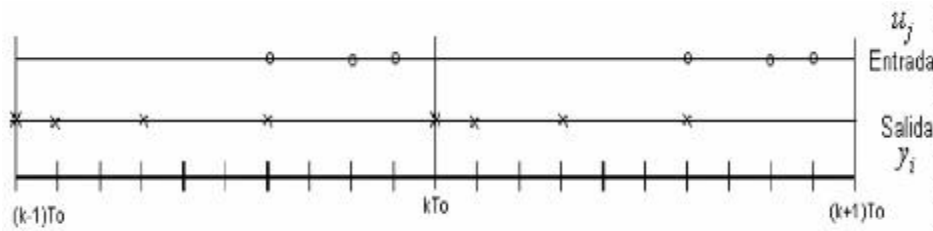
El enfoque de rediseño digital puede ser tratado como un problema de igualación (Ogata, 1996) o emparejamiento al modelo ("model matching"),



donde el modelo deseado (modelo de referencia) puede ser el modelo en lazo cerrado obtenido con un regulador continuo. La idea principal del método por igualación al modelo consiste en especificar un modelo deseado en lazo cerrado (continuo o discreto), el cual puede obtenerse a partir de ciertas especificaciones de diseño o por reducción de un diagrama en lazo cerrado con un regulador continuo (discretización en lazo cerrado). La idea consiste en “obtener un controlador para una planta dada de manera que el sistema en lazo cerrado esté caracterizado por un modelo de referencia deseado”.

Como se explicó anteriormente, es posible seleccionar siempre un esquema de muestreo de manera que las matrices necesarias sean cuadradas. Al utilizar un esquema de muestreo FOLI (“First Outputs Last Inputs”) dado en la Figura 2, se garantiza la restricción de causalidad ($\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$) y que todas las matrices sean cuadradas y de rango completo, con lo que es posible la operación de inversión de dichas matrices y la implementación del regulador de igualación al modelo.

Figura 2. Esquema de muestreo FOLI

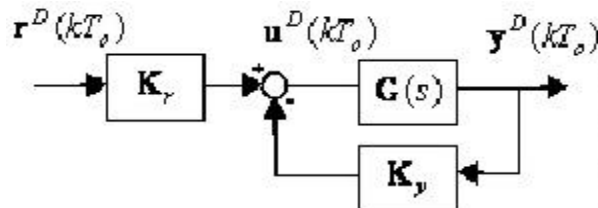


El modelo en lazo cerrado de un sistema con un regulador multifrecuencia FOLI estático de realimentación de la salida y con un esquema de control con dos grados de libertad (ver Figura 3) se da en la ecuación (2).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^D((k-1)T_0) &= (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_v\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{x}^D(kT_0) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_r r^D(kT_0) \\ \mathbf{y}^D(kT_0) &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}^D(kT_0) \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{K}_r \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Figura 3. Esquema de control con dos grados de libertad



Se desea obtener un comportamiento en lazo cerrado dado por el modelo multifrecuencia de referencia de la ecuación (3).

$$\begin{cases} \mathbf{x}^D((k-1)T_0) = \tilde{\mathbf{A}}_d \mathbf{x}^D(kT_0) + \tilde{\mathbf{B}}_d r^D(kT_0) \\ \mathbf{y}^D(kT_0) = \tilde{\mathbf{C}}_d \mathbf{x}^D(kT_0) \end{cases} \quad (3)$$

El modelo deseado corresponde a un modelo multifrecuencia a período global. Existen varias posibilidades de obtener el modelo deseado:

- Ubicando los polos y ceros en continuo y discretizando el modelo a período global en un esquema multifrecuencia (semejante al de la planta). Este es el método más claro y directo para plantas SISO.
- Discretizando en un esquema multifrecuencia el sistema en lazo cerrado con un regulador satisfactorio, continuo o discreto a período base. Este es el método más claro y directo para plantas MIMO.
- Especificando directamente el modelo multifrecuencia deseado a período global (poco claro, ya que para un sistema SISO el respectivo modelo sería uno MIMO).

