

Aplicación de un esquema 2-d en la solución de ondas de marea



Carlos Alejandro Escobar Sierra

MSc. en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Profesor del Departamento de Geología de la Universidad EAFIT.
carloses@eafit.edu.co

Mauricio Toro Botero

Doctor en Ingeniería de la Universidad de *Missisipi*. Profesor de la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.
fmtoro@perseus.unalmed.edu.co

Recepción: 16 de octubre de 2003 | Aceptación: 14 de febrero de 2003

Resumen

En este artículo se presenta un esquema numérico basado en el método de las diferencias finitas que permite construir una solución aproximada de las ecuaciones de aguas pandas en su presentación bidimensional completa y que considera en particular las aceleraciones de tipo convectivo en la conservación del *momentum* lineal.

Para la validación del modelo se presenta, inicialmente, una comparación de los campos de niveles obtenidos por el esquema numérico con soluciones analíticas linealizadas válidas en dominios de cálculo rectangulares. Luego se considera un caso teórico en el cual se introducen obstáculos al flujo, de tal forma que se pueda considerar el potencial del algoritmo de solución en la simulación hidrodinámica de flujos bidimensionales.

Palabras Claves

Simulación hidrodinámica /
Modelación numérica /
Ecuaciones de aguas pandas

Abstract

This paper presents a numerical scheme, based on finite difference discretizations, used for the approximate solution of the full 2D shallow water equations. The numerical scheme considers special treatment for the convective accelerations.

The validation of the numerical scheme and the developed computer program is done by comparing the numerical solution to the analytical solution of the linearized original equations developed for a rectangular bay. To show the potential of the model, this paper also presents a numerical solution for a case in which some obstacles are placed in the bay.

Key Words

Shallow water equations/
numerical scheme

Introducción



Para el estudio de zonas costeras en las cuales es posible considerar en forma aproximada que el movimiento del agua se debe principalmente a las ondas de marea que ingresan desde el mar abierto (Palacio-Mayerle-Toro, 2002) y a las corrientes fluviales que en éstas desembocan (Molinero-Pacheco, 1994), se presenta un esquema numérico que permite determinar el comportamiento del flujo en el transcurso del tiempo.

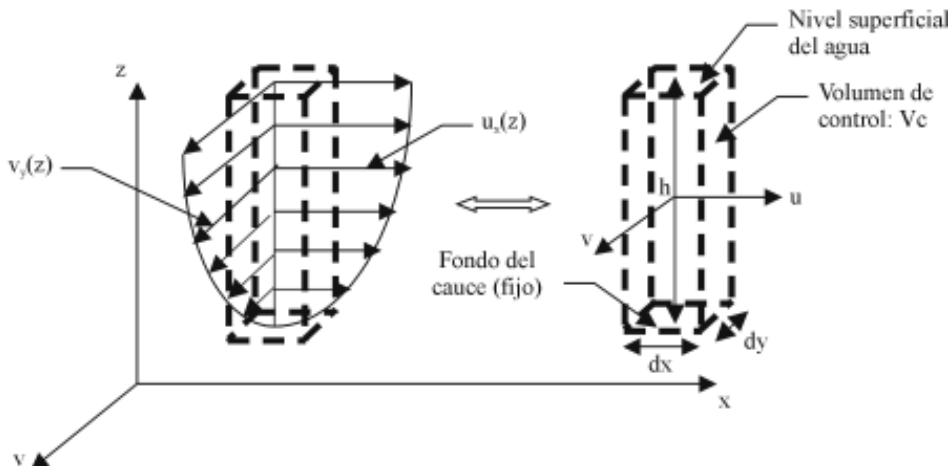
Al considerar este modelo numérico que describe las principales características hidráulicas del flujo se debe tener presente que fenómenos tales como el viento y variaciones en la densidad fueron despreciados, aunque se anota que en algunas situaciones particulares estos fenómenos llegan a ser considerables y pueden alterar el campo de flujo (Wang, 1979; Palacio, 2002) sin que esto pueda ser determinado por este modelo.

La descripción del flujo obtenida con este modelo permitirá determinar las corrientes principales en la zona de estudio por medio de los campos de profundidades y niveles, lo