REVISTA Universidad EAFIT
Vol. 39. No. 132. 2003. pp. 60-105

Lógica básica paraconsistente y paracompleta y algunas de sus extensiones*

Manuel Sierra Aristizábal
Magíster en matemáticas. Se desempeña como profesor del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad EAFIT
msierra@eafit.edu.co

Recepción: 13 de diciembre de 2002 I Aceptación: 8 de mayo de 2003

Abstract

El operador "negación clásica", simbolizado "~", está caracterizado desde el punto de vista semántico por la siguiente equivalencia:

A es aceptado $\Leftrightarrow$ ~A no es aceptado

Esta equivalencia dice que un enunciado es aceptado si y solamente si su negación no es aceptada. En ella pueden leerse 4 enunciados condicionales:

A es aceptado $\Rightarrow$~A no es aceptado
~A es aceptado $\Rightarrow$A no es aceptado
A no es aceptado $\Rightarrow$~A es aceptado
~A no es aceptado $\Rightarrow$A es aceptado

Los dos primeros enunciados son equivalentes y prohíben: que un enunciado y su negación sean ambos aceptados, es decir, se prohíbe que un enunciado sea compatible con su negación; los dos últimos son equivalentes y prohíben que un enunciado y su negación sean ambos no aceptados, es decir, se prohíbe las indeterminaciones respecto a la negación. La negación clásica prohíbe la compatibilidad de un enunciado con su negación y las indeterminaciones respecto a la negación. El sistema Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta LBPco, presentado en este trabajo, es una generalización de la lógica clásica, en él se tiene un operador llamado "negación débil", el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación, ni las indeterminaciones respecto a la negación. Los

* Los aportes presentados en este trabajo forman parte de los resultados obtenidos en el proyecto "inferencia visual para sistemas deductivos con operador negación", el cual es financiado por la Universidad EAFIT:

sistemas Lógica Básica Paraconsistente LBPc y Lógica Básica Paracompleta LBPo son casos particulares de LBPco, en el primero se prohíben las indeterminaciones y se permite la compatibilidad, en el segundo, se prohibe la compatibilidad y se permiten las indeterminaciones. Al aproximar, respecto a los conectivos implicación conjunción y disyunción, el comportamiento del nuevo operador al de la negación clásica, se obtienen los sistemas Lógica Positiva Paraconsistente y Paracompleta LPPco, Lógica Positiva Paraconsistente LPPc y Lógica Positiva Paracompleta LPPco. Al aproximar, respecto a los conectivos negación fuerte y negación débil, el comportamiento del nuevo operador al de la negación clásica, se obtienen los sistemas Lógica Paraconsistente y Paracompleta LPco, Lógica Paraconsistente LPc y Lógica Paracompleta LPo. Al permitir, a los sistemas básicos, las indeterminaciones y las compatibilidades sólo a los enunciados atómicos, se obtienen los sistemas Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Débil a nivel Atómico LBPcoDA, Lógica Básica Paraconsistente Débil a nivel Atómico LBPcDA y Lógica Básica Paracompleta Débil a nivel Atómico LBPoDA; ésta misma restricción a los sistemas más fuertes da origen a los sistemas Lógica Paraconsistente y Paracompleta a nivel Atómico LPcoA, Lógica Paraconsistente a nivel Atómico LPcA y Lógica Paracompleta a nivel Atómico LPoA. Todos los sistemas son presentados axiomáticamente y son caracterizados semánticamente utilizando una poderosa herramienta de inferencia visual llamada Árboles de Forzamiento Semántico.

Palabras claves
Lógica Paraconsistente
Lógica Paracompleta
Negación
Contradicción
Trivialización
Compatibilidad
Completez

Basic Para-consistent and Para-complete Logic and some of its derivatives

Abstract

The operator "classical negation", symbolized "~", is characterized from the semantic point of view by the following equivalence:

A accepted $\Leftrightarrow$ ~A not accepted

This equivalence states that an enunciate is accepted if and only if its negation is not accepted. 4 conditional enunciates can be read:

A accepted $\Rightarrow$~A not accepted
~A accepted $\Rightarrow$A not accepted
A not accepted $\Rightarrow$~A accepted
~A not accepted $\Rightarrow$A accepted

The first two enunciates are equivalent and both prohibit: that an enunciate and its negation be both accepted, therefore, it is forbidden for an enunciate to be compatible with its negation; the two last ones are equivalent and prohibit an enunciate and its negation to be both not accepted, therefore, the indeterminations are prohibited regarding the negation. Classic negation prohibits compatibility of an enunciate with its negation and the indeterminations regarding the negation. The Basic Para-consistent and Para complete Logic system LBPco, shown in this work, is a generalization of classical logic, in this one there is an operator known as "weak negation", which bears the characteristic of not prohibiting compatibility of an enunciate with its negation, nor the indeterminations regarding the negation. The Basic Para-consistent Logic LBPc and Basic Para-complete logic are particular cases of LBPco, in the first one indeterminations are prohibited and compatibility is permitted, in the second one, compatibility is prohibited and indeterminations are permitted. When rounding, regarding the connectives implication conjunction and disjunction, the performance of the new operator to the one of classic negation, the Positive Para-consistent and Para-complete logic LPPco, Positive Para-consistent Logic LPPc, and Positive Para-complete LPPco logic are obtained. When rounding, regarding the strong and weak negation connectives, the performance of the new operator to the one of classic negation, the Para-consistent and Para-complete LPco, Para-consistent LPc, and Para-complete LPo logic are obtained. When permitting, to the basic systems, the indeterminations and the compatibilities only to atomic enunciates, the Basic Para-consistent and Para-complete weak at an atomic level LBPcoDA, Basic Para-consistent logic at atomic level LBPcDA and Basic Para-complete logic weak at atomic level LBPoDA are obtained; this same restriction to the stronger systems gives origin to the Para-consistent and Para-complete logic at atomic level LPcoA, Para-consistent logic at atomic level LPcA and Para-complete logic at atomic level LPoA. All the systems are shown axiomatically and are semantically characterized using a powerful tool of visual inference called Semantic Forcing Trees.

Key Words

Para-consistent Logic
Para-complete Logic
Negation
Contradiction
Triviality
Compatibility
Completez

Introducción

1. Sistema deductivo para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta[1]

1.1 Axiomas para la lógica positiva clásica[2]

Ax 1. Irrelevancia del antecedente: $A\to(B\to A)$

Ax 2. Distributividad de $\to$: $[A\to(B\to C)]\to[(A\to B)\to(A\to C)]$

Ax 3. Ley de Peirce: $[(A\to B)\to A]\to A$

Ax 4. Introducción de la disyunción en el consecuente: $A\to(A\vee B)$

Ax 5. Introducción de la disyunción en el consecuente: $A\to(B\vee A)$

Ax 6. Introducción de la disyunción en el antecedente: $(B\to A)\to[(C\to A)\to\{(B\vee C)\to A\}]$

Ax 7. Eliminación de la conjunción: $(A\wedge B)\to A$

Ax 8. Eliminación de la conjunción: $(A\wedge B)\to B$

Ax 9. Introducción de la conjunción en el consecuente: $(A\to B)\to[(A\to C)\to\{A\to(B\wedge C)\}]$

1 Este sistema deductivo se presenta por primera vez en [Sierra, 2002].

2 El lenguaje consta de los conectivos binarios $\{\to, \vee, \wedge\}$; los conectivos unarios $\{\sim, \neg, I, C\}$; los símbolos de puntuación {), (}; el conjunto de Fórmulas (enunciados) es generado recursivamente con los conectivos a partir del conjunto de enunciados atómicos $\{P_1, P_2, ...\}$. Se escribirá A^I en vez de $I(A)$, y A^C en vez de $C(A)$.

1.2 Axiomas para la negación clásica (~)

Ax 10. Principio de trivialización: $A \to (\sim A \to B)$

Ax 11. Principio de bivalencia: $A \vee \sim A$

1.3 Axiomas para la negación básica paraconsistente y paracompleta (¬)

Ax 12. AIA¬ (Afirmación de la Incompatibilidad Afirmación de la Negación): $A^I \to (\neg A \to \sim A)$

Ax 13. FI (Falsedad de la Incompatibilidad): $\sim A^I \to (\neg A \wedge A)$

Ax 14. ACFA¬ (Afirmación de la Completez Falsedad del Alcance de la Negación): $A^C \to (\sim A \to \neg A)$

Ax 15. FC (Falsedad de la Completez): $\sim A^C \to (\sim \neg A \wedge \sim A)$

Como es usual, la única regla de inferencia es Mp (Modus Ponens): $A, A \to B \vdash B$.

1.4 Algunos teoremas

1.4.1 Un enunciado se acepta o se cuestiona si y solamente si es determinable: $(A \vee \neg A) \leftrightarrow A^C$

Prueba:

1.	$\sim A^C \to (\sim \neg A \wedge \sim A)$	FC
2.	$\sim(\sim \neg A \wedge \sim A) \to A^C$	Transposición[3] en 1
3.	$(\neg A \vee A) \to A^C$	DeMorgan[4] en 2
4.	$A^C \to (\sim A \to \neg A)$	ACFA¬
5.	$A^C \to (A \vee \neg A)$	Implicación disyunción en 4
6.	$A^C \leftrightarrow (A \vee \neg A)$	Equivalencia material[5] en 3 y 5

1.4.2 Un enunciado es incompatible con su negación o es determinable: A^IÚ A^C

Prueba:

1.	$\sim A^I$	Premisa
2.	$\sim A^I \to A \wedge \neg A$	FI
3.	$A \wedge \neg A$	Modus ponens en 1 y 2
4.	A	Simplificación en 3
5.	$(A \vee \neg A) \to A^C$	1.4.1
6.	$A \to A^C$	Simplificación de antecedente[6] en 5
7.	A^C	Modus ponens 4 y 6
8.	$\sim A^I \to A^C$	MDC en 1 y 7
9.	$A^I \vee A^C$	Implicación disyunción[7] en 9

Como consecuencia inmediata se tiene que si un enunciado es compatible con su negación entonces dicho enunciado es determinable: $\sim A^I \longrightarrow A^C$. También se concluye que si un enunciado es indeterminable entonces es incompatible su negación: $\sim A^C \longrightarrow A^I$.

1.4.3 Un enunciado se acepta y se cuestiona si y solamente si es compatible con su negación: (AÙØA) « $\sim A^I$

Prueba:

1.	$A^I \to (\neg A \to \sim A)$	AIA¬
2.	$A^I \to (\sim \neg A \vee \sim A)$	Implicación disyunción en 1
3.	$A^I \to \sim(\neg A \wedge A)$	DeMorgan en 2
4.	$(A \wedge \neg A) \to \sim A^I$	Transposición en 3

Puesto que por FI se tiene la recíproca, se puede concluir la siguiente caracterización de A^I, los enunciados compatibles con su negación son los que se aceptan y se cuestionan: $\sim A^I \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$, los enunciados incompatibles con su negación son los que no se aceptan o no se cuestionan: $A^I \leftrightarrow (\sim A \vee \sim \neg A)$.

---

3 De $A \to B$ se sigue $\sim B \to \sim A$. De $A \to \sim B$ se sigue $B \to \sim A$. De $\sim A \to B$ se sigue $\sim B \to A$. De $\sim A \to \sim B$ se sigue $B \to A$.

4 De $\sim(A \wedge B)$ se sigue $\sim A \vee \sim B$. De $\sim(A \vee B)$ se sigue $\sim A \wedge \sim B$. De $\sim A \vee \sim B$ se sigue $\sim(A \wedge B)$. De $\sim A \wedge \sim B$ se sigue $\sim(A \vee B)$.

5 $A \leftrightarrow B$ se define como $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

6 De $(A \vee B) \to C$ se sigue $A \to C$ y $B \to C$.

7 De $X \to Y$ se sigue $\sim X \vee Y$. De $\sim X \to Y$ se sigue $X \vee Y$.

1.4.4 Si un enunciado es incompatible con su negación y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: A^{I} ® [ØA ® (A ® B)]

Prueba:

1.	$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow{\sim}A)$	AIA¬
2.	$(A^{I}\wedge\neg A)\rightarrow{\sim}A$	Importación[8] en 1
3.	${\sim}A\rightarrow(A\rightarrow B)$	Ax 10
4.	$(A^{I}\wedge\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$	Silogismo hipotético[9] en 2 y 3
5.	$A^{I}\rightarrow[\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)]$	Exportación[10] en 4

1.4.5 Si de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es cuestionado: (A^{C}Ù B^{I}) ® {(A ® B) ® [(A ® ØB) ® ØA]}

Prueba:

1.	$A^{C}\wedge B^{I}$	Premisa 1
2.	A^{C}	Simplificación en 1
3.	$A^{C}\rightarrow({\sim}A\rightarrow\neg A)$	ACFA¬
4.	$({\sim}A\rightarrow\neg A)$	Modus ponens en 2 y 3
5.	B^{I}	Simplificación en 1
6.	$B^{I}\rightarrow(\neg B\rightarrow{\sim}B)$	AIA¬
7.	$(\neg B\rightarrow{\sim}B)$	Modus ponens en 5 y 6
8.	$A\rightarrow B$	Premisa 2
9.	$A\rightarrow\neg B$	Premisa 3
10.	$A\rightarrow{\sim}B$	Silogismo hipotético en 7 y 9
11.	$A\rightarrow(B\wedge{\sim}B)$	Conjunción[11] en 8 y 10
12.	${\sim}(B\wedge{\sim}B)$	Principio de no contradicción[12]
13.	${\sim}A$	Modus tollens[13] en 11 y 12
14.	$\neg A$	Modus ponens en 4 y 13
15.	$(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A$	MDC en 9 y 14
16.	$(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]$	MDC en 8 y 15
17.	$A^{C}\wedge B^{I}\rightarrow(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]$	MDC en 1 y 16

---

8 De $X\rightarrow(Y\rightarrow Z)$ se sigue $(X\wedge Y)\rightarrow Z$.

9 De $X\rightarrow Y$, $Y\rightarrow Z$ se sigue $X\rightarrow Z$.

10 De $(X\wedge Y)\rightarrow Z$ se sigue $X\rightarrow(Y\rightarrow Z)$.

11 De X, Y se sigue $X\wedge Y$. De $Z\rightarrow X$, $Z\rightarrow Y$ se sigue $Z\rightarrow(X\wedge Y)$.

12 Los principios de no contradicción (${\sim}(B\wedge{\sim}B)$), bivalencia ($B\vee{\sim}B$) e identidad ($B\rightarrow B$) son equivalentes gracias a las leyes de DeMorgan e Implicación disyunción.

13 De $X\rightarrow Y$, ${\sim}Y$ se sigue ${\sim}X$. De $X\rightarrow{\sim}Y$, Y se sigue ${\sim}X$. De ${\sim}X\rightarrow Y$, ${\sim}Y$ se sigue X. De ${\sim}X\rightarrow{\sim}Y$, Y se sigue X.

Observando la prueba, se tiene también que si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es rechazado: $B^{I}\rightarrow\{(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow \neg B)\rightarrow\sim A]\}$. De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte: Si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es aceptado: $(A^{C}\wedge B^{I})\rightarrow\{(\neg A\rightarrow B)\rightarrow[(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]\}$.

1.4.6 Cuestionamiento de la conjunción. Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación: [(AÙB)^{I}ÙA^{C}ÙB^{C}]®[Ø(AÙB)®(ØAÚØB)]

Prueba:

1.	$(A\wedge B)^{I}\wedge A^{C}\wedge B^{C}$	Premisa 1
2.	$\neg(A\wedge B)$	Premisa 2
3.	$\sim\neg A$	Premisa 3
4.	$(A\wedge B)^{I}$	Simplificación en 1
5.	$(A\wedge B)^{I}\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)]$	AIA$\neg$
6.	$\neg(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$	Modus ponens en 4 y 5
7.	$\sim(A\wedge B)$	Modus ponens en 2 y 6
8.	$\sim A\vee\sim B$	DeMorgan en 7
9.	A^{C}	Simplificación en 1
10.	$A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$	ACFA$\neg$
11.	$\sim A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 9 y 10
12.	A	Modus tollens en 3 y 11
13.	$\sim B$	Silogismo disyuntivo[14] 12 y 8
14.	B^{C}	Simplificación en 1
15.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA$\neg$
16.	$\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 14 y 15
17.	$\neg B$	Modus ponens en 13 y 16
18.	$\sim\neg A\rightarrow\neg B$	MDC en 3 y 17
19.	$\neg(A\wedge B)\rightarrow(\sim\neg A\rightarrow\neg B)$	MDC en 2 y 18
20.	$(A\wedge B)^{I}\wedge A^{C}\wedge B^{C}\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\sim\neg A\rightarrow\neg B)]$	MDC en 1 y 19
21.	$(A\wedge B)^{I}\wedge A^{C}\wedge B^{C}\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$	Implic disyunción en 20

14 De $\sim X\vee Y$, X se sigue Y. De $X\vee\sim Y$, Y se sigue X.

Observando la prueba, también se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación: $[(A\wedge B)^{I}]\to[\neg(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)]$.