Se considera aquí que los modelos están en una forma tal, que:

$$\tilde{\mathbf{C}}_d = \tilde{\mathbf{C}} \quad (4)$$

Esta última condición es fácil de cumplir si se utiliza la siguiente transformación lineal de las variables de estado en el modelo deseado (la deducción es directa si se compara el modelo deseado, transformado con el modelo multifrecuencia de la planta):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{T}\mathbf{x} \\ \mathbf{T} &= \tilde{\mathbf{C}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_d \end{aligned} \quad (5)$$

Comparando las ecuaciones (2) y (3) se llega a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_r\tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_r &= \tilde{\mathbf{B}}_r \end{aligned} \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que el modelo multifrecuencia con offset de las entradas es de orden $(n + m)$, se selecciona el muestreo de manera que en el modelo multifrecuencia las matrices sean cuadradas y de rango completo. De esta manera es fácil despejar de la ecuación anterior las matrices del regulador multifrecuencia de dos grados de libertad:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_r &= \tilde{\mathbf{B}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}_d)\tilde{\mathbf{C}}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{K}}_r &= \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r \end{aligned} \quad (7)$$

El cálculo de las matrices del regulador es muy sencillo y no considera ninguna aproximación, es un cálculo exacto. El buen condicionamiento de las matrices $(\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ se puede lograr con una adecuada selección del esquema de muestreo (Vélez 2001).

Características generales del método:

- El método es aplicable a plantas MIMO estables e inestables
- El cálculo de las matrices del regulador es sencillo y directo (multiplicación e inversión de matrices), ya que las matrices son cuadradas. Si se toman más muestras de las necesarias puede utilizarse el cálculo de pseudoinversas (en el contexto de los sistemas compartidos no se justifica tomar más muestras de las necesarias, por razones de optimización de los recursos). Se puede implementar fácilmente el método en un programa de cómputo como Matlab
- El regulador diseñado es completamente causal, debido al esquema de muestreo seleccionado (FOLI), en el cual toda acción de control se basa en muestras de las salidas en instantes anteriores
- Aunque el diseño es sencillo existe una pequeña diferencia entre el modelo deseado y el obtenido, ya que las acciones de control se aplican con cierto retardo llamado "offset" (ver Figura 2). Este retardo se puede disminuir si se reduce el tiempo en el cual se aplica la primera señal de control
- El esquema de muestreo MRIC es un caso particular del esquema FOLI, pero con menos libertad en el diseño. En este caso el diseño es semejante al expuesto aquí, si se considera una realimentación del estado y no de la salida. En este caso particular no hay offset de las entradas del modelo multifrecuencia y, debido a que se utiliza un regulador estático, el modelo de referencia es del mismo orden de la planta y contiene un número de entradas y salidas igual a p , número de salidas de la planta. Es decir, el modelo de referencia es de fácil interpretación desde el punto de vista del control convencional

2. Aplicación a un motor de corriente continua

A continuación se aplica el método descrito en el numeral anterior a un motor real de corriente continua (Toshiba, DGM-3491-2A, con motor reductor, convertidor de frecuencia a voltaje con dos capacitores y amplificador de corriente controlado por voltaje). El modelo matemático del motor (muestreo a 0.01 seg) se obtuvo por identificación, utilizando el método no paramétrico de respuesta temporal (Vélez, 2003b).

$$G(s) = \frac{85.13}{s^2 + 17.41s + 99.11} \tag{8}$$

$$G(z) = \frac{0.004017 - 0.0379z^{-1}}{z^2 + 1.831z - 0.8402}$$

Polos continuos: $-8.7033 \pm 4.8332i$
 Polos discretos: $0.9156 \pm 0.0443i$

La aplicación del método al control del motor se detalla en los siguientes párrafos.

Modelo discreto (a período base $T = 0.01$ seg) del motor en variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.831 & -0.8402 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0.06427 \quad 0.06064] \mathbf{x}$$

Modelo deseado discreto (a período base $T = 0.01$ seg) en variables de estado:

$$G_d(s) = \frac{144}{(s + 12)^2}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.774 & -0.7866 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0.05319 \quad 0.0491] \mathbf{x}$$

Se selecciona el esquema de muestreo FOLI, de manera que las matrices sean cuadradas (primero se toman todas las muestras de las salidas y luego de las entradas de la planta):

$T_{out} = \{[0, 0.01, 0.02]\}$ $T_{in} = \{[0.02, 0.03, 0.04]\}$
 $T_o = 0.05$

El cálculo de los modelos multifrecuencia de la planta y de referencia se realiza aplicando el método desarrollado por el autor (Vélez, 2001):

$$\dot{\mathbf{x}}^D = \begin{bmatrix} 3.83 & -2.938 & 0.41 \\ 3.497 & -2.573 & 0.3485 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^D + \begin{bmatrix} 0.1571 & 0.1144 & 0.0625 \\ 0.1144 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}^D$$

$$\mathbf{y}^D = \begin{bmatrix} 0.06427 & 0.06064 & 0 \\ 0.1783 & 0.054 & 0.004017 \\ 0.2727 & -0.1498 & 0.01516 \end{bmatrix} \mathbf{x}^D + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}^D$$

$$\dot{\mathbf{x}}_d^D = \begin{bmatrix} 3.293 & 2.434 & 0.7356 \\ 3.094 & 2.195 & 0.6438 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d^D + \begin{bmatrix} 0.295 & 0.2217 & 0.125 \\ 0.2217 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}^D$$

$$\mathbf{y}^D = \begin{bmatrix} 0.05319 & 0.0491 & 0 \\ 0.1435 & -0.04184 & 0.006649 \\ 0.2126 & -0.1128 & 0.02458 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d^D + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}^D$$

Ahora se transforma el modelo de referencia multifrecuencia de acuerdo con la ecuación (5):

$$\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_d = \begin{bmatrix} 1.2160 & 0.0052 & -0.009 \\ -0.0085 & 1.2294 & 0.0009 \\ 0.5295 & -0.4960 & 0.6285 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^D = \begin{bmatrix} 3.62 & 2.74 & 0.375 \\ 3.38 & 2.46 & 0.328 \\ 0.38 & 0.36 & -0.057 \end{bmatrix} \mathbf{x}^D + \begin{bmatrix} 0.242 & 0.182 & 0.104 \\ 0.182 & 0.103 & -0.0004 \\ 0.06 & 0.072 & 1.503 \end{bmatrix} \mathbf{u}^D$$

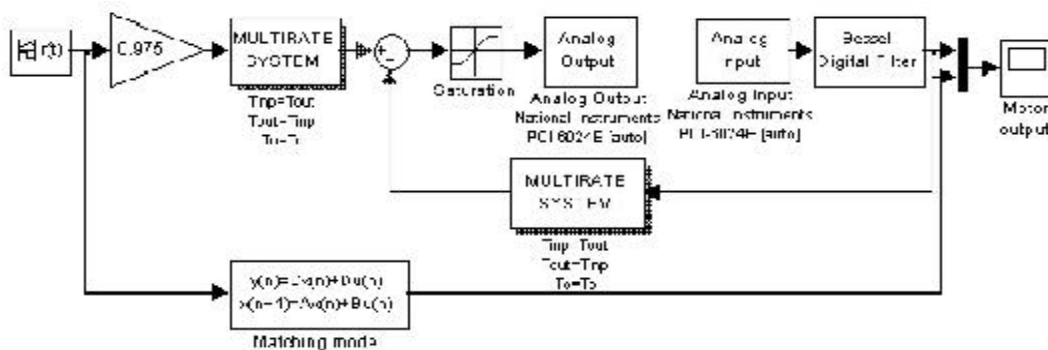
$$\mathbf{y}^D = \begin{bmatrix} 0.0643 & 0.0606 & 0 \\ 0.1783 & -0.054 & 0.004 \\ 0.2727 & -0.15 & 0.015 \end{bmatrix} \mathbf{x}^D + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}^D$$

El cálculo del regulador se realiza según la ecuación (7):