1.5 Resumen de resultados importantes

1.5.1 Principio de no contradicción

$\models\sim(A\wedge\sim A)$, no $\models\sim(A\wedge\neg A)$, no $\models\neg(A\wedge\neg A)$, $\models[(A\wedge\neg A)^{C}\wedge A^{I}]\to\neg(A\wedge\neg A)$, no $\models\neg(A\wedge\neg A)\to A^{I}$, no $\models A^{I}\to\neg(A\wedge\neg A)$, $\models A^{I}\leftrightarrow\sim(A\wedge\neg A)$.

1.5.2 Principio del tercero excluído

$\models A\vee\sim A$, no $\models A\vee\neg A$, $\models A^{C}\leftrightarrow(A\vee\neg A)$, no $\models A^{I}\to(A\vee\neg A)$, $\models\sim A^{C}\leftrightarrow(\sim A\wedge\sim\neg A)$, no $\models(A\vee\neg A)\to A^{I}$, no $\models A^{C}\to A^{I}$, no $\models A^{I}\to A^{C}$, $\models A^{I}\vee A^{C}$.

1.5.3 Principio de trivialización

$\models A\to(\sim A\to B)$, no $\models A\to(\neg A\to B)$, $\models A^{I}\to[A\to(\neg A\to B)]$, no $\models A^{C}\to[A\to(\neg A\to B)]$, $\models\sim A^{C}\to[A\to(\neg A\to B)]$, $\models(\sim A^{C}\wedge\sim A^{I})\to B$.

1.5.4 Principio de reducción al absurdo débil

$\models(A\to B)\to[(A\to\sim B)\to\sim A]$, no $\models(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]$, $\models[A^{C}\wedge B^{I}]\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]\}$, $\models B^{I}\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\sim A]\}$.

1.5.5 Principio de reducción al absurdo fuerte

$\models(\sim A\to B)\to[(\sim A\to\sim B)\to A]$, no $\models(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]$, $\models[A^{C}\wedge B^{I}]\to\{(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]\}$, $\models B^{I}\to\{(\sim A\to B)\to[(\sim A\to\neg B)\to A]\}$.

1.5.6 Negación de la conjunción

$\models\sim(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)$, no $\models\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$, $\models[A^{C}\wedge B^{C}\wedge(A\wedge B)^{I}]\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$, $\models(A\wedge B)^{I}\to[\neg(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)]$.

1.5.7 Disyunción de negaciones

$\models(\sim A\vee\sim B)\to\sim(A\wedge B)$, no $\models(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)$, $\models[A^{I}\wedge B^{I}\wedge(A\wedge B)^{C}]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]$, $\models[A^{I}\wedge B^{I}]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\sim(A\wedge B)]$.

1.5.8 Negación de la disyunción

$\models\sim(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)$, no $\models\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$, $\models[A^{C}\wedge B^{C}\wedge(A\vee B)^{I}]\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$, $\models(A\vee B)^{I}\to[\neg(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)]$.

1.5.9 Conjunción de negaciones

$\models(\sim A\wedge\sim B)\to\sim(A\vee B)$, no $\models(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)$, $\models[A^{I}\wedge B^{I}\wedge(A\vee B)^{C}]\to[(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)]$, $\models[A^{I}\wedge B^{I}]\to[(\neg A\wedge\neg B)\to\sim(A\vee B)]$.

1.5.10 Negación del condicional

$\models\sim(A\to B)\to(A\wedge\sim B)$, no $\models\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)$, $\models[(A\to B)^{I}\wedge B^{C}]\to[\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]$, $\models(A\to B)^{I}\to[\neg(A\to B)\to(A\wedge\sim B)]$.

1.5.11 Afirmación del antecedente y negación del consecuente

$\models(A\wedge\sim B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$, no $\models(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, $\models[(A\rightarrow B)^{C}\wedge B^{I}]\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$, $\models B^{I}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)]$.

1.5.12 Eliminación de la doble negación

$\models\sim\sim A\rightarrow A$, no $\models\neg\neg A\rightarrow A$, $\models[A^{C}\wedge(\neg A)^{I}]\rightarrow[\neg\neg A\rightarrow A]$, $\models A^{C}\rightarrow[\sim\neg A\rightarrow A]$.

1.5.13 Introducción de la doble negación

$\models A\rightarrow\sim\sim A$, no $\models A\rightarrow\neg\neg A$, $\models[A^{I}\wedge(\neg A)^{C}]\rightarrow[A\rightarrow\neg\neg A]$, $\models A^{I}\rightarrow[A\rightarrow\sim\neg A]$.

1.5.14 Contra recíproca débil

$\models(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$, no $\models(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$, $\models[A^{C}\wedge B^{I}]\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$, $\models B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)]$.

1.5.15 Contra recíproca fuerte

$\models(\sim B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, no $\models(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\models[A^{I}\wedge B^{C}]\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\models A^{I}\rightarrow[(\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\models B^{C}\rightarrow[(\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

1.5.16 Implicación material

$\models(A\rightarrow B)\rightarrow(\sim A\vee B)$, no $\models(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)$, $\models A^{C}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$, no $\models A^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$.

1.5.17 De disyunción a implicación

$\models(\sim A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, no $\models(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\models A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\models A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$, no $\models A^{C}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$.

1.5.18 Silogismo disyuntivo y Modus tollens

$\models(A\vee B)$ y $\models\sim A\Rightarrow\models B$, $\models(A\vee B)$ y $\models\neg A$ no$\Rightarrow$+ B, $\models(A\vee B)$ y $\models\neg A$ y $\models A^{I}\Rightarrow\models B$, $\models(A\rightarrow B)$ y $\models\sim B\Rightarrow\models\sim A$, $\models(A\rightarrow B)$ y $\models\neg B$ no$\Rightarrow\models\neg A$, $\models(A\rightarrow B)$ y $\models\neg B$ y $\models A^{C}$ y $\models B^{I}\Rightarrow\models\neg A$, $\models(A\rightarrow B)$ y $\models\neg B$ y $\models B^{I}\Rightarrow\models\sim A$.

1.5.19 Preservación de la incompatiblidad

no$\models(A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}$, $\models[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]\rightarrow[(A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}]$, no$\models(A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}$, $\models[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]\rightarrow[(A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}]$, no$\models(A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}$, $\models[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]\rightarrow[B^{I}\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}]$, no $\models A^{I}\rightarrow(\neg A)^{I}$, $\models(\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow[A^{I}\rightarrow(\neg A)^{I}]$, no $\models A^{I}\rightarrow(\sim A)^{I}$, $\models(\neg\sim A\rightarrow A)\rightarrow\{[A^{I}\rightarrow(\sim A)^{I}]\wedge(\sim A)^{I}\}$.

1.5.20 Preservación de la completez

no $\models(A^{C}\wedge B^{C})\rightarrow(A\wedge B)^{C}$, $\models[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]\rightarrow[(A^{C}\wedge B^{C})\rightarrow(A\wedge B)^{C}]$, no $\models(A^{C}\wedge B^{C})\rightarrow(A\vee B)^{C}$, $\models[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]\rightarrow[(A^{C}\wedge B^{C})\rightarrow(A\vee B)^{C}]$, no $\models(A^{C}\wedge B^{C})\rightarrow(A\rightarrow B)^{C}$, $\models[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[B^{C}\rightarrow(A\rightarrow B)^{C}]$, no $\models A^{C}\rightarrow(\neg A)^{C}$, $\models(A\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow[A^{C}\rightarrow(\neg A)^{C}]$, no $\models A^{C}\rightarrow(\sim A)^{C}$, $\models A\rightarrow\neg\sim A)\rightarrow\{[A^{C}\rightarrow(\sim A)^{C}]\wedge(\sim A)^{C}\}$.

2. Sistema Deductivo para la Lógica Básica Paraconsistente LBPc

El sistema *lógica básica paraconsistente* LBPc, se obtiene del sistema *lógica básica paraconsistente y paracompleta* LBPco, introduciendo como nuevo axioma, A^{C}, o de forma equivalente cambiando los axiomas para la negación débil en LBPco por:

Ax 12. Afirmación de la Incompatibilidad Afirmación de la Negación: $A^{I}\to(\neg A\to\sim A)$

Ax 13. Falsedad de la Incompatibilidad: $\sim A^{I}\to(\neg A\wedge A)$

Ax 14. Falsedad del Alcance de la Negación: $\sim A\to\neg A$
(Completez[15]: A^{C}).

2.1 Algunos teoremas para la Lógica Básica Paraconsistente

Como consecuencia de los resultados obtenidos para la lógica básica paraconsistente y paracompleta, se tienen los siguientes resultados para la lógica básica paraconsistente.

2.1.1 Si un enunciado no se cuestiona entonces es aceptado: $\sim\neg A\to A$.

2.1.2 Si un enunciado aceptado es incompatible con su negación entonces no se cuestiona: $A^{I}\to(A\to\sim\neg A)$.

2.1.3 Si un enunciado no es cuestionado ni aceptado entonces todo enunciado es aceptado: $\sim\neg A\to(\sim A\to B)$.

2.1.4 Si un enunciado es aceptado y cuestionado entonces es compatible con su negación: $A\to(\neg A\to\sim A^{I})$.

2.1.5 Si un enunciado no es aceptado entonces es incompatible con su negación: $\sim A\to A^{I}$.

2.1.6 Si un enunciado no es cuestionado entonces es incompatible con su negación: $\sim\neg A\to A^{I}$.

2.1.7 Si un enunciado compatible con su negación no es aceptado entonces todo es aceptado: $\sim A^{I}\to(\sim A\to B)$.

2.1.8 Si un enunciado es incompatible con su negación entonces el enunciado que lo acepta y cuestiona también es incompatible con su negación: $A^{I}\to(A\wedge\neg A)^{I}$.

2.1.9 Si un enunciado se acepta y se cuestiona entonces es compatible con su negación: $(A\wedge\neg A)\to\sim A^{I}$. Puesto que por FI se tiene la recíproca, se puede concluir la siguiente caracterización de A^{I}, Los enunciados compatibles con su negación son los que se aceptan y se cuestionan: $\sim A^{I}\leftrightarrow(A\wedge\neg A)$. Los enunciados incompatibles con su negación son los que no se aceptan o no se cuestionan: $A^{I}\leftrightarrow(\sim A\vee\sim\neg A)$.

2.1.10 Si un enunciado es incompatible con su negación y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: $A^{I}\to[\neg A\to(A\to B)]$.

2.1.11 Si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es cuestionado: $B^{I}\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]\}$. Se tiene también que si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es rechazado: $B^{I}\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\sim A]\}$. De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte, si del cuestionamiento de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es aceptado: $B^{I}\to\{(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]\}$.

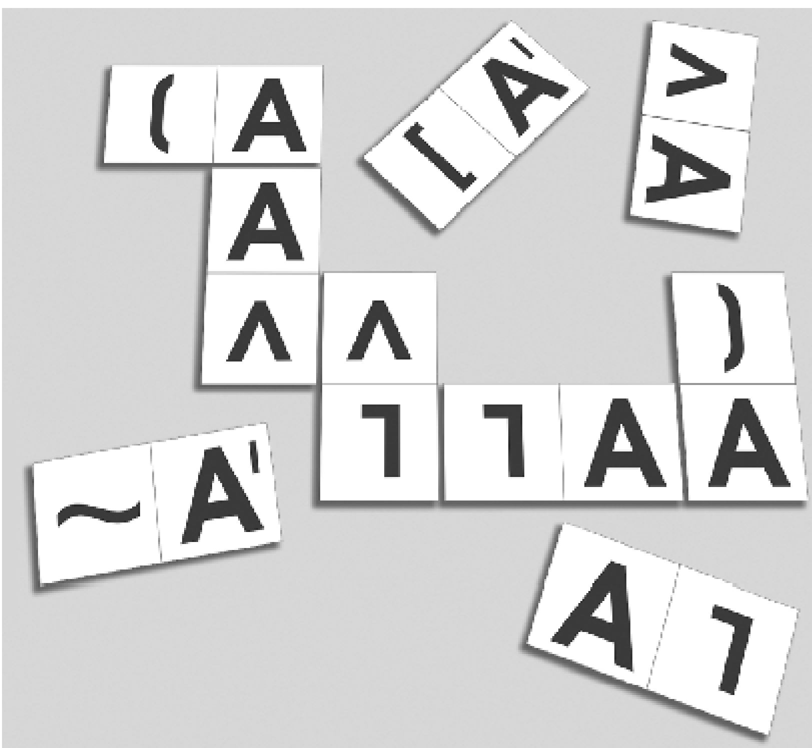
2.1.12 Si cuando de un enunciado incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de un segundo se sigue el cuestionamiento del incompatible entonces del incompatible se sigue el segundo: $A^{I}\to\{[(A\to\neg B)\to\neg A]\to(A\to B)\}$. De manera similar se tiene, si cuando del cuestionamiento un enunciado incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de un segundo se sigue el incompatible entonces del cuestionamiento del incompatible se sigue el segundo: $A^{I}\to\{[(\neg A\to\neg B)\to A]\to(\neg A\to B)\}$.

15 Ésto es lo que significa el Ax 14.

2.1.13 Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación: $(A\wedge B)^{I}\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$. También se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación: $[(A\wedge B)^{I}]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\sim A\vee\sim B)]$.

2.1.14 Si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la conjunción de ellos: $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$. También se tiene que si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación, se rechaza la conjunción de ellos: $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\sim(A\wedge B)]$.

2.1.15 Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el cuestionamiento de ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación: $(A\vee B)^{I}\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]$. También se tiene que del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el rechazo de ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación: $(A\vee B)^{I}\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)]$.



2.1.16 Si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la disyunción de ellos: $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$. También se tiene que si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se rechaza la disyunción de ellos: $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\vee B)]$.

2.1.17 Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y éste se cuestiona entonces se cuestiona el antecedente: $B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$. Se tiene también que cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y éste se cuestiona entonces se rechaza el antecedente: $B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)]$.

2.1.18 Si del cuestionamiento de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación, entonces, si se acepta el último, también se acepta el primero: $A^{I}\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$. También se tiene que si del cuestionamiento de un enunciado se sigue el rechazo de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $(\neg B \rightarrow \sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)$. También se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $A^{I} \rightarrow [(\sim B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$.

2.1.19 Si un enunciado se sigue de otro y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es aceptado: $(B \rightarrow A) \rightarrow \{(\neg B \rightarrow A) \rightarrow A\}$. De manera similar se prueba que si el cuestionamiento de un enunciado se sigue de otro y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es cuestionado: $(B \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A\}$.

2.1.20 Si al cuestionar un enunciado incompatible con su negación se sigue un segundo enunciado, y esto implica el segundo, entonces el segundo se sigue del incompatible: $B^{I} \rightarrow [\{(\neg B \rightarrow A) \rightarrow A\} \rightarrow (B \rightarrow A)]$.

2.1.21 Si se acepta un enunciado incompatible con su negación entonces se cuestiona el cuestionamiento de éste: $A^{I} \rightarrow [A \rightarrow \neg\neg A)]$.

2.1.22 Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado se sigue el enunciado cuando su cuestionamiento es incompatible con la negación: $(\neg A)^{I} \rightarrow [\neg\neg A \rightarrow A)]$.

2.1.23 En un condicional se cuestiona el antecedente o se acepta el consecuente: $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$.

2.1.24 Si se cuestiona el componente incompatible con la negación de una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción. $A^{I} \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$. De manera similar se prueba que si se acepta el componente incompatible con la negación que se cuestiona en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $A^{I} \rightarrow [(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)]$.

2.1.25 Si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación entonces se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente: $(A \rightarrow B)^{I} \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)]$. Se tiene también que si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación entonces se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente: $(A \rightarrow B)^{I} \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \sim B)]$.

2.1.26 Si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación: $B^{I} \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$. También se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se rechaza el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación: $B^{I} \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \sim(A \rightarrow B)]$. También se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se cuestiona el condicional: $(A \wedge \sim B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$.

2.2 Resumen de resultados importantes

2.2.1 Principio de no contradicción: $\models \sim(A \wedge \sim A)$, no $\models \sim(A \wedge \neg A)$, no $\models \neg(A \wedge \neg A)$, $\models A^{I} \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$, no $\models \neg(A \wedge \neg A) \rightarrow A^{I}$, $\models A^{I} \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$, $\models A^{I} \leftrightarrow \sim(A \wedge \neg A)$.

2.2.2 Principio del tercero excluído: $\models A \vee \sim A$, $\models A \vee \neg A$, no $\models (A \vee \neg A) \rightarrow A^{I}$.

2.2.3 Principio de trivialización: $\models A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$, no $\models A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, $\models A^{I} \rightarrow [A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$.

2.2.4 Principio de reducción al absurdo débil: $\models (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A]$, no $\models (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$, $\models B^{I} \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]\}$, $\models B^{I} \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \sim A]\}$.

2.2.5 Principio de reducción al absurdo fuerte: $\models (\sim A \rightarrow B) \rightarrow [(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow A]$, no $\models (\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]$, $\models B^{I} \rightarrow \{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$, $\models B^{I} \rightarrow \{(\sim A \rightarrow B) \rightarrow [(\sim A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$.