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{B}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}_d)\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 6.634 & -16.97 & 11.68 \\ 2.83 & 14.6 & 12.36 \\ 1.616 & -7.01 & 5.6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_v = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_d = \begin{bmatrix} 1.67 & 0.042 & -0.203 \\ -0.151 & 1.57 & 0.366 \\ -0.06 & -0.07 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Figura 4. Diagrama de control multifrecuencia del motor con el método de igualación al modelo



La simulación se realiza con el Multirate Control Toolbox (Vélez, 2003c). El diagrama de control multifrecuencia del motor con el método de igualación al modelo se muestra en la Figura 4 y los resultados en las Figuras 5 y 6. La respuesta temporal sigue bastante bien la respuesta deseada (obtenida aquí por simulación), con un pequeño error en la respuesta estacionaria para el tercer escalón, debido principalmente a errores de modelado y a efectos no lineales relacionados con la presencia de una fricción interna en el motor. La acción de control está dentro de los límites normales y es inferior a pruebas realizadas con métodos de control convencional como PID o asignación de polos. De esta manera se ilustra la forma sencilla de obtener una respuesta deseada aplicando el control multifrecuencia y el esquema FOLI explicados en la sección 2.

Figura 5. Respuesta temporal del motor con un control multifrecuencia por igualación al modelo

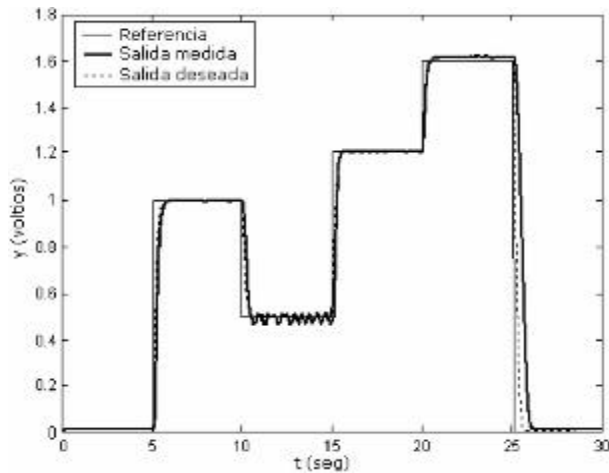
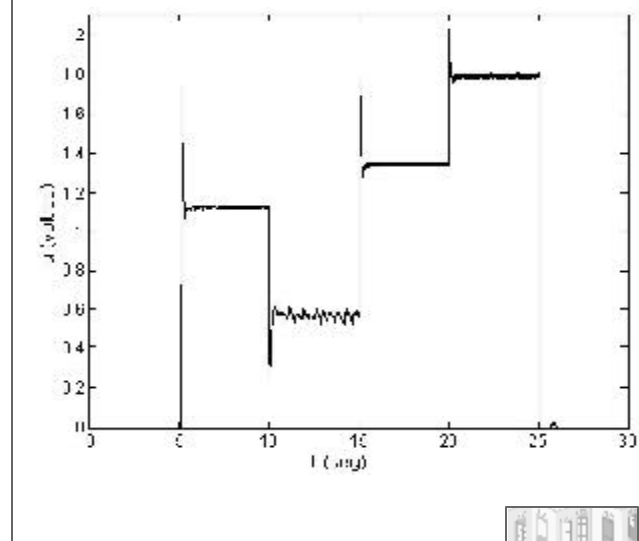


Figura 6. Acción de control aplicada al motor con un control multifrecuencia por igualación al modelo



Conclusiones

En este trabajo se mostró un método nuevo de control multifrecuencia por igualación del modelo, utilizando un esquema irregular de muestreo denominado FOLI. Se aplicó el método a un motor de corriente continua real con excelentes resultados. El diseño es simple y utiliza los grados de libertad del control multifrecuencia al permitir ampliar el orden de las matrices del modelo matemático (“juego” matemático con el muestreo con fines de diseño). Los resultados son excelentes y muy superiores a métodos de control convencional, obtenidos y analizados en otros trabajos (Vélez, 2003b).

El esquema FOLI es posible sólo con el método de modelado multifrecuencia obtenido por el autor, ya que considera explícitamente una desincronización (“offset”) en entradas y salidas; es decir, no es necesario que todas las entradas y salidas coincidan al principio de cada período global.

Reconocimientos

Este trabajo fue posible gracias a la Universidad EAFIT, que ha apoyado decididamente los proyectos de investigación teóricos y aplicados realizados en los diferentes programas de la institución.

Bibliografía

- Aström, K. J. and Wittenmark, B. (1997). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. New York: Prentice-Hall. 555 p.
- Colaneri, P., and Kucera, V. (1997). "The Model matching problem for periodic discrete-time systems". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 42. pp. 1472-1476.
- Er, M.J. and Anderson B.D. (1991). "Practical Issues in Multirate Output Controllers". En: *International Journal of Control*. Vol. 53. pp. 1005-1020.
- Fujimoto, H.; Kawamura, A. and Tomizuka, M. (1997). "Proposal of Generalized Digital Redesign Method in use of N-Delay Control". En: *Proceedings of American Control Conference*. Vol. 1. pp. 3290-3294.
- In, H. and Zhang, C. (1994). "A Multirate Digital Controller for Model Matching". En: *Automatica*. Vol. 30. pp. 1043-1050.
- Kuo, B.C. and Peterson, D.W. (1973). "Optimal discretization of continuous-data control systems". En: *Automatica*. Vol. 9. pp. 125-129.
- Lee, S-H; Cheng, C.C. and Suh, S-M (2003). "Multirate digital control for high track density magnetic disk drives". En: *IEEE Transactions on Magnetics*. Vol. 39. pp 832-837.
- Meyer, D.G. (1990). "A new class of shift-varying operators, the shift-invariant equivalents and multirate digital systems". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol 35. pp. 429-433.
- Misra, P. and Patel, R.V. (1989). "Numerical Algorithms for Eigenvalue Assignment by Constant and Dynamic Output Feedback". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 34. pp. 579-588.
- Ogata, K. (1996). *Sistemas de control en tiempo discreto*. México: Prentice-Hall. 745 p.
- Rafee, N.; Chen, T. and Malik, O.P. (1996). "Multirate discretization of analog controllers". En: *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. Vol. 2. pp. 554-557.
- Tornero, J.; Gu, Y. and Tomizuka, M. (1999). "Analysis of multi-rate discrete equivalent of continuous controller". En: *Proceedings of American Control Conference*. Vol. 4. pp. 2759-2763.
- Vélez, C.M. (2001). *Modelado y simulación de sistemas con muestreo no convencional. Tesis doctoral*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia. 174 p.
- Vélez, C.M. (2002). "Modelado, simulación y control de sistemas con muestreo no convencional". En: *Revista Universidad EAFIT*. No. 125. pp 9-20.
- Vélez, C.M. (2003a). Control multifrecuencia en tiempo real. En: *Revista Universidad EAFIT*. No. 132. pp. 23-32.
- Vélez, C.M. (2003b). *Diseño e implementación de sistemas de control con muestreo no convencional - Informe de investigación 2003*. Medellín: Universidad EAFIT. 126 p.
- Vélez, C.M. (2003c). *Multirate Control Toolbox para Matlab/Simulink*. <http://www.control-systems.net/investigacion/control/multirate.htm> (20 oct. 2004).
- Wang, J.; Chen, T. and Huang B. (2004). "Multirate sampled-data systems: computing fast-rate models". *Journal of Process Control*. Vol. 14, pp. 79-88.
- Yackel, R.A.; Kuo, B.C. and Singh G. (1974). "Digital redesign of continuous systems by matching of states at multiple sampling periods". *Automatica*. Vol. 10. pp. 105-111.
- Yuping, G.; Tomizuka, M. and Tornero, J. (1999). "Digital redesign of continuous time controller by multirate sampling and high order Lodz". *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 4. pp. 3422-3427.
- Yuping, Gu and Tomizuka, M. (2000). "Multirate digital redesign of continuous time controllers based on closed-loop performance". *Proceedings of American Control Conference*. Vol. 1. pp. 1149-1153.