2.2.6 Negación de la conjunción: $\models \sim(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$, no $\models \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$, $\models (A \wedge B)^{I} \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$, $\models (A \wedge B)^{I} \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)]$.

2.2.7 Disyunción de negaciones: $\models (\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$, no $\models (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$, $\models [A^{I} \wedge B^{I} \wedge] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$, $\models [A^{I} \wedge B^{I}] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \sim(A \wedge B)]$.

2.2.8 Negación de la disyunción: $\vDash \sim(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)$, no $\vDash \neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$, $\vDash (A\vee B)^{I}\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]$, $\vDash (A\vee B)^{I}\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)]$.

2.2.9 Conjunción de negaciones: $\vDash (\sim A\wedge\sim B)\rightarrow\sim(A\vee B)$, no $\vDash (\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$, $\vDash [A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$, $\vDash [A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\vee B)]$.

2.2.10 Negación del condicional: $\vDash \sim(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)$, no $\vDash \neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$, $\vDash (A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$, $\vDash (A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)]$.

2.2.11 Afirmación del antecedente y negación del consecuente: $\vDash (A\wedge\sim B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$, no $\vDash (A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, $\vDash B^{I}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$, $\vDash B^{I}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)]$.

2.2.12 Eliminación de la doble negación: $\vDash \sim\sim A\rightarrow A$, no $\vDash\neg\neg A\rightarrow A$, $\vDash(\neg A)^{I}\rightarrow[\neg\neg A\rightarrow A]$, $\vDash\sim\neg A\rightarrow A$.

2.2.13 Introducción de la doble negación: $\vDash A\rightarrow\sim\sim A$, no $\vDash A\rightarrow\neg\neg A$, $\vDash A^{I}\rightarrow[A\rightarrow\neg\neg A]$, $\vDash A^{I}\rightarrow[A\rightarrow\sim\neg A]$.

2.2.14 Contrarrecíproca débil: $\vDash (A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$, no $\vDash (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$, $\vDash B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$, $\vDash B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)]$.

2.2.15 Contrarrecíproca fuerte: $\vDash (\sim B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, no $\vDash(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\vDash A^{I}\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\vDash A^{I}\rightarrow[(\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\vDash (\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)$.

2.2.16 Implicación material: $\vDash (A\rightarrow B)\rightarrow(\sim A\vee B)$, $\vDash (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)$.

2.2.17 De disyunción a implicación: $\vDash (\sim A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, no $\vDash (\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\vDash A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\vDash A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$, no $\vDash (A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$.

2.2.18 Silogismo disyuntivo y Modus tollens: $\vDash (A\vee B)$ y $\vDash\sim A \Rightarrow \vDash B$, $\vDash (A\vee B)$ y $\vDash\neg A$ no $\Rightarrow \vDash B$, $\vDash(A\vee B)$ y $\vDash\neg A$ y $\vDash A^{I} \Rightarrow \vDash B$, $\vDash(A\rightarrow B)$ y $\vDash\sim B \Rightarrow \vDash \sim A$, $\vDash (A\rightarrow B)$ y $\vDash \neg B$ no$\Rightarrow \vDash \neg A$, $\vDash (A\rightarrow B)$ y $\vDash\neg B$ y $\vDash B^{I} \Rightarrow \vDash \neg A$, + $(A\rightarrow B)$ y $\vDash\neg B$ y $\vDash B^{I} \Rightarrow \vDash \sim A$.

2.2.19 Preservación de la incompatiblidad: no $\vDash (A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}$, $\vDash [\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]\rightarrow[(A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}]$, no $\vDash (A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}$, $\vDash [\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]\rightarrow[(A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}]$, no $\vDash (A^{I}\wedge B^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}$, $\vDash [\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]\rightarrow[B^{I}\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}]$, no $\vDash A^{I}\rightarrow(\neg A)^{I}$, $\vDash (\neg\neg A\rightarrow A)\rightarrow[A^{I}\rightarrow(\neg A)^{I}]$, no $\vDash A^{I}\rightarrow(\sim A)^{I}$, $\vDash (\neg\sim A\rightarrow A)\rightarrow\{[A^{I}\rightarrow(\sim A)^{I}]\wedge(\sim A)^{I}\}$.

3. Sistema Deductivo para la Lógica Básica Paracompleta LBPo

El sistema *lógica básica paracompleta* LBPo, se obtiene del sistema *lógica básica paraconsistente y paracompleta* LBPco, introduciendo como nuevo axioma, A^{I}, o de forma equivalente cambiando los axiomas para la negación débil en LBPco por:

Ax 12: $\neg A\rightarrow\sim A$. (Incompatibilidad: A^{I}).

Ax 13: $A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$

Ax 14: $\sim A^{C}\rightarrow(\sim\neg A\wedge\sim A)$

3.1 Algunos teoremas para la Lógica Básica Paracompleta

A partir de las pruebas de los resultados para la lógica básica paraconsistente y paracompleta, se tienen los siguientes resultados para la lógica básica paracompleta.

3.1.1 Si un enunciado es determinable y no se cuestiona entonces es aceptado: $A^{C}\rightarrow(\sim\neg A\rightarrow A)$.

3.1.2 Si un enunciado es aceptado entonces no se cuestiona: $A\rightarrow\sim\neg A$.

3.1.3 Si un enunciado no es cuestionado y no es aceptado entonces es indeterminable: $\sim\neg A\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim A^{C})$.

3.1.4 Si un enunciado es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: $A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$.

3.1.5 Si un enunciado es cuestionado entonces es determinable: $\neg A\rightarrow A^{C}$.

3.1.6 Si un enunciado es aceptado entonces es determinable: $A\rightarrow A^{C}$.

3.1.7 Si un enunciado no es determinable y es aceptado entonces todo es aceptado: $\sim A^C \rightarrow (A \rightarrow B)$.

3.1.8 Si un enunciado se acepta o se cuestiona entonces es determinable: $(A \vee \neg A) \rightarrow A^C$.

3.1.9 Si un enunciado es determinable entonces se acepta o se cuestiona: $A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$. De los dos resultados anteriores se puede concluir la siguiente caracterización de A^C, los enunciados completos (determinables) son los que se aceptan o se cuestionan: $A^C \leftrightarrow (A \vee \neg A)$, los enunciados incompletos (indeterminables) son los que se ni se aceptan ni se cuestionan: $\sim A^C \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim\neg A)$.

3.1.10 Si un enunciado es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

3.1.11 Si de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de otro enunciado entonces el enunciado inicial es cuestionado: $A^C \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]\}$. También si de un enunciado se sigue la aceptación y cuestionamiento de otro enunciado entonces el enunciado inicial es rechazado: $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \sim A]$. De manera similar, si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de otro enunciado entonces el enunciado inicial es aceptado: $A^C \rightarrow \{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$.

3.1.12 Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos: $[A^C \wedge B^C] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$. También se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$.

3.1.13 Si se cuestiona alguno de dos enunciados entonces se cuestiona la conjunción de ellos cuando ésta es determinable: $(A \wedge B)^C \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$. También se tiene que si se cuestiona alguno de dos enunciados entonces se rechaza la conjunción de ellos: $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$.

3.1.14 Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento ambos: $[A^C \wedge B^C] \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$. También se tiene que del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el rechazo de ambos: $\neg(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$.

3.1.15 Si se cuestionan dos enunciados entonces se cuestiona la disyunción de ellos cuando ésta es determinable: $(A \vee B)^C \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$. También se tiene que si se cuestionan dos enunciados entonces se rechaza la disyunción de ellos: $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \sim(A \vee B)$.

3.1.16 Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente se cuestiona entonces se cuestiona el antecedente si éste es determinable: $A^C \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$. Se tiene también que cuando se acepta un condicional cuyo consecuente se cuestiona entonces se rechaza el antecedente: $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \sim A)$.

3.1.17 Si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el cuestionamiento de otro enunciado entonces, si se acepta el último, también se acepta el primero: $B^C \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$. También se tiene que si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el rechazo de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $B^C \rightarrow [(\neg B \rightarrow \sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$. También se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero. $(\sim B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

3.1.18 Si un enunciado se sigue de uno determinable y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es aceptado: $B^C \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow \{(\neg B \rightarrow A) \rightarrow A\}]$. De manera similar, si el cuestionamiento de un enunciado se sigue de uno determinable y del cuestionamiento de éste entonces ese enunciado es cuestionado: $B^C \rightarrow [(B \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A\}]$.

3.1.19 Si se acepta un enunciado cuyo cuestionamiento sea determinable entonces se cuestiona el cuestionamiento de éste: $(\neg A)^C \rightarrow [A \rightarrow \neg\neg A)]$.

3.1.20 Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado se sigue el enunciado cuando éste es determinable: $A^C \rightarrow [\neg\neg A \rightarrow A)]$.

3.1.21 Cuando se tiene un condicional con antecedente determinable entonces se cuestiona el antecedente o se acepta el consecuente: $A^C \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)]$.

3.1.22 Silogismo disyuntivo. Si se cuestiona un componente de una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. De manera similar, si se acepta un componente que se cuestiona en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

3.1.23 Si se cuestiona un condicional cuyo consecuente es determinable entonces se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente: $B^C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)]$. Se tiene también que si se cuestiona un condicional entonces se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente: $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge {\sim}B)$.

3.1.24 Si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que éste sea determinable: $(A \rightarrow B)^C \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$. También se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se rechaza el condicional: $(A \wedge \neg B) \rightarrow {\sim}(A \rightarrow B)$. También si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que éste sea determinable: $(A \rightarrow B)^C \rightarrow [(A \wedge {\sim}B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$.

3.2 Resumen de resultados importantes

3.2.1 Principio de no contradicción: $\models {\sim}(A \wedge {\sim}A)$, $\models {\sim}(A \wedge \neg A)$, no $\models \neg(A \wedge \neg A)$, $\models (A \wedge \neg A)^C \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$.

3.2.2 Principio del tercero excluido: $\models A \vee {\sim}A$, no $\models A \vee \neg A$, $\models A^C \leftrightarrow (A \vee \neg A)$, $\models {\sim}A^C \leftrightarrow ({\sim}A \wedge {\sim}\neg A)$.

3.2.3 Principio de trivialización: $\models A \rightarrow ({\sim}A \rightarrow B)$, $\models A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

3.2.4 Principio de reducción al absurdo débil: $\models (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow {\sim}B) \rightarrow {\sim}A]$, no $\models (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$, $\models A^C \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]\}$, $\models (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow {\sim}A]$.

3.2.5 Principio de reducción al absurdo fuerte: $\models ({\sim}A \rightarrow B) \rightarrow [({\sim}A \rightarrow {\sim}B) \rightarrow A]$, no $\models (\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]$, $\models A^C \rightarrow \{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$, $\models ({\sim}A \rightarrow B) \rightarrow [({\sim}A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$.

3.2.6 Negación de la conjunción: $\models {\sim}(A \wedge B) \rightarrow ({\sim}A \vee {\sim}B)$, no $\models \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$, $\models [A^C \wedge B^C] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$, $\models \neg(A \wedge B) \rightarrow ({\sim}A \vee {\sim}B)$.

3.2.7 Disyunción de negaciones: $\models (\sim A\vee\sim B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$, no $\models (\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$, $\nvDash (A\wedge B)^C\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow \neg(A\wedge B)]$, $\models (\neg A\vee\neg B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$.

3.2.8 Negación de la disyunción: $\models \sim(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)$, no $\models \neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$, $\models [A^C\wedge B^C]\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow (\neg A\wedge\neg B)]$, $\models \neg(A\vee B)\rightarrow(\sim A\wedge\sim B)$.

3.2.9 Conjunción de negaciones: $\models (\sim A\wedge\sim B)\rightarrow\sim(A\vee B)$, no $\models (\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$, $\nvDash (A\vee B)^C\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow \neg(A\vee B)]$, $\models (\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\sim(A\vee B)$.

3.2.10 Negación del condicional: $\models \sim(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)$, no $\models \neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$, $\models B^C\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$, $\models \neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)$.

3.2.11 Afirmación del antecedente y negación del consecuente: $\models (A\wedge\sim B) \rightarrow\sim(A\rightarrow B)$, no $\models (A\wedge\neg B)\rightarrow \neg(A\rightarrow B)$, $\models (A\rightarrow B)^C\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$, $\models (A\wedge\neg B)\rightarrow \sim(A\rightarrow B)]$.

3.2.12 Eliminación de la doble negación: $\models \sim\sim A\rightarrow A$, no $\models \neg\neg A\rightarrow A$, $\models A^C\rightarrow [\neg\neg A\rightarrow A]$, no $\models \sim\neg A\rightarrow A$, $\models A^C\rightarrow[\sim\neg A\rightarrow A]$.

3.2.13 Introducción de la doble negación: $\models A\rightarrow\sim\sim A$, no $\models A\rightarrow\neg\neg A$, $\models (\neg A)^C\rightarrow[A\rightarrow \neg\neg A]$, $\models A\rightarrow\sim\neg A$.

3.2.14 Contrarrecíproca débil: $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\sim B\rightarrow\sim A)$, no $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$, $\models A^C\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow \neg A)]$, $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)$.

3.2.15 Contrarrecíproca fuerte: $\models (\sim B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, no $\models (\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\models B^C\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $\models (\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\models B^C\rightarrow[(\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$.

3.2.16 Implicación material: $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\sim A\vee B)$, no $\models (A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)$, $\models A^C\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)]$.

3.2.17 De disyunción a implicación: $\models (\sim A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $\models (A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$.

3.2.18 Silogismo disyuntivo y Modus tollens: $\models (A\vee B)$ y $\models \sim A \Rightarrow+ B$, $\models (A\vee B)$ y $\models \neg A \Rightarrow \models B$, $\models (A\rightarrow B)$ y $\models \sim B \Rightarrow \models \sim A$, $\models (A\rightarrow B)$ y $\models \neg B$ no$\Rightarrow \models \neg A$, $\models (A\rightarrow B)$ y $\models \neg B$ y $\models A^C \Rightarrow \models \neg A$, $\models (A\rightarrow B)$ y $\models \neg B \Rightarrow \models\sim A$.

3.2.19 Preservación de la completez: no $\models (A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\wedge B)^C$, $\models [(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]\rightarrow[(A^C\wedge B^C)\rightarrow (A\wedge B)^C]$, no $\models (A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\vee B)^C$, $\models [(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]\rightarrow[(A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\vee B)^C]$, no $\models (A^C\wedge B^C)\rightarrow(A\rightarrow B)^C$, $\models [(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[B^C\rightarrow(A\rightarrow B)^C]$, $\models$ no $\models A^C\rightarrow(\neg A)^C$, $(A\rightarrow\neg\neg A)\rightarrow[A^C\rightarrow(\neg A)^C]$, no $\models A^C\rightarrow(\sim A)^C$, $\models (A\rightarrow\neg\sim A)\rightarrow\{[A^C\rightarrow(\sim A)^C]\wedge(\sim A)^C\}$.

4. Lógica Positiva Paraconsistente y Paracompleta

El sistema *lógica positiva paraconsistente y paracompleta* LPPco se obtiene a partir del sistema *lógica básica paraconsistente y paracompleta* LBPco, agregándole axiomas que permitan preservar, con los conectivos positivos (condicional, conjunción y disyunción), la incompatibilidad de un enunciado con su negación así como la completez.

4.1 Preservación[16] de la incompatibilidad y la completez en la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta

La preservación de la incompatibilidad y la completez en la lógica básica paraconsistente y paracompleta, está regida por los siguientes teoremas.

4.1.1 Preservación de la Incompatibilidad con la Conjunción

La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la conjunción cuando al cuestionar la conjunción de los enunciados, se cuestiona alguno de ellos. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la conjunción y la preservación de la incompatibilidad con la conjunción: $[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]\to[B^{I}\wedge A^{I}\to(A\wedge B)^{I}]$.

Prueba:

1.	$\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$	Premisa 1
2.	$B^{I}\wedge A^{I}$	Premisa 2
3.	$\sim(A\wedge B)^{I}$	Premisa 3
4.	$\neg(A\wedge B)$	FI en 3
5.	$\neg A\vee\neg B$	Modus ponens en 1 y 4
6.	B^{I}	Simplificación en 2
7.	$B^{I}\to(\neg B\to\sim B)$	AIA¬
8.	$\neg B\to\sim B$	Modus ponens en 6 y 7
9.	A^{I}	Simplificación en 2
10.	$A^{I}\to(\neg A\to\sim A)$	AIA¬
11.	$\neg A\to\sim A$	Modus ponens en 9 y 10
12.	$\sim A\vee\sim B$	Dilema constructivo en 5, 8 y 11
13.	$\sim(A\wedge B)$	DeMorgan en 12
14.	$A\wedge B$	FI en 3
15.	$(A\wedge B)\wedge\sim(A\wedge B)$	Conjunción en 13 y 14
16.	$(A\wedge B)^{I}$	MDI[17] en 3 y 15
17.	$(B^{I}\wedge A^{I})\to(A\wedge B)^{I}$	MDC en 2 y 16
18.	$[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]\to[B^{I}\wedge A^{I}\to(A\wedge B)^{I}]$	MDC en 1 y 17

16 Se dice que una propiedad P se preserva con el conectivo binario # si y solamente si cuando A y B tienen la propiedad P entonces A#B también tiene la propiedad P. Se dice que una propiedad P se preserva con el conectivo unario * si y solamente si cuando A tiene la propiedad P entonces *A también tiene la propiedad P.

4.1.2 Preservación de la Incompatibilidad con la Disyunción

La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la disyunción cuando al cuestionar la disyunción de los enunciados, se cuestionan ambos. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la disyunción y la preservación de la incompatibilidad con la disyunción: $[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]\to[(B^I\wedge A^I)\to(A\vee B)^I]$.

Prueba:

1.	$\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$	Premisa 1
2.	$B^I\wedge A^I$	Premisa 2
3.	B^I	Simplificación en 2
4.	A^I	Simplificación en 2
5.	$B^I\to(\neg B\to\sim B)$	AIA$\neg$
6.	$\neg B\to\sim B$	Modus ponens en 3 y 5
7.	$A^I\to(\neg A\to\sim A)$	AIA$\neg$
8.	$\neg A\to\sim A$	Modus ponens en 4 y 7
9.	$(\neg A\wedge\neg B)\to(\sim A\wedge\sim B)$	Conjunción de condicionales[18] en 6 y 8
10.	$\neg(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)$	Silogismo hipotético en 1 y 9
11.	$\neg(A\vee B)\to\sim(A\vee B)$	DeMorgan en 10
12.	$\sim\neg(A\vee B)\vee\sim(A\vee B)$	Implicación disyunción en 11
13.	$\sim[\neg(A\vee B)\wedge(A\vee B)]$	DeMorgan en 12
14.	$\sim(A\vee B)^I\to[\neg(A\vee B)\wedge(A\vee B)]$	FI
15.	$(A\vee B)^I$	Modus tollens en 13 y 14
16.	$(B^I\wedge A^I)\to(A\vee B)^I$	MDC en 2 y 15
17.	$[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]\to[(B^I\wedge A^I)\to(A\vee B)^I]$	MDC en 1 y 16

4.1.3 Preservación de la Incompatibilidad con el Condicional

La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con el condicional cuando al cuestionar el condicional, se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento del condicional y la preservación de la incompatibilidad con el condicional: $[\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]\to[B^I\to(A\to B)^I]$.

17 Método de Demostración Indirecta: Si de X1, …, Xn, $\sim A$ se sigue $B\wedge\sim B$ entonces de X1, …, Xn se sigue A.

18 De $A\to B$ y $C\to D$ se sigue $(A\wedge C)\to(B\wedge D)$.

Prueba:

1.	$\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)$	Premisa 1
2.	B^{I}	Premisa 2
3.	$B^{I}\to(\neg B\to\sim B)$	AIA$\neg$
4.	$\neg B\to\sim B$	Modus ponens en 3 y 2
5.	$A\to A$	Principio de identidad
6.	$(A\wedge\neg B)\to(A\wedge\sim B)$	Conjunción de condicionales en 4 y 5
7.	$\neg(A\to B)\to(A\wedge\sim B)$	Silogismo hipotético en 1 y 6
8.	$\neg(A\to B)\to\sim(A\to B)$	DeMorgan en 7
9.	$\sim\neg(A\to B)\vee\sim(A\to B)$	Implicación disyunción en 8
10.	$\sim[\neg(A\to B)\wedge(A\to B)]$	DeMorgan e implicación disyunción en 9
11.	$\sim(A\to B)^{I}\to[\neg(A\to B)\wedge(A\to B)]$	FI
12.	$(A\to B)^{I}$	Modus tollens en 10 y 11
13.	$B^{I}\to(A\to B)^{I}$	MDC en 2 y 12
14.	$[\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]\to[B^{I}\to(A\vee B)^{I}]$	MDC en 1 y 13

Observar que también se tiene: $[\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]\to[(B^{I}\wedge A^{I})\to(A\to B)^{I}]$

4.1.4 Preservación de la Incompatibilidad con el Cuestionamiento

La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la negación cuando al cuestionar el cuestionamiento que se hace del enunciado, se acepta éste. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la negación débil y la preservación de la incompatibilidad con la negación débil: $[\neg\neg A\to A]\to[A^{I}\to(\neg A)^{I}]$.

Prueba:

1.	$\neg\neg A\to A$	Premisa 1
2.	A^{I}	Premisa 2
3.	$A^{I}\to(\neg A\to\sim A)$	AIA$\neg$
4.	$\neg A\to\sim A$	Modus ponens en 3 y 2
5.	$A\to\sim\neg A$	Transposición en 4
6.	$\neg\neg A\to\sim\neg A$	Silogismo hipotético en 1 y 5
7.	$\sim\neg\neg A\vee\sim\neg A$	Implicación disyunción en 6
8.	$\sim[\neg\neg A\wedge\neg A]$	DeMorgan en 7
9.	$\sim(\neg A)^{I}\to[\neg\neg A\wedge\neg A]$	FI
10.	$(\neg A)^{I}$	Modus tollens en 8 y 9
11.	$A^{I}\to(\neg A)^{I}$	MDC en 2 y 10
12.	$[\neg\neg A\to A]\to[A^{I}\to(\neg A)^{I}]$	MDC en 1 y 11

4.1.5 Preservación de la incompatibilidad con la negación fuerte

La negación fuerte de un enunciado es incompatible con su negación cuando al cuestionar el rechazo del enunciado, este se acepta: $(\neg{\sim}A\rightarrow A)\rightarrow({\sim}A)^{I}$

Prueba:

1.	$\neg{\sim}A\rightarrow A$	Premisa 1
2.	$A\rightarrow{\sim}{\sim}A$	Introducción de la Doble negación[19]
3.	$\neg{\sim}A\rightarrow{\sim}{\sim}A$	Silogismo hipotético en 1 y 2
4.	${\sim}\neg{\sim}A\vee{\sim}{\sim}A$	Implicación disyunción en 3
5.	${\sim}[\neg{\sim}A\wedge{\sim}A]$	DeMorgan en 4
6.	${\sim}({\sim}A)^{I}\rightarrow[\neg{\sim}A\wedge{\sim}A]$	FI
7.	$({\sim}A)^{I}$	Modus tollens en 5 y 6
8.	$[\neg{\sim}A\rightarrow A]\rightarrow({\sim}A)^{I}$	MDC en 1 y 7

Observar que también se tiene: $(\neg{\sim}A\rightarrow A)\rightarrow(A^{I}\rightarrow({\sim}A)^{I})$

4.1.6 Preservación de la Completez con la Conjunción

La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con la conjunción cuando al cuestionar al menos un componente de la conjunción, se cuestiona la conjunción. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la conjunción y la preservación de la completez con la conjunción: $[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]\rightarrow[B^{C}\wedge A^{C}\rightarrow(A\wedge B)^{C}]$

Prueba:

1.	$(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$	Premisa 1
2.	$B^{C}\wedge A^{C}$	Premisa 2
3.	${\sim}(A\wedge B)^{C}$	Premisa 3
4.	${\sim}\neg(A\wedge B)$	FC en 3
5.	${\sim}(\neg A\vee\neg B)$	Modus tollens en 1 y 4
6.	B^{C}	Simplificación en 2
7.	$B^{C}\rightarrow({\sim}B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬
8.	${\sim}B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 6 y 7
9.	A^{C}	Simplificación en 2
10.	$A^{C}\rightarrow({\sim}A\rightarrow\neg A)$	ACFA¬
11.	${\sim}A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 9 y 10
12.	$({\sim}A\vee{\sim}B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$	Disyunción de condicionales[20] en 8 y 11
13.	${\sim}({\sim}A\vee{\sim}B)$	Modus tollens en 5 y 12
14.	$A\wedge B$	DeMorgan en 13
15.	${\sim}(A\wedge B)$	FC en 3
16.	$(A\wedge B)\wedge{\sim}(A\wedge B)$	Conjunción en 15 y 14
17.	$(A\wedge B)^{C}$	MDI en 3 y 16
18.	$(B^{C}\wedge A^{C})\rightarrow(A\wedge B)^{C}$	MDC en 2 y 17
19.	$[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]\rightarrow[B^{C}\wedge A^{C}\rightarrow(A\wedge B)^{C}]$	MDC en 1 y 18

19 $X\rightarrow{\sim}{\sim}X$.

20 De $A\rightarrow B$ y $C\rightarrow D$ se sigue $(A\vee C)\rightarrow(B\vee D)$.

4.1.7 Preservación de la Completez con la Disyunción

La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con la disyunción cuando al cuestionar ambos componentes de una disyunción, se cuestiona la disyunción. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la disyunción y la preservación de la completez con la disyunción: $[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]\rightarrow[(B^{C}\wedge A^{C})\rightarrow(A\vee B)^{C}]$.

Prueba:

1.	$(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$	Premisa 1
2.	$B^{C}\wedge A^{C}$	Premisa 2
3.	B^{C}	Simplificación en 2
4.	A^{C}	Simplificación en 2
5.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA$\neg$
6.	$\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 3 y 5
7.	$A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$	ACFA$\neg$
8.	$\sim A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 4 y 7
9.	$(\sim A\wedge\sim B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$	Conjunción de condicionales en 6 y 8
10.	$(\sim A\wedge\sim B)\rightarrow\neg(A\vee B)$	Silogismo hipotético en 1 y 9
11.	$\sim(A\vee B)\rightarrow\neg(A\vee B)$	DeMorgan en 10
12.	$(A\vee B)\vee\neg(A\vee B)$	Implicación disyunción en 11
13.	$\sim[\sim\neg(A\vee B)\wedge\sim(A\vee B)]$	DeMorgan en 12
14.	$\sim(A\vee B)^{C}\rightarrow[\sim\neg(A\vee B)\wedge\sim(A\vee B)]$	FC
15.	$(A\vee B)^{C}$	Modus tollens en 13 y 14
16.	$(B^{C}\wedge A^{C})\rightarrow(A\vee B)^{C}$	MDC en 2 y 15
17.	$[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]\rightarrow[(B^{C}\wedge A^{C})\rightarrow(A\vee B)^{C}]$	MDC en 1 y 16

4.1.8 Preservación de la Completez con el Condicional

La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con el condicional cuando al aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente, se cuestiona el condicional. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento del condicional y la preservación de la completez con el condicional: $[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[B^{C}\rightarrow(A\rightarrow B)^{C}]$.

Prueba:

1.	$(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$	Premisa 1
2.	B^C	Premisa 2
3.	$B^C\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬
4.	$\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 3 y 2
5.	$A\rightarrow A$	Principio de identidad
6.	$(A\wedge\sim B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$	Conjunción de condicionales en 4 y 5
7.	$(A\wedge\sim B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$	Silogismo hipotético en 1 y 6
8.	$\sim(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$	Negación del condicional[21] en 7
9.	$(A\rightarrow B)\vee\neg(A\rightarrow B)$	Implicación disyunción en 8
10.	$\sim[\sim\neg(A\rightarrow B)\wedge\sim(A\rightarrow B)]$	DeMorgan en 9
11.	$\sim(A\rightarrow B)^C\rightarrow[\sim\neg(A\rightarrow B)\wedge\sim(A\rightarrow B)]$	FC
12.	$(A\rightarrow B)^C$	Modus tollens en 10 y 11
13.	$B^C\rightarrow(A\rightarrow B)^C$	MDC en 2 y 12
14.	$[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[B^C\rightarrow(A\vee B)^C]$	MDC en 1 y 13

Observar que también se tiene: $[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]\rightarrow[(B^C\wedge A^C)\rightarrow(A\rightarrow B)^C]$

4.1.9 Preservación de la Completez con el Cuestionamiento

La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con la negación cuando al aceptarlo, se cuestiona el cuestionamiento que se hace de éste. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la negación débil y la preservación de la completez con la negación débil: $[A\rightarrow\neg\neg A]\rightarrow[A^C\rightarrow(\neg A)^C]$.

Prueba:

1.	$A\rightarrow\neg\neg A$	Premisa 1
2.	A^C	Premisa 2
3.	$A^C\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$	ACFA¬
4.	$\sim A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 3 y 2
5.	$\sim\neg A\rightarrow A$	Transposición en 4
6.	$\sim\neg A\rightarrow\neg\neg A$	Silogismo hipotético en 1 y 5
7.	$\neg A\vee\neg\neg A$	Implicación disyunción en 6
8.	$\sim[\sim\neg\neg A\wedge\sim\neg A]$	DeMorgan en 7
9.	$\sim(\neg A)^C\rightarrow[\sim\neg\neg A\wedge\sim\neg A]$	FC
10.	$(\neg A)^C$	Modus tollens en 8 y 9
11.	$A^C\rightarrow(\neg A)^C$	MDC en 2 y 10
12.	$[A\rightarrow\neg\neg A]\rightarrow[A^C\rightarrow(\neg A)^C]$	MDC en 1 y 11

21 De $\sim(A\rightarrow B)$ se sigue $A\wedge\sim B$ de $A\wedge\sim B$ se sigue $\sim(A\rightarrow B)$.

4.1.10 Preservación de la completez con la negación fuerte

La negación fuerte de un enunciado es completa cuando al aceptarlo, se cuestiona su rechazo: $(A\rightarrow\neg\sim A)\rightarrow(\sim A)^C$.

Prueba:

1.	$A\rightarrow\neg\sim A$	Premisa 1
2.	$\sim\sim A\rightarrow A$	Eliminación de la Doble negación[22]
3.	$\sim\sim A\rightarrow\neg\sim A$	Silogismo hipotético en 1 y 2
4.	$\sim A\vee\neg\sim A$	Implicación disyunción en 3
5.	$\sim[\sim\neg\sim A\wedge\sim\sim A]$	DeMorgan en 4
6.	$\sim(\sim A)^C\rightarrow[\sim\neg\sim A\wedge\sim\sim A]$	FC
7.	$(\sim A)^C$	Modus tollens en 5 y 6
8.	$[A\rightarrow\neg\sim A]\rightarrow(\sim A)^C$	MDC en 1 y 7

Observar que también se tiene: $(A\rightarrow\neg\sim A)\rightarrow(A^C\rightarrow(\sim A)^C)$.

4.2 Axiomas para la negación positiva paraconsistente y paracompleta

Ax 12. $A^I\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$

Ax 13. $\sim A^I\rightarrow(\neg A\wedge A)$

Ax 14. $A^C\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$

Ax 15. $\sim A^C\rightarrow(\sim\neg A\wedge\sim A)$

Ax 16. Al cuestionar una conjunción se cuestiona al menos uno de sus componentes: $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$

Ax 17. Al cuestionar una disyunción se cuestiona cada uno de sus componentes: $\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$

Ax 18. Al cuestionar un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente: $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$

Ax 19. Al cuestionar al menos uno de los componentes de una conjunción, se cuestiona la conjunción: $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$

Ax 20. Al cuestionar cada uno de los componentes de una disyunción, se cuestiona la disyunción: $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$

Ax 21. Al aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente, se cuestiona el condicional: $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$

22 $\sim\sim X\rightarrow X$.

4.3 Algunos teoremas para la Lógica Positiva Paraconsistente y Paracompleta

4.3.1 La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la conjunción: $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \wedge B)^I$.

4.3.2 La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la disyunción: $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \vee B)^I$.

4.3.3 La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con el condicional: $B^I \rightarrow (A \rightarrow B)^I$.

4.3.4 La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con la conjunción: $(B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \wedge B)^C$.

4.3.5 La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con la disyunción: $(B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \vee B)^C$.

4.3.6 La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con el condicional: $B^C \rightarrow (A \rightarrow B)^C$.

4.4 Lógica Positiva Paraconsistente LPPc[23]

El sistema *lógica positiva paraconsistente* LPPc, se obtiene del sistema *lógica básica paraconsistente* LBPc, agregándole axiomas que permitan preservar, con los conectivos positivos (condicional, conjunción y disyunción), la incompatibilidad de un enunciado con su negación. Los axiomas para la negación débil son:

Ax 12. AI A¬: $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$.

Ax 13. FI: $\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$.

Ax 14. FA¬: $\sim A \rightarrow \neg A$. (Completez: A^C).

Ax 15. A¬∧: $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Ax 16. A¬∨: $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Ax 17. A¬→: $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$

Como consecuencias inmediatas se tienen:

Preservación de la Incompatibilidad con la Conjunción: $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \wedge B)^I$.

Preservación de la Incompatibilidad con la Disyunción: $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \vee B)^I$.

Preservación de la Incompatibilidad con el Condicional: $B^I \rightarrow (A \rightarrow B)^I$.

4.5 Lógica Positiva Paracompleta LPPo[24]

El sistema *lógica positiva paracompleta* LPPo, se obtiene del sistema *lógica básica paracompleta* LBPo, agregándole axiomas que permitan preservar, con los conectivos positivos (condicional, conjunción y disyunción), la completez de un enunciado con su negación. Los axiomas para la negación débil son:

Ax 12. A¬: $\neg A \rightarrow \sim A$. (Incompatibilidad: A^I).

Ax 13. ACFA¬: $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$.

Ax 14. FC: $\sim A^C \rightarrow (\sim \neg A \wedge \sim A)$.

Ax 15. A¬∧R: $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$.

Ax 16. A¬∨R: $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$.

Ax 17. A¬→R: $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$.

Como consecuencias inmediatas se tienen:

Preservación de la Completez con la Conjunción: $(B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \wedge B)^C$.

Preservación de la Completez con la Disyunción: $(B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \vee B)^C$.

Preservación de la Completez con el Condicional: $(A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \rightarrow B)^C$.

---

23 Los resultados esperados, preservación de la incompatibilidad, pueden ser pedidos axiomaticamente obteniéndose así el sistema *lógica positiva paraconsistente débil* LPPcD, es decir, LPPcD se obtiene a partir del sistema *lógica básica paraconsistente* LBPc, agregándole: Ax 15 PI∧ (Preservación de la Incompatibilidad con la Conjunción): $(A^I \wedge B^I) \rightarrow (A \wedge B)^I$, Ax 16 PI∨ (Preservación de la Incompatibilidad con la Disyunción): $(A^I \wedge B^I) \rightarrow (A \vee B)^I$, Ax 17 PI→ (Preservación de la Incompatibilidad con el Condicional): $(AI \wedge BI) \rightarrow (A \rightarrow B)^I$.

24 Los resultados esperados, preservación de la completez, pueden ser pedidos axiomaticamente obteniéndose así el sistema *lógica positiva paracompletae débil* LPPoD, es decir, LPPoD se obtiene a partir del sistema *lógica básica paracompleta* LBPo, agregándole: Ax 15 PC∧ (Preservación de la Completez con la Conjunción): $(A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \wedge B)^C$, Ax 16 PC∨ (Preservación de la Completez con la Disyunción): $(A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \vee B)^C$, Ax 17 PC→ (Preservación de la Completez con el Condicional): $(A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \rightarrow B)^C$.

5. Lógica Paraconsistente y Paracompleta LPco

El sistema *lógica paraconsistente y paracompleta* LPco se obtiene a partir del sistema *lógica positiva paraconsistente y paracompleta* LPPco, agregándole axiomas que permitan preservar, con los conectivos negación (débil y fuerte), la incompatibilidad de un enunciado con su negación así como la completez.

Ax 12. $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$

Ax 13. $\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$

Ax 14. $A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$

Ax 15. $\sim A^C \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$

Ax 16. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Ax 17. $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Ax 18. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$

Ax 19. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

Ax 20. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$

Ax 21. $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

Ax 22. Al cuestionar un enunciado cuestionado, se acepta este: $\neg\neg A \rightarrow A$

Ax 23. Al cuestionar un enunciado rechazado, se acepta este: $\neg\sim A \rightarrow A$

Ax 24. Al aceptar un enunciado, se cuestiona el cuestionamiento de este: $A \rightarrow \neg\neg A$

Ax 25. Al aceptar un enunciado, se cuestiona el rechazo de este: $A \rightarrow \neg\sim A$

Como consecuencia se tienen:

La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la negación débil: $A^I \rightarrow (\neg A)^I$.

La negación fuerte de un enunciado es incompatible con su negación débil: $(\sim A)^I$ y por lo tanto, $A^I \rightarrow (\sim A)^I$.

La completez de un enunciado con su negación débil se preserva con la negación débil: $A^C \rightarrow (\neg A)^C$.

La negación fuerte de un enunciado es completa: $(\sim A)^C$ y por lo tanto, $A^C \rightarrow (\sim A)^C$.

5.1 Lógica Paraconsistente LPc[25]

El sistema *lógica paraconsistente* LPc, se obtiene del sistema *lógica positiva paraconsistente* LPPc, agregándole axiomas que permitan preservar, con los conectivos negación débil y negación fuerte, la incompatibilidad de un enunciado con su negación. Los axiomas para la negación débil son:

Ax 12. $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$

Ax 13. $\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$

Ax 14. $\sim A \rightarrow \neg A$. (Completez: A^C)

Ax 15. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Ax 16. $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Ax 17. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$

Ax 18. $\neg\neg A \rightarrow A$.

Ax 19. $\neg\sim A \rightarrow A$.

Como consecuencias inmediatas se tienen:

Preservación de la Incompatibilidad con el Cuestionamiento: $A^I \rightarrow (\neg A)^I$.

Preservación de la incompatibilidad con la negación fuerte: $(\sim A)^I$, $A^I \rightarrow (\sim A)^I$.

5.2 Lógica Paracompleta LPo[26]

El sistema *lógica paracompleta* LPo, se obtiene del sistema *lógica positiva paracompleta* LPPo,

25 Los resultados esperados, preservación de la incompatibilidad con las negaciones, pueden ser pedidos axiomaticamente obteniéndose así el sistema *lógica paraconsistente débil* LPcD, es decir, LPcD se obtiene a partir del sistema *lógica positiva paraconsistente* LPPc, agregándole: Ax 18 PI¬ (Preservación de la Incompatibilidad con la Negación Débil): $A^I \rightarrow (\neg A)^I$, Ax 19 PI~ (Preservación de la Incompatibilidad con la Negación Fuerte): $A^I \rightarrow (\sim A)^I$.

26 Los resultados esperados, preservación de la completez con las negaciones, pueden ser pedidos axiomaticamente obteniéndose así el sistema *lógica paracompleta débil* LPoD, es decir, LPoD se obtiene a partir del sistema *lógica positiva paracompleta* LPPo, agregándole: Ax 18 PC¬ (Preservación de la Completez con la Negación Débil): $A^C \rightarrow (\neg A)^C$, Ax 19 PC~ (Preservación de la Completez con la Negación Fuerte): $A^C \rightarrow (\sim A)^C$.

agregándole axiomas que permitan preservar, con los conectivos negación débil y negación fuerte, la completez de un enunciado con su negación. Los axiomas para la negación débil son:

Ax 12. $\neg A \rightarrow \sim A$. (Incompatibilidad: A^{I}).

Ax 13. $A^{C} \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$.

Ax 14. $\sim A^{C} \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$.

Ax 15. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$.

Ax 16. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$.

Ax 17. $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$.

Ax 18. $A \rightarrow \neg\neg A$.

Ax 19. $A \rightarrow \neg\sim A$.

Como consecuencias inmediatas se tienen:

Preservación de la Completez con el Cuestionamiento: $A^{C} \rightarrow (\neg A)^{C}$.

Preservación de la completez con la negación fuerte: $(\sim A)^{C}$, $A^{C} \rightarrow (\sim A)^{C}$.

6. Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Débil a nivel Atómico LBPcoDA

La *Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Débil a nivel Atómico* LBPcoDA, se obtiene a partir[27] de la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta LBPco, agregando axiomas que garantizan que todas las fórmulas no atómicas son incompatibles con su negación y completas con su negación.

Ax 12. AIA$\neg$A. Si un enunciado atómico incompatible con su negación se cuestiona entonces es rechazado: $A^{I} \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$

Ax 13. FIA. Si un enunciado atómico es compatible con su negación, se acepta y se cuestiona: $\sim A^{I} \rightarrow (\neg A \wedge A)$

Ax 14. ACFA$\neg$A. Un enunciado atómico determinable que es rechazado, es cuestionado: $A^{C} \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$

Ax 15. FCA. En un enunciado atómico indeterminable, ni él ni su negación son aceptados: $\sim A^{C} \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$

Ax16[28] I$\wedge$. La conjunción de enunciados es incompatible con su negación: $(A \wedge B)^{I}$. $\neg(A \wedge B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

Ax 17. I$\vee$. La disyunción de enunciados es incompatible con su negación: $(A \vee B)^{I}$. $\neg(A \vee B) \rightarrow \sim(A \vee B)$

Ax 18. I$\rightarrow$. El condicional de enunciados es incompatible con su negación: $(A \rightarrow B)^{I}$. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \sim(A \rightarrow B)$

Ax 19. I$\neg$. La negación débil de un enunciado es incompatible con su negación: $(\neg A)^{I}$. $\neg(\neg A) \rightarrow \sim(\neg A)$

Ax 20. I$\sim$. La negación fuerte de un enunciado es incompatible con su negación: $(\sim A)^{I}$. $\neg(\sim A) \rightarrow \sim(\sim A)$

Ax 21. C$\wedge$. La conjunción de enunciados es completa con su negación: $(A \wedge B)^{C}$. $\sim(A \wedge B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

Ax 22. C$\vee$. La disyunción de enunciados es completa con su negación: $(A \vee B)^{C}$. $\sim(A \vee B) \rightarrow \neg(A \vee B)$

Ax 23. C$\rightarrow$. El condicional de enunciados es completo con su negación: $(A \rightarrow B)^{C}$. $\sim(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

Ax 24. C$\neg$. La negación débil de un enunciado es completa con su negación: $(\neg A)^{C}$. $\sim(\neg A) \rightarrow \neg(\neg A)$

Ax 25. C$\sim$. La negación fuerte de un enunciado es completa con su negación: $(\sim A)^{C}$. $\sim(\sim A) \rightarrow \neg(\sim A)$

27 O a partir de LPPcoD, o a partir de LPcoD, en los tres casos resulta la misma lógica. Lo anterior significa que LBPcoDA, LPPcoDA y LPcoDA coinciden.

28 Los axiomas 16, ..., 25 son presentados como parejas, observar que si en los axiomas 12, ..., 15 se omite la palabra "atómico" entonces ambos componentes de las parejas mencionadas son equivalentes. La axiomática presentada pretende enfatizar que la diferencia entre la negación fuerte y la débil se da solo a nivel atómico.

6.1 Algunos teoremas para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Débil a nivel Atómico

6.1.1 Si un enunciado atómico es determinable y no se cuestiona entonces es aceptado: $A^C \to (\sim\neg A \to A)$.

Prueba:

1. $A^C \to (\sim A \to \neg A)$	ACFA¬A
2. $A^C \to (\sim\neg A \to A)$	Transposición en 1

6.1.2 Si un enunciado atómico es incompatible con su negación y aceptado entonces no se cuestiona: $A^I \to (A \to \sim\neg A)$.

Prueba:

1. $A^I \to (\neg A \to \sim A)$	AIA¬A
2. $A^I \to (A \to \sim\neg A)$	Transposición en 1

6.1.3 Si un enunciado atómico no es cuestionado ni aceptado entonces es indeterminable: $\sim\neg A \to (\sim A \to \sim A^C)$.

Prueba:

1. $A^C \to (\sim A \to \neg A)$	ACFA¬A
2. $\sim A \to (A^C \to \neg A)$	Intercambio en 1
3. $\sim(A^C \to \neg A) \to A$	Transposición en 2
4. $(A^C \wedge \sim\neg A) \to A$	Negación del condicional en 3
5. $(\sim\neg A \wedge A^C) \to A$	Conmutatividad de la conjunción en 4
6. $\sim\neg A \to (A^C \to A)$	Exportación en 5
7. $\sim\neg A \to (\sim A \to \sim A^C)$	Transposición en 6

6.1.4 Si un enunciado atómico es aceptado y cuestionado entonces es compatible con su negación: $A \to (\neg A \to \sim A^I)$.

Prueba:

1. $A^I \to (\neg A \to \sim A)$	AIA¬A
2. $A^I \to (A \to \sim\neg A)$	Transposición en 1
3. $A \to (A^I \to \sim\neg A)$	Intercambio en 2
4. $A \to (\neg A \to \sim A^I)$	Transposición en 3

6.1.5 Si un enunciado atómico es cuestionado entonces es determinable: $\neg A \to A^C$.

Prueba:

1. $\sim A^C \to (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FCA
2. $\sim A^C \to \sim\neg A$	Simplificación en 1
3. $\neg A \to A^C$	Transposición en 2

6.1.6 Si un enunciado atómico es aceptado entonces es determinable: $A \rightarrow A^C$.

Prueba:

1.	$\sim A^C \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FCA
2.	$\sim A^C \rightarrow \sim A$	Simplificación en 1
3.	$A \rightarrow A^C$	Transposición en 2

En particular, si un enunciado atómico es determinable entonces el enunciado que dice que es determinable también es determinable: $A^C \rightarrow (A^C)^C$. Como consecuencia inmediata, si un enunciado atómico es aceptado entonces el enunciado que dice que es determinable es determinable: $A \rightarrow (A^C)^C$.

6.1.7 Si un enunciado atómico no es aceptado entonces es incompatible con su negación: ~A®A^I.

Prueba:

1.	$\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$	FIA
2.	$\sim A^I \rightarrow A$	Simplificación en 1
3.	$\sim A \rightarrow A^I$	Transposición en 2

6.1.8 Si un enunciado atómico no es cuestionado entonces es incompatible con su negación: ~ØA®A^I.

Prueba:

1.	$\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$	FIA
2.	$\sim A^I \rightarrow \neg A$	Simplificación en 1
3.	$\sim\neg A \rightarrow A^I$	Transposición en 2

6.1.9 Si un enunciado atómico es compatible con su negación y es indeterminable entonces todo es aceptado. Esto significa que no puede ocurrir que un enunciado atómico sea compatible con su negación e indeterminable: ~A^I®(~A^C®B).

Prueba:

1.	$\sim A^I$	Premisa 1
2.	$\sim A^C$	Premisa 2
3.	$\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$	FIA
4.	$\neg A \wedge A$	Modus ponens en 1 y 3
5.	A	Simplificación en 4
6.	$\sim A^C \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FCA
7.	$\sim\neg A \wedge \sim A$	Modus ponens en 2 y 6
8.	$\sim A$	Simplificación en 7
9.	$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$	Ax10 Principio de trivialización
10.	$\sim A \rightarrow B$	Modus ponens en 5 y 9
11.	B	Modus ponens en 8 y 10
12.	$\sim A^C \rightarrow B$	MDC en 2 y 11
13.	$\sim A^I \rightarrow (\sim A^C \rightarrow B)$	MDC en 1 y 12

6.1.10 Un enunciado atómico es incompatible con su negación o es determinable: A^{I}ÚA^{C}

Prueba:

1.	$\sim A^{I}$	Premisa
2.	$\sim A^{I} \rightarrow A \wedge \neg A$	FIA
3.	$A \wedge \neg A$	Modus ponens en 1 y 2
4.	A	Simplificación en 3
5.	$A \rightarrow A^{C}$	6.1.6
6.	A^{C}	Modus ponens 4 y 5
7.	$\sim A^{I} \rightarrow A^{C}$	MDC en 1 y 6
8.	$A^{I} \vee A^{C}$	Implicación disyunción en 7

Como consecuencia inmediata se tiene que si un enunciado atómico es compatible con su negación entonces dicho enunciado es determinable: $\sim A^{I} \rightarrow A^{C}$. También se concluye que si un enunciado atómico es indeterminable entonces es incompatible su negación: $\sim A^{C} \rightarrow A^{I}$.

6.1.11 Si un enunciado atómico se acepta o se cuestiona entonces es determinable: (AÚØA)®A^{C}.

Prueba:

1.	$\sim A^{C} \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FCA
2.	$\sim(\sim\neg A \wedge \sim A) \rightarrow A^{C}$	Transposición en 1
3.	$(\neg A \vee A) \rightarrow A^{C}$	DeMorgan en 2

6.1.12 Si un enunciado atómico es determinable entonces se acepta o se cuestiona: A^{C}® (AÚØA)

Prueba:

1.	$A^{C} \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA$\neg$A
2.	$A^{C} \rightarrow (A \vee \neg A)$	Implicación disyunción en 1

De los dos resultados anteriores se puede concluir la siguiente caracterización de A^{C}, los enunciados atómicos completos (determinables) son los que se aceptan o se cuestionan: $A^{C} \leftrightarrow (A \vee \neg A)$. Los enunciados atómicos incompletos (indeterminables) son los que ni se aceptan ni se cuestionan: $\sim A^{C} \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim\neg A)$.

6.1.13 Si un enunciado atómico se acepta y se cuestiona entonces es compatible con su negación: (AÙØA)® $\sim A^{I}$

Prueba:

1.	$A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬A
2.	$A^I \rightarrow (\sim\neg A \vee \sim A)$	Implicación disyunción en 1
3.	$A^I \rightarrow \sim(\neg A \wedge A)$	DeMorgan en 2
4.	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \sim A^I$	Transposición en 3

Puesto que por FIA se tiene la reciproca, se puede concluir la siguiente caracterización de A^I, los enunciados atómico compatibles con su negación son los que se aceptan y se cuestionan: $\sim A^I \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$. Los enunciados atómico incompatibles con su negación son los que no se aceptan o no se cuestionan: $A^I \leftrightarrow (\sim A \vee \sim\neg A)$.

6.1.14 Si un enunciado atómico es incompatible con su negación y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: A^I ®[ØA®(A®B)]

Prueba:

1.	$A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬A
2.	$(A^I \wedge \neg A) \rightarrow \sim A$	Importación en 1
3.	$\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Ax 10 Principio de trivialización
4.	$(A^I \wedge \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Silogismo hipotético en 2 y 3
5.	$A^I \rightarrow [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Exportación en 4

6.1.15 Si un enunciado atómico es indeterminable y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado: $\sim A^C$ ®[ØA®(A®B)]

Prueba:

1.	$\sim A^C \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FCA
2.	$\sim A^C \rightarrow \sim A$	Simplificación en 1
3.	$\sim A \rightarrow [A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$	Ax 10 Principio de trivialización
4.	$\sim A \rightarrow [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Intercambio en 3
5.	$\sim A^C \rightarrow [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)]$	Silogismo hipotético en 2 y 4

6.1.16 Si un enunciado atómico es indeterminable entonces aceptarlo equivale a cuestionarlo: $\sim A^C$®(A « ØA)

Prueba:

1.	$\sim A^C \rightarrow (\sim A \wedge \sim\neg A)$	FCA
2.	$\sim A^C \rightarrow \sim A$	Simplificación en 1
3.	$\sim A \rightarrow (\sim\neg A \rightarrow \sim A)$	Ax 1 Debilitamiento
4.	$\sim A \rightarrow (A \rightarrow \neg A)$	Transposición en 3
5.	$\sim A^C \rightarrow (A \rightarrow \neg A)$	Silogismo hipotético en 2 y 4
6.	$\sim A^C \rightarrow \sim\neg A$	Simplificación en 1
7.	$\sim\neg A \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim\neg A)$	Ax 1 Debilitamiento
8.	$\sim\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$	Transposición en 7
9.	$\sim A^C \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$	Silogismo hipotético en 6 y 8

10.	$\sim A^C \to [(\neg A \to A) \wedge (A \to \neg A)]$	Conjunción en 5 y 9
11.	$\sim A^C \to (A \leftrightarrow \neg A)$	Equivalencia en 10

6.1.17 Si de un enunciado atómico determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado atómico incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es cuestionado: (A^CÙB^I)®{(A®B)® [(A®ØB)®ØA]}.

Prueba:

1.	$A^C \wedge B^I$	Premisa 1
2.	A^C	Simplificación en 1
3.	$A^C \to (\sim A \to \neg A)$	ACFA¬A
4.	$(\sim A \to \neg A)$	Modus ponens en 2 y 3
5.	B^I	Simplificación en 1
6.	$B^I \to (\neg B \to \sim B)$	AIA¬A
7.	$(\neg B \to \sim B)$	Modus ponens en 5 y 6
8.	$A \to B$	Premisa 2
9.	$A \to \neg B$	Premisa 3
10.	$A \to \sim B$	Silogismo hipotético en 7 y 9
11.	$A \to (B \wedge \sim B)$	Conjunción en 8 y 10
12.	$\sim(B \wedge \sim B)$	Principio de no contradicción
13.	$\sim A$	Modus tollens en 11 y 12
14.	$\neg A$	Modus ponens en 4 y 13
15.	$(A \to \neg B) \to \neg A$	MDC en 9 y 14
16.	$(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$	MDC en 8 y 15
17.	$A^C \wedge B^I \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]\}$	MDC en 1 y 16

Observando la prueba, se tiene también que si de un enunciado atómico se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado atómico incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es rechazado: $B^I \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \sim A]\}$. De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte a nivel atómico. Si del cuestionamiento de un enunciado atómico determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado atómico incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es aceptado: $(A^C \wedge B^I) \to$

$\{(\neg A \to B) \to [(\neg A \to \neg B) \to A]\}$. Si A no es atómico y B es atómico entonces: $B^I \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]\}$, $B^I \to \{(\neg A \to B) \to [(\neg A \to \neg B) \to A]\}$. Si B no es atómico y A es atómico entonces: $A^C \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]\}$, $A^C \to \{(\neg A \to B) \to [(\neg A \to \neg B) \to A]\}$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$, $(\neg A \to B) \to [(\neg A \to \neg B) \to A]$.

6.1.18 Si cuando de un enunciado atómico incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de uno atómico determinable se sigue el cuestionamiento del incompatible entonces del incompatible se sigue el determinable. (A^{I}ÙB^{C})®{[(A®ØB)®ØA]® (A®B)}.

Prueba:

1.	$A^{I}\wedge B^{C}$	Premisa 1
2.	$(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A$	Premisa 2
3.	A	Premisa 3
4.	A^{I}	Simplificación en 1
5.	$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA¬A
6.	$\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 4 y 5
7.	$\sim\neg A$	Modus tollens en 3 y 6
8.	$\sim(A\rightarrow\neg B)$	Modus tollens en 7 y 2
9.	$A\wedge\sim\neg B$	Negación de $\rightarrow$ en 8
10.	B^{C}	Simplificación en 1
11.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬A
12.	$(\sim B\rightarrow\neg B)$	Modus ponens en 10 y 11
13.	$\sim\neg B$	Simplificación en 9
14.	B	Modus tollens en 13 y 12
15.	$A\rightarrow B$	MDC en 3 y 14
16.	$[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]\rightarrow(A\rightarrow B)$	MDC en 2 y 15
17.	$A^{I}\wedge B^{C}\rightarrow\{[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]\rightarrow(A\rightarrow B)\}$	MDC en 1 y 16

De manera similar, si cuando del cuestionamiento un enunciado atómico incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de uno atómico determinable se sigue el incompatible entonces del cuestionamiento del incompatible se sigue el determinable: $(A^{I}\wedge B^{C})\rightarrow\{[(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]\rightarrow(\neg A\rightarrow B)\}$. Si A no es atómico y B es atómico entonces: $B^{C}\rightarrow\{[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]\rightarrow(A\rightarrow B)\}$, $B^{C}\rightarrow\{[(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]\rightarrow(\neg A\rightarrow B)\}$. Si B no es atómico y A es atómico entonces: $A^{I}\rightarrow\{[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]\rightarrow(A\rightarrow B)\}$, $A^{I}\rightarrow\{[(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]\rightarrow(\neg A\rightarrow B)\}$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $[(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A]\rightarrow(A\rightarrow B)$, $[(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A]\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$.

6.1.19 Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados atómicos determinables se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos: [A^{C}ÙB^{C}]®[Ø(AÙB)®(ØAÚØB)]

Prueba:

1.	$A^C\wedge B^C$	Premisa 1
2.	$\neg(A\wedge B)$	Premisa 2
3.	$\sim\neg A$	Premisa 3
4.	$\neg(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$	I$\wedge$
5.	$\sim(A\wedge B)$	Modus ponens en 2 y 4
6.	$\sim A\vee\sim B$	DeMorgan en 5
7.	A^C	Simplificación en 1
8.	$A^C\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$	ACFA$\neg$A
9.	$\sim A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 7 y 8
10.	A	Modus tollens en 3 y 9
11.	$\sim B$	Silogismo disyuntivo en 10 y 6
12.	B^C	Simplificación en 1
13.	$B^C\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA$\neg$A
14.	$\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 12 y 13
15.	$\neg B$	Modus ponens en 11 y 14
16.	$\sim\neg A\rightarrow\neg B$	MDC en 3 y 15
17.	$\neg(A\wedge B)\rightarrow(\sim\neg A\rightarrow\neg B)$	MDC en 2 y 16
18.	$A^C\wedge B^C\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\sim\neg A\rightarrow\neg B)]$	MDC en 1 y 17
19.	$A^C\wedge B^C\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$	Implicación disyunción en 18

Observando la prueba, también se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos: $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\sim A\vee\sim B)$. Si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^C\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$.

6.1.20 Disyunción de cuestionamientos a nivel atómico. Si se cuestiona alguno de dos enunciados atómicos incompatibles con su negación entonces se cuestiona la conjunción de ellos: [AIÙBI]®[(ØAÚØB)®Ø(AÙB)]

Prueba:

1.	$A^I\wedge B^I$	Premisa 1
2.	$\neg A\vee\neg B$	Premisa 2
3.	A^I	Simplificación en 1
4.	$A^I\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA$\neg$A
5.	$\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6.	B^I	Simplificación en 1
7.	$B^I\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim B)$	AIA$\neg$A
8.	$\neg B\rightarrow\sim B$	Modus ponens en 6 y 7
9.	$\sim A\vee\sim B$	Dilema constructivo en 2, 5 y 8
10.	$\sim(A\wedge B)$	DeMorgan en 9
11.	$\sim(A\wedge B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$	C$\wedge$
12.	$\neg(A\wedge B)$	Modus ponens en 10 y 11
13.	$(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$	MDC en 2 y 12
14.	$[A^I\wedge B^I]\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$	MDC en 1 y 13

Observando la prueba, también se tiene que si se cuestiona alguno de dos enunciados atómicos incompatibles con su negación entonces se rechaza la conjunción de ellos: $[A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \sim(A \wedge B)]$. Si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^I \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$.

6.1.21 Cuestionamiento de la disyunción a nivel atómico. Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados atómicos determinables se sigue el cuestionamiento de ambos: [A^{C}ÙB^{C}] ® [Ø(AÚB) ® (ØAÙØB)]

Prueba:

1.	$A^C \wedge B^C$	Premisa 1
2.	$\neg(A \vee B)$	Premisa 2
3.	$\neg(A \vee B) \rightarrow \sim(A \vee B)$	I$\vee$
4.	$\sim(A \vee B)$	Modus ponens en 2 y 3
5.	$\sim A \wedge \sim B$	DeMorgan en 4
6.	A^C	Simplificación en 1
7.	$A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA$\neg$A
8.	$\sim A \rightarrow \neg A$	Modus ponens en 6 y 7
9.	$\sim A$	Simplificación en 5
10.	$\neg A$	Modus ponens en 8 y 9
11.	$\sim B$	Simplificación en 5
12.	B^C	Simplificación en 1
13.	$B^C \rightarrow (\sim B \rightarrow \neg B)$	ACFA$\neg$A
14.	$\sim B \rightarrow \neg B$	Modus ponens en 12 y 13
15.	$\neg B$	Modus ponens en 11 y 14
16.	$\neg A \wedge \neg B$	Conjunción en 10 y 15
17.	$\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	MDC en 2 y 16
18.	$A^C \wedge B^C \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$	MDC en 1 y 17

Observando la prueba, también se tiene que del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados atómicos se sigue el rechazo de ambos: $\neg(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$. Si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^C \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

6.1.22 Si se cuestionan dos enunciados atómicos incompatibles con su negación entonces se cuestiona la disyunción de ellos: [A^{I}ÙB^{I}] ® [(ØAÙØB) ® Ø(AÚB)].

Prueba:

1.	$A^{I}\wedge B^{I}$	Premisa 1
2.	$\neg A\wedge\neg B$	Premisa 2
3.	A^{I}	Simplificación en 1
4.	$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow{\sim}A)$	AIA¬A
5.	$\neg A\rightarrow{\sim}A$	Modus ponens en 3 y 4
6.	B^{I}	Simplificación en 1
7.	$B^{I}\rightarrow(\neg B\rightarrow{\sim}B)$	AIA¬A
8.	$\neg B\rightarrow{\sim}B$	Modus ponens en 6 y 7
9.	$\neg A$	Simplificación en 2
10.	${\sim}A$	Modus ponens en 9 y 5
11.	$\neg B$	Simplificación en 2
12.	${\sim}B$	Modus ponens en 11 y 8
13.	${\sim}A\wedge{\sim}B$	Conjunción en 10 y 12
14.	${\sim}(A\vee B)$	DeMorgan en 13
15.	${\sim}(A\vee B)\rightarrow\neg(A\vee B)$	$C_{\vee}$
16.	$\neg(A\vee B)$	Modus ponens en 14 y 15
17.	$(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$	MDC en 2 y 16
18.	$[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$	MDC en 1 y 17

Observando la prueba, también se tiene que si se cuestionan dos enunciados atómicos incompatibles con su negación entonces se rechaza la disyunción de ellos: $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow{\sim}(A\vee B)]$. Si A es atómico y B no es atómicos entonces: $A^{I}\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$.

6.1.23 Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente atómico es incompatible con la negación y este se cuestiona entonces se cuestiona el antecedente si este es determinable y atómico: [A^C ÙB^I]® [(A® B) ® (ØB® ØA)].

Prueba:

1.	$A^{C}\wedge B^{I}$	Premisa 1
2.	$A\rightarrow B$	Premisa 2
3.	${\sim}B\rightarrow{\sim}A$	Transposición en 2
4.	A^{C}	Simplificación en 1
5.	$A^{C}\rightarrow({\sim}A\rightarrow\neg A)$	ACFA¬A
6.	${\sim}A\rightarrow\neg A$	Modus ponens en 4 y 5
7.	${\sim}B\rightarrow\neg A$	Silogismo hipotético en 3 y 6
8.	B^{I}	Simplificación en 1
9.	$B^{I}\rightarrow(\neg B\rightarrow{\sim}B)$	AIA¬A
10.	$\neg B\rightarrow{\sim}B$	Modus ponens en 8 y 9
11.	$\neg B\rightarrow\neg A$	Silogismo hipotético en 10 y 7
12.	$(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$	MDC en 2 y 11
13.	$(A^{C}\wedge B^{I})\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, se tiene también que cuando se acepta un condicional cuyo consecuente atómico es incompatible con la negación y este se cuestiona entonces se rechaza el antecedente: $B^{I}\to[(A\to B)\to(\neg B\to\sim A)]$. Si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^{C}\to[(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)]$. Si A es no atómico y B es atómico entonces: $B^{I}\to[(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)]$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$.

6.1.24 Si del cuestionamiento de un enunciado atómico determinable se sigue el cuestionamiento de otro enunciado atómico incompatible con su negación, entonces, si se acepta el último, también se acepta el primero: [A^IÙB^C]®[(ØB®ØA)®(A®B)].

Prueba:

1.	$A^{I}\wedge B^{C}$	Premisa 1
2.	$\neg B\to\neg A$	Premisa 2
3.	A^{I}	Simplificación en 1
4.	$A^{I}\to(\neg A\to\sim A)$	AIA¬A
5.	$\neg A\to\sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6.	$\neg B\to\sim A$	Silogismo hipotético en 2 y 5
7.	B^{C}	Simplificación en 1
8.	$B^{C}\to(\sim B\to\neg B)$	ACFA¬A
9.	$\sim B\to\neg B$	Modus ponens en 7 y 8
10.	$\sim B\to\sim A$	Silogismo hipotético entre 9 y 6
11.	$A\to B$	Transposición en 10
12.	$(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$	MDC en 2 y 11
13.	$(A^{I}\wedge B^{C})\to[(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, también se tiene que si del cuestionamiento de un enunciado atómico determinable se sigue el rechazo de otro enunciado atómico entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $B^{C}\to[(\neg B\to\sim A)\to(A\to B)]$. Observando la prueba, también se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado atómico incompatible con su negación entonces si se acepta el último también se acepta el primero: $A^{I}\to[(\sim B\to\neg A)\to(A\to B)]$. Si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^{I}\to[(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)]$. Si A no es atómico y B es atómico entonces: $B^{C}\to[(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)]$. Si ni A ni B son atómicos entonces: $(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$.

6.1.25 Si un enunciado se sigue de uno atómico determinable y del cuestionamiento de este entonces ese enunciado es aceptado: B^C®[(B®A)®{(ØB®A)®A}].

Prueba:

1.	B^{C}	Premisa 1
2.	$B\rightarrow A$	Premisa 2
3.	$\neg B\rightarrow A$	Premisa 3
4.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬A
5.	$\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 1 y 4
6.	$\sim B\rightarrow A$	Silogismo hipotético entre 5 y 3
7.	$B\vee\sim B$	Principio de bivalencia
8.	A	Dilema constructivo en 7, 2 y 6
9.	$(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A$	MDC en 3 y 8
10.	$(B\rightarrow A)\rightarrow[(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A]$	MDC en 2 y 9
11.	$B^{C}\rightarrow\{(B\rightarrow A)\rightarrow[(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A]\}$	MDC en 1 y 10

De manera similar se prueba que si el cuestionamiento de un enunciado se sigue de uno atómico determinable y del cuestionamiento de este entonces ese enunciado es cuestionado: $B^{C}\rightarrow[(B\rightarrow\neg A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A\}]$. Si B no es atómico entonces: $(B\rightarrow A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}$.

6.1.26 Si al cuestionar un enunciado atómico incompatible con su negación se sigue un segundo enunciado, y esto implica el segundo, entonces el segundo se sigue del incompatible: B^{I}® [{(ØB ® A) ® A} ® (B ® A)].

Prueba:

1.	B^{I}	Premisa 1
2.	$(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A$	Premisa 2
3.	$B^{I}\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim B)$	AIA¬A
4.	$\neg B\rightarrow\sim B$	Modus ponens en 1 y 3
5.	B	Premisa 3
6.	$\sim\neg B$	Modus Tollens en 5 y 4
7.	$\sim\neg B\rightarrow(\sim A\rightarrow\sim\neg B)$	A1 Irrelevancia del antecedente
8.	$\sim A\rightarrow\sim\neg B$	Modus ponens en 6 y 7
9.	$\neg B\rightarrow A$	Transposición en 8
10.	A	Modus ponens en 9 y 2
11.	$B\rightarrow A$	MDC 5 y 10
12.	$[(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A]\rightarrow(B\rightarrow A)$	MDC en 2 y 11
13.	$B^{I}\rightarrow\{[(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A]\rightarrow(B\rightarrow A)\}$	MDC en 1 y 12

6.1.27 Si se acepta un enunciado atómico incompatible con su negación entonces se cuestiona el cuestionamiento de este: A^{I}® [A ® ØØA].

Prueba:

1.	A^{I}	Premisa 1
2.	$A^{I}\to(\neg A\to\sim A)$	AIA¬A
3.	$\neg A\to\sim A$	Modus ponens en 1 y 2
4.	$\sim\neg A\to\neg\neg A$	C¬
5.	$A\to\sim\neg A$	Transposición en 3
6.	$A\to\neg\neg A$	Silogismo hipotético en 5 y 4
7.	$A^{I}\to(A\to\neg\neg A)$	MDC en 1 y 6

Si A no es atómico entonces: $A\to\neg\neg A$.

6.1.28 Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado atómico se sigue el enunciado cuando éste es determinable: AC®[ØØA®A)]

Prueba:

1.	A^{C}	Premisa 1
2.	$A^{C}\to(\sim A\to\neg A)$	ACFA¬A
3.	$\sim A\to\neg A$	Modus ponens en 2 y 1
4.	$\neg\neg A\to\sim\neg A$	I¬
5.	$\sim\neg A\to A$	Transposición en 3
6.	$\neg\neg A\to A$	Silogismo hipotético en 4 y 5
7.	$A^{C}\to[\neg\neg A\to A]$	MDC en 1 y 6

Si A no es atómico entonces: $\neg\neg A\to A$.

6.1.29 Cuando se tiene un condicional con antecedente atómico determinable entonces se cuestiona el antecedente o se acepta el consecuente: AC® [(A®B)®(ØAÚB)].

Prueba:

1.	A^{C}	Premisa 1
2.	$A\to B$	Premisa 2
3.	$A^{C}\to(\sim A\to\neg A)$	ACFA¬A
4.	$\sim A\to\neg A$	Modus ponens en 1 y 3
5.	$\sim\neg A\to A$	Transposición en 4
6.	$\sim\neg A\to B$	Silogismo hipotético en 5 y 2
7.	$\neg A\vee B$	Implicación disyunción en 6
8.	$(A\to B)\to(\neg A\vee B)$	MDC en 2 y 7
9.	$A^{C}\to[(A\to B)\to(\neg A\vee B)]$	MDC en 1 y 8

Si A no es atómica entonces: $(A\to B)\to(\neg A\vee B)$.

6.1.30 Si se cuestiona el componente atómico incompatible con la negación de una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: A^{I}®[(AÚB) ® (ØA®B)].

Prueba:

1.	A^{I}	Premisa 1
2.	$A\vee B$	Premisa 2
3.	$\sim A\rightarrow B$	Implicación disyunción en 2
4.	$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA¬A
5.	$\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 1 y 4
6.	$\neg A\rightarrow B$	Silogismo hipotético en 5 y 3
7.	$(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$	MDC en 2 y 6
8.	$A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$	MDC en 1 y 7

De manera similar se prueba que si se acepta el componente atómico incompatible con la negación que se cuestiona en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción: $A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]$. Si A no es atómico entonces: $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$, $(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$.

6.1.31 Si se cuestiona un condicional cuyo consecuente atómico es determinable entonces se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente: B^{C}®[Ø(A ®B) ® (AÙØB)]

Prueba:

1.	B^{C}	Premisa 1
2.	$\neg(A\rightarrow B)$	Premisa 2
3.	$\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$	I→
4.	$\sim(A\rightarrow B)$	Modus ponens en 2 y 3
5.	$A\wedge\sim B$	Negación del condicional en 4
6.	A	Simplificación en 5
7.	$\sim B$	Simplificación en 5
8.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬A
9.	$(\sim B\rightarrow\neg B)$	Modus ponens en 1 y 8
10.	$\neg B$	Modus ponens en 9 y 7
11.	$A\wedge\neg B$	Conjunción en 6 y 10
12.	$\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$	MDC en 2 y 11
13.	$B^{C}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, se tiene también que si se cuestiona un condicional entonces se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente: $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)$. Si B no es atómico entonces: $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$.

6.1.32 Si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente atómico entonces se cuestiona el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación: B^{I}®[(AÙØB)® Ø(A®B)]

Prueba:

1.	B^{I}	Premisa 1
2.	$A\wedge\neg B$	Premisa 2
3.	$B^{I}\to(\neg B\to\sim B)$	AIA¬A
4.	$\neg B\to\sim B$	Modus ponens en 3 y 1
5.	$\neg B$	Simplificación en 2
6.	$\sim B$	Modus ponens en 4 y 5
7.	A	Simplificación en 2
8.	$A\wedge\sim B$	Conjunción en 6 y 7
9.	$\sim(A\to B)$	Negación del condicional en 8
10.	$\sim(A\to B)\to\neg(A\to B)$	C→
11.	$\neg(A\to B)$	Modus ponens en 10 y 9
12.	$(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$	MDC en 2 y 11
13.	$B^{I}\to[(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, también se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente atómico entonces se rechaza el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación: $B^{I}\to[(A\wedge\neg B)\to\sim(A\to B)]$. También se observa que si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se cuestiona el condicional: $(A\wedge\sim B)\to\neg(A\to B)$. Si B no es atómico entonces: $(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$.

6.1.33 Al cuestionar el rechazo de un enunciado se sigue el enunciado: Ø~A®A

Prueba:

1.	$\neg\sim A\to\sim\sim A$	I~
2.	$\sim\sim A\to A$	Eliminación de la doble negación
3.	$\neg\sim A\to A$	Silogismo hipotético en 1 y 2

6.1.34 Al aceptar un enunciado se sigue cuestionar el rechazo del enunciado: A®Ø~A

Prueba:

1.	$\sim\sim A\to\neg\sim A$	C~
2.	$A\to\sim\sim A$	Introducción de la doble negación
3.	$A\to\neg\sim A$	Silogismo hipotético en 1 y 2

6.1.35 Al cuestionar el rechazo de un enunciado atómico se sigue el cuestionamiento del cuestionamiento del enunciado cuando éste es incompatible con su negación: A^{I}®(Ø~A ®ØØA)

Prueba:

1.	$\neg{\sim}A \to A$	6.1.33
2.	$A^{I} \to (A \to \neg\neg A)$	6.1.27
3.	$A \to (A^{I} \to \neg\neg A)$	Intercambio en 2
4.	$\neg{\sim}A \to (A^{I} \to \neg\neg A)$	Silogismo hipotético en 1 y 3
5.	$A^{I} \to (\neg{\sim}A \to \neg\neg A)$	Intercambio en 4

Si A no es atómico entonces: $\neg{\sim}A \to \neg\neg A$.

6.1.36 Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado atómico se sigue cuestionamiento del rechazo del enunciado cuando este es completo: A^{C}®(ØØA®Ø~A)

Prueba:

1.	$A \to \neg{\sim}A$	6.1.34
2.	$A^{C} \to (\neg\neg A \to A)$	6.1.28
3.	$(A^{C} \wedge \neg\neg A) \to A$	Importación en 2
4.	$(A^{C} \wedge \neg\neg A) \to \neg{\sim}A$	Silogismo hipotético en 1 y 3
5.	$A^{C} \to (\neg\neg A \to \neg{\sim}A)$	Exportación en 4

Si A no es atómico entonces: $\neg\neg A \to \neg{\sim}A$.

6.2 Lógica Básica Paraconsistente Débil a nivel Atómico LBPcDA

La Lógica Básica Paraconsistente débil a nivel Atómico *LBPcDA,* se obtiene a partir[29] de la *Lógica Básica Paraconsistente* LBPc, agregando axiomas que garantizan que todas las fórmulas no atómicas son incompatibles con su negación. Este sistema también se obtiene a partir de LBPcoDA pidiendo completez a los enunciados atómicos. Los axiomas para la negación débil son:

29 O a partir de LPPcD, o a partir de LPcD, en los tres casos resulta la misma lógica. Lo anterior significa que LBPcDA, LPPcDA y LPcDA coinciden.

Ax 12. AIA¬A: $A^{I} \to (\neg A \to {\sim}A)$.

Ax 13. FIA: ${\sim}A^{I} \to (\neg A \wedge A)$.

Ax 14. FA¬: ${\sim}A \to \neg A$. (Completez: A^{C}).

Ax 15[30]. I∧: $(A \wedge B)^{I}$, $\neg(A \wedge B) \to {\sim}(A \wedge B)$.

Ax 16. I∨: $(A \vee B)^{I}$, $\neg(A \vee B) \to {\sim}(A \vee B)$.

Ax 17. I→: $(A \to B)^{I}$, $\neg(A \to B) \to {\sim}(A \to B)$.

Ax 18. I¬: $(\neg A)^{I}$, $\neg(\neg A) \to {\sim}(\neg A)$.

Ax 19. I~: $({\sim}A)^{I}$, $\neg({\sim}A) \to {\sim}({\sim}A)$.

Se tienen los siguientes resultados:

6.2.1 (Afirmación de la Incompatibilidad y Afirmación del Alcance de la Negación a nivel Atómico): $A^{I} \to (A \to {\sim}\neg A)$.

6.2.2 (Afirmación del Alcance de la Negación y Afirmación de la Negación en la Incompatibilidad a nivel Atómico): $A \to (\neg A \to {\sim}A^{I})$.

6.2.3 (Falsedad del Alcance de la Negación en la Incompatibilidad a nivel Atómico): ${\sim}A \to A^{I}$.

6.2.4 (Falsedad de la Negación en la Incompatibilidad a nivel Atómico): ${\sim}\neg A \to A^{I}$.

6.2.5 Compatibilidad con la negación a nivel atómico: $(A \wedge \neg A) \to {\sim}A^{I}$.

6.2.6 Principio de trivialización a nivel atómico: $A^{I} \to [\neg A \to (A \to B)]$.

6.2.7 Reducción al absurdo débil a nivel atómico: $B^{I} \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]\}$, $B^{I} \to \{(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to {\sim}A]\}$, $B^{I} \to \{(\neg A \to B) \to [(\neg A \to \neg B) \to A]\}$, si B no es atómico entonces: $(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$, $(\neg A \to B) \to [(\neg A \to \neg B) \to A]$.

6.2.8 $A^{I} \to \{[(A \to \neg B) \to \neg A] \to (A \to B)\}$, $A^{I} \to \{[(\neg A \to \neg B) \to A] \to (\neg A \to B)\}$, si B no es atómico entonces: $[(A \to \neg B) \to \neg A] \to (A \to B)$, $[(\neg A \to \neg B) \to A] \to (\neg A \to B)$.

6.2.9 Cuestionamiento de la conjunción: $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$.

30 Los axiomas 15, ..., 19 son presentados como parejas, observar que si en los axiomas 12 y 13 se omite la palabra "atómico" entonces ambos componentes de las parejas mencionadas son equivalentes. La axiomática presentada pretende enfatizar que la diferencia entre la negación fuerte y la débil se da solo a nivel atómico.

6.2.10 Disyunción de cuestionamientos a nivel atómico: $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$, $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\vee \neg B)\rightarrow\sim(A\wedge B)]$, si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^{I}\rightarrow [(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$, si ni A ni B son atómicos entonces: $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow \neg(A\wedge B)$.

6.2.11 Cuestionamiento de la disyunción: $\neg(A\vee B)\rightarrow (\neg A\wedge\neg B)$.

6.2.12 Conjunción de cuestionamientos a nivel atómico: $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$, $[A^{I}\wedge B^{I}]\rightarrow[(\neg A\wedge \neg B)\rightarrow\sim(A\vee B)]$, si A es atómico y B no es atómicos entonces: $A^{I}\rightarrow[(\neg A\wedge \neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)]$, si ni A ni B son atómicos entonces: $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow \neg(A\vee B)$.

6.2.13 Contra reciproca débil a nivel atómico. Modus tollens a nivel atómico: $B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow (\neg B\rightarrow\neg A)]$, $B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\sim A)]$, si B no es atómico entonces: $(A\rightarrow B)\rightarrow (\neg B\rightarrow\neg A)$.

6.2.14 Contra recíproca fuerte a nivel atómico. Modus tollens a nivel atómico: $A^{I}\rightarrow [(\neg B\rightarrow \neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$, $(\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)$, $A^{I}\rightarrow [(\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow (A\rightarrow B)]$, si A no es atómico entonces: $(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow (A\rightarrow B)$.

6.2.15 Principio de bivalencia: $(B\rightarrow A)\rightarrow \{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}$, $(B\rightarrow\neg A)\rightarrow \{(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A\}$.

6.2.16 $B^{I}\rightarrow[\{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}\rightarrow(B\rightarrow A)]$.

6.2.17 Introducción del doble cuestionamiento a nivel atómico: $A^{I}\rightarrow[A\rightarrow\neg\neg A]$, si A no es atómico entonces: $A\rightarrow\neg\neg A$.

6.2.18 Eliminación del doble cuestionamiento: $\neg\neg A\rightarrow A$.

6.2.19 Implicación disyunción: $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B)$.

6.2.20 Disyunción implicación a nivel atómico: $A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$, $A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B) \rightarrow (A\rightarrow B)]$, si A no es atómico entonces: $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$, $(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$.

6.2.21 Cuestionamiento del condicional: $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow (A\wedge\neg B)$, $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)$.

6.2.22 Aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente con nivel atómico: $B^{I}\rightarrow [(A\wedge\neg B)\rightarrow \neg(A\rightarrow B)]$, $B^{I}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow \sim(A\rightarrow B)]$, $(A\wedge\sim B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, si B no es atómico entonces: $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$.

6.2.23 Eliminación del cuestionamiento del rechazo: $\neg\sim A\rightarrow A$.

6.2.24 Introducción del cuestionamiento del rechazo: $A\rightarrow\neg\sim A$.

6.2.25 Intercambio del cuestionamiento del rechazo por cuestionamiento del cuestionamiento a nivel atómico: $A^{I}\rightarrow(\neg\sim A\rightarrow\neg\neg\neg A)$.

6.2.26 Intercambio del cuestionamiento del cuestionamiento por cuestionamiento del rechazo: $\neg\neg A\rightarrow\neg\sim A$.

6.3 Lógica Básica Paracompleta Débil a nivel Atómico LBPoDA

La *Lógica Básica Paracompleta Débil a nivel Atómico* LBPoDA, se obtiene a partir[31] de la *Lógica Básica Paracompleta* LBPo, agregando axiomas que garantizan que todas las fórmulas no atómicas son completas con su negación. Este sistema también se obtiene a partir de LBPcoDA pidiendo incompatibilidad a los enunciados atómicos. Los axiomas para la negación débil son:

Ax 12. $A\neg$: $\neg A\rightarrow\sim A$. (Incompatibilidad: A^{I}).

Ax 13. ACFA$\neg$A: $A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$.

Ax 14. FCA: $\sim A^{C}\rightarrow(\sim\neg A\wedge\sim A)$.

Ax 15[32]. $C\wedge$: $(A\wedge B)^{C}$, $\sim(A\wedge B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$.

Ax 16. $C\vee$: $(A\vee B)^{C}$, $\sim(A\vee B)\rightarrow\neg(A\vee B)$.

Ax 17. $C\rightarrow$: $(A\rightarrow B)^{C}$, $\sim(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$.

Ax 18. $C\neg$: $(\neg A)^{C}$, $\sim(\neg A)\rightarrow\neg(\neg A)$.

Ax 19. $C\sim$: $(\sim A)^{C}$, $\sim(\sim A)\rightarrow\neg(\sim A)$.

---

31 O a partir de LPPoD, o a partir de LPoD, en los tres casos resulta la misma lógica. Lo anterior significa que LBPoDA, LPPoDA y LPoDA coinciden.

32 Los axiomas 15, ..., 19 son presentados como parejas, observar que si en los axiomas 12, ..., 15 se omite la palabra “atómico” entonces ambos componentes de las parejas mencionadas son equivalentes. La axiomática presentada pretende enfatizar que la diferencia entre la negación fuerte y la débil se da solo a nivel atómico.

Se tienen los siguientes resultados:

6.3.1 Afirmación de la Completez y Falsedad de la Negación a nivel Atómico: $A^{C}\to(\sim\neg A\to A)$.

6.3.2 Falsedad de la Negación y Falsedad del Alcance de la Negación en la Completez a nivel Atómico: $\sim\neg A\to(\sim A\to\sim A^{C})$.

6.3.3 Afirmación de la Negación en la Completez a nivel Atómico: $\neg A\to A^{C}$.

6.3.4 Afirmación del Alcance de la Negación en la Completez a nivel Atómico: $A\to A^{C}$.

6.3.5 Principio de bivalencia a nivel atómico: $(A\vee\neg A)\to A^{C}$.

6.3.6 Principio de bivalencia a nivel atómico: $A^{C}\to(A\vee\neg A)$.

6.3.7 Principio de trivialización: $\neg A\to(A\to B)$.

6.3.8 Reducción al absurdo débil a nivel atómico: $A^{C}\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]\}$, $(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\sim A]$, $A^{C}\to\{(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]\}$, si A no es atómico entonces: $(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]$, $(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]$.

6.3.9 $B^{C}\to\{[(A\to\neg B)\to\neg A]\to(A\to B)\}$, $B^{C}\to\{[(\neg A\to\neg B)\to A]\to(\neg A\to B)\}$, si B no es atómico entonces: $[(A\to\neg B)\to\neg A]\to(A\to B)$, $[(\neg A\to\neg B)\to A]\to(\neg A\to B)$.

6.3.10 Cuestionamiento de la conjunción a nivel atómico: $[A^{C}\wedge B^{C}]\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$, $\neg(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)$, si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^{C}\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$, si ni A ni B son atómicos entonces: $\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$.

6.3.11 Disyunción de cuestionamientos: $(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)$, $(\neg A\vee\neg B)\to\sim(A\wedge B)$.

6.3.12 Cuestionamiento de la disyunción a nivel atómico: $\neg(A\vee B)\to(\sim A\wedge\sim B)$, $[A^{C}\wedge B^{C}]\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$, si A es atómico y B no es atómico entonces: $A^{C}\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$, si ni A ni B son atómicos entonces: $\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$.

6.3.13 Conjunción de cuestionamientos: $(\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)$, $(\neg A\wedge\neg B)\to\sim(A\vee B)$.

6.3.14 Contra recíproca débil a nivel atómico. Modus tollens a nivel atómico: $A^{C}\to[(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)]$, $(A\to B)\to(\neg B\to\sim A)$, si A no es atómico entonces: $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$.

6.3.15 Contra recíproca fuerte a nivel atómico. Modus tollens a nivel atómico: $B^{C}\to[(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)]$, $B^{C}\to[(\neg B\to\sim A)\to(A\to B)]$, $(\sim B\to\neg A)\to(A\to B)$, si B no es atómico entonces: $(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$.

6.3.16 Principio de bivalencia a nivel atómico: $B^{C}\to[(B\to A)\to\{(\neg B\to A)\to A\}]$, $B^{C}\to[(B\to\neg A)\to\{(\neg B\to\neg A)\to\neg A\}]$, si B no es atómico entonces: $(B\to A)\to\{(\neg B\to A)\to A\}$.

6.3.17 $\{(\neg B\to A)\to A\}\to(B\to A)$.

6.3.18 Introducción del doble cuestionamiento: $A\to\neg\neg A$.

6.3.19 Eliminación del doble cuestionamiento a nivel atómico: $A^{C}\to[\neg\neg A\to A)]$, si A no es atómico entonces: $\neg\neg A\to A$.

6.3.20 Implicación disyunción a nivel atómico: $A^{C}\to[(A\to B)\to(\neg A\vee B)]$, si A no es atómica entonces: $(A\to B)\to(\neg A\vee B)$.

6.3.21 Disyunción implicación. Silogismo disyuntivo: $(A\vee B)\to(\neg A\to B)$, $(\neg A\vee B)\to(A\to B)$.

6.3.22 Cuestionamiento del condicional a nivel atómico: $B^{C}\to[\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)]$, $\neg(A\to B)\to(A\wedge\sim B)$, si B no es atómico entonces: $\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)$.

6.3.23 Aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente: $(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$, $(A\wedge\neg B)\to\sim(A\to B)$, $(A\wedge\sim B)\to\neg(A\to B)$.

6.3.24 Eliminación del cuestionamiento del rechazo: $\neg\sim A\to A$.

6.3.25 Introducción del cuestionamiento del rechazo: $A\to\neg\sim A$.

6.3.26 Intercambio del cuestionamiento del rechazo por cuestionamiento del cuestionamiento: $\neg\sim A\to\neg\neg A$.

6.3.27 Intercambio del cuestionamiento del cuestionamiento por cuestionamiento del rechazo a nivel atómico: $A^{C}\to(\neg\neg A\to\neg\sim A)$, si A no es atómico entonces: $\neg\neg A\to\neg\sim A$.

7. Lógica Paraconsistente y Paracompleta a nivel Atómico LPcoA

El sistema *lógica paraconsistente y paracompleta a nivel atómico* LPcoA se obtiene a partir del sistema *lógica paraconsistente y paracompleta* LPco, agregando axiomas que garantizan que todas las fórmulas no atómicas son incompatibles con su negación y completas con su negación.

Ax 12. $A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$

Ax 13. $\sim A^{I}\rightarrow(\neg A\wedge A)$

Ax 14. $A^{C}\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$

Ax 15. $\sim A^{C}\rightarrow(\sim\neg A\wedge\sim A)$

Ax 16. $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$

Ax 17. $\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$

Ax 18. $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$

Ax 19. $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$

Ax 20. $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$

Ax 21. $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$

Ax 22. $\neg\neg A\rightarrow A$

Ax 23. $\neg\sim A\rightarrow A$

Ax 24. $A\rightarrow\neg\neg A$

Ax 25. $A\rightarrow\neg\sim A$

Ax 26. Incompatibilidad de la Conjunción: $(A\wedge B)^{I}$. $\neg(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$

Ax 27. Incompatibilidad de la Disyunción: $(A\vee B)^{I}$. $\neg(A\vee B)\rightarrow\sim(A\vee B)$

Ax 28. Incompatibilidad del Condicional: $(A\rightarrow B)^{I}$. $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$

Ax 29. Incompatibilidad de la Negación Débil: $(\neg A)^{I}$. $\neg(\neg A)\rightarrow\sim(\neg A)$

Ax 30. Incompatibilidad de la Negación Fuerte: $(\sim A)^{I}$. $\neg(\sim A)\rightarrow\sim(\sim A)$

Ax 31. Completez de la Conjunción: $(A\wedge B)^{C}$. $\sim(A\wedge B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$

Ax 32. Completez de la Disyunción: $(A\vee B)^{C}$. $\sim(A\vee B)\rightarrow\neg(A\vee B)$

Ax 33. Completez del Condicional: $(A\rightarrow B)^{C}$. $\sim(A\rightarrow B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$

Ax 34. Completez de la Negación Débil: $(\neg A)^{C}$. $\sim(\neg A)\rightarrow\neg(\neg A)$

Ax 35. Completez de la Negación Fuerte: $(\sim A)^{C}$. $\sim(\sim A)\rightarrow\neg(\sim A)$

7.1 Lógica Paraconsistente a nivel Atómico LPcA

El *sistema lógica paraconsistente a nivel atómico* LPcA se obtiene a partir del sistema *lógica* LPc, agregando axiomas que garantizan que todas las fórmulas no atómicas son incompatibles con su negación. Los axiomas para la negación débil son:

Ax 12. AIA¬: $A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$.

Ax 13. FI: $\sim A^{I}\rightarrow(\neg A\wedge A)$.

Ax 14. ACFA¬: $\sim A\rightarrow\neg A$. (Completez: A^{C}).

Ax 15. $A\neg\wedge$: $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$.

Ax 16. $A\neg\vee$: $\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$.

Ax 17. $A\neg\rightarrow$: $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$.

Ax 18. $A\neg\neg$: $\neg\neg A\rightarrow A$.

Ax 19. $A\neg\sim$: $\neg\sim A\rightarrow A$.

Ax 20. $I\wedge$: $(A\wedge B)^{I}$, $\neg(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$.

Ax 21. $I\vee$: $(A\vee B)^{I}$, $\neg(A\vee B)\rightarrow\sim(A\vee B)$.

Ax 22. $I\rightarrow$: $(A\rightarrow B)^{I}$, $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$.

Ax 23. $I\neg$: $(\neg A)^{I}$, $\neg(\neg A)\rightarrow\sim(\neg A)$.

Ax 24. $I\sim$: $(\sim A)^{I}$, $\neg(\sim A)\rightarrow\sim(\sim A)$.

7.2 Lógica Paracompleta a nivel Atómico LPoA

El sistema *lógica paracompleta a nivel atómico* LPoA se obtiene a partir del sistema *lógica para-*

completa LPo, agregando axiomas que garantizan que todas las fórmulas no atómicas son completas con su negación. Los axiomas para la negación débil son:

Ax 12. AIA$\neg$: $\neg A \to \sim A$. (Incompatibilidad: A^{I}).

Ax 13. ACFA$\neg$: $A^{C} \to (\sim A \to \neg A)$.

Ax 14. FC: $\sim A^{C} \to (\sim\neg A \wedge \sim A)$.

Ax 15. A$\neg\wedge$R: $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$.

Ax 16. A$\neg\vee$R: $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$.

Ax 17. A$\neg\to$R: $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$.

Ax 18. A$\neg\neg$R: $A \to \neg\neg A$.

Ax 19. A$\neg\sim$R: $A \to \neg\sim A$.

Ax 20. C$\wedge$: $(A \wedge B)^{C}$, $\sim(A \wedge B) \to \neg(A \wedge B)$.

Ax 21. C$\vee$: $(A \vee B)^{C}$, $\sim(A \vee B) \to \neg(A \vee B)$.

Ax 22. C$\to$: $(A \to B)^{C}$, $\sim(A \to B) \to \neg(A \to B)$.

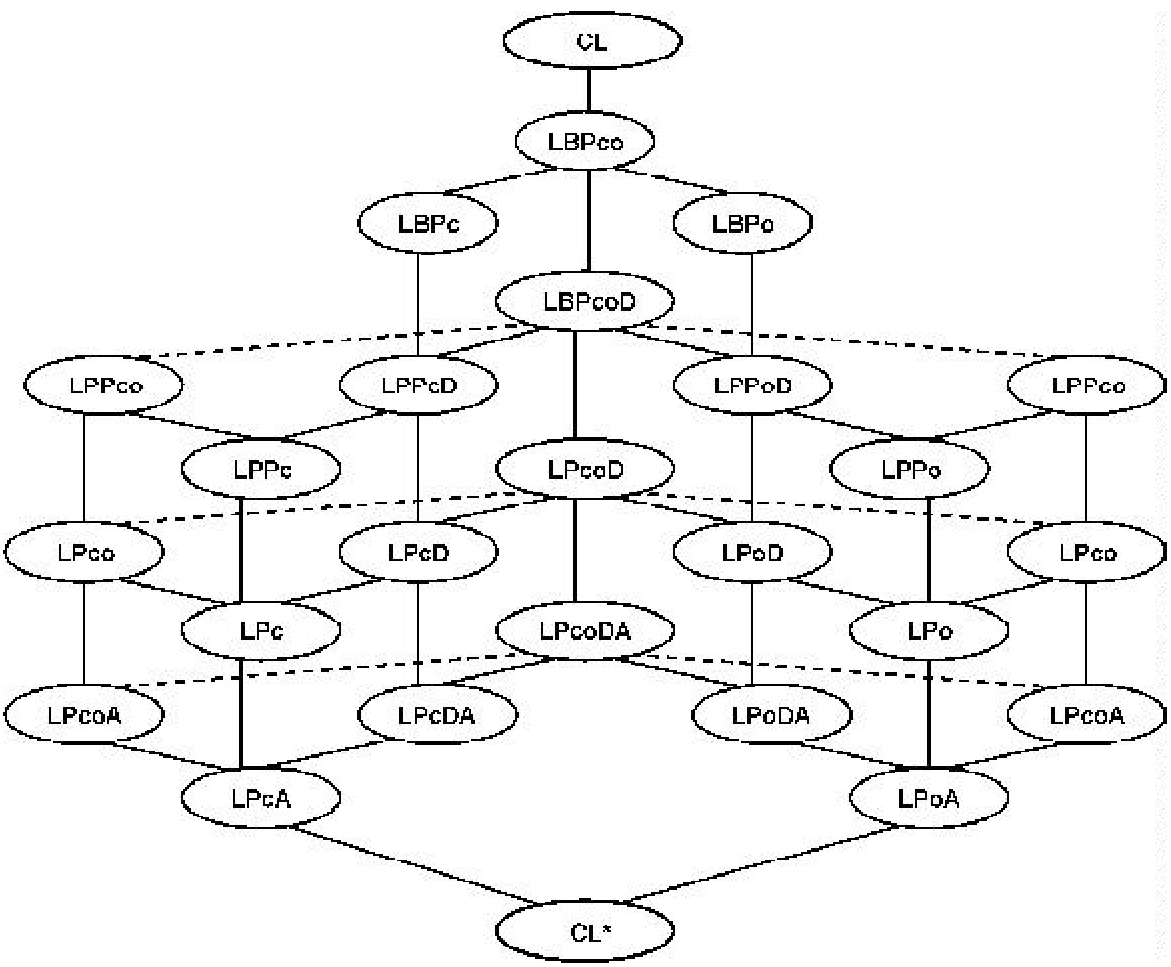
Ax 23. C$\neg$: $(\neg A)^{C}$, $\sim(\neg A) \to \neg(\neg A)$.

Ax 24. C$\sim$: $(\sim A)^{C}$, $\sim(\sim A) \to \neg(\sim A)$.

8. Retículo de contenencias

Los sistemas presentados en las secciones anteriores están organizados por la relación de inclusión, entre los conjuntos de consecuencias, de la siguiente manera (si una línea une dos nodos entonces, el conjunto de consecuencias del nodo superior está incluido en el conjunto de consecuencias del nodo inferior, no vale la inclusión recíproca): CL* es el sistema en el cual $\sim A \to \neg A$ para todo enunciado.

Figura 1. Retículo de contenencias



Conclusiones

El sistema *Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Clásica,* desde el punto de vista de la negación clásica captura todos los teoremas de la lógica clásica. Por otro lado, la negación débil puede verse como una generalización de la negación clásica, con la característica de detectar los requerimientos mínimos de completez e incompatibilidad, para las subfórmulas de un enunciado que, desde el punto de vista de la lógica clásica sería válido, se tiene así que el análisis de las inferencias que involucran el operador negación débil es mas fino.

La construcción de sistemas deductivos más fuertes que LBPco, es bastante natural. Puesto que no existen sistemas privilegiados, la costrucción de un sistema depende realmente de la aplicación que se tenga en mente.

Los sistemas presentados están caracterizados semánticamente utilizando una poderosa herramienta de inferencia visual llamada Árboles de forzamiento semántico, ver Sierra (2003).

Bibliografía

Alves, E (1976) Logic and Inconsistency, Thesis, USP, Brazil, 1976.

Anderson, A. and Belnap, N. (1975) Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Princeton: Princeton University Press. Vol. 1 (vol. 2, 1992).

Arruda, A.(1978) A survey of paraconsistent logic. In: A. I. Arruda, R. Chuaqui, and N. C. A. da Costa, editors, Mathematical Logic in Latin America: Proce-edings of the IV Latin American Symposium on Mathematical Logic, Chile, 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980.

Batens, D (1998) A survey of inconsistency-adaptive logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors. Frontiers in Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

Bobenrieth-Miserda, A (1996) Inconsistencias ¿Por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo.

Boolos, G. (1993) The Logic of Provability, Cambridge, England: Cambridge University Press.

Bueno, O. (1996) Truth, quasi-truth and paraconsistency. In: W. A. Carnielli, and I. M. L. D'Ottaviano, editors, Advances in Contemporary Logic and Computer Science: Proceedings of the XI Brazilian Conference of Mathematical Logic, Sal-vador, 1996. pp.275–293. Providence: American Mathematical Society, 1999.

Bunder, M (1984) Some definitions of negation leading to paraconsistent logics. Studia Logica, 43(1/2).

Carnielli, W. (1998) Possible-translations semantics for paraconsistent logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors. Frontiers in Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

Carnielli, W., Marcos, J. and de Amo, S. (1999) Formal inconsistency and evolutionary databases. To appear in : Logic and Logical Philosophy, (Proceedings of the Jaskowski's Memorial Symposium), 1999/2000.

Chellas, Brian (1980) Modal Logic: An Introduction, Cambridge, England: Cambridge University Press.

Da Costa, N.(1993). Inconsistent Formal Systems. Thesis, UFPR, Brazil, 1963. Curitiba: Editora UFPR.

Gabbay, D. (1976) Investigations in Modal and Tense Logics, Dordrecht: D. Reidel.

Goldblatt, Robert (1992) Logics of time and computation. Center for the Study of Language and Information.

Hilpinen, R. (1971) Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings. Dordrecht: D. Reidel.

Lewis, C.I. and Langford, C. H. (1932). Symbolic Logic, New York: Dover Publications, 1959.

Priest, G.(1987) In Contradiction. A Study of the Transconsistent. Dordrecht : Nijhoff.

Priest, G. and Routley, and J. Norman (editors) (1989). Paraconsistent Logic: essays on the inconsistent. Munich: Philosophia Verlag.

Rescher, N, and Urquhart, A. (1971) Temporal Logic, New York: Springer Verlag.

Sierra, M. (2001) Árboles de Forzamiento Semántico. Revista EAFIT. No 123. Medellín.

Sierra, M.(2001) Lógica Básica Paraconsistente Clásica. Memorias del VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Pasto, 2001.

Sierra, M.(2002) Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica. Revista EAFIT. No 126. Medellín.

Sierra, M.(2002). Inferencia Visual para la Lógica de la Vaguedad LBPcoC. Memorias del XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Bogotá.

Sierra, M.(2001) Inferencia Visual para las Lógicas Normales. Medellín: Fondo Editorial Universidad EAFIT.

Sierra, M.(2002) Inferencia Visual para los Sistemas Deductivos LBPco, LBPc y LBPo. Cuadernos de Investigación Universidad EAFIT, Medellín.

Sierra, M.(2003) Inferencia Visual para la lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta. Medellín:L MS-Print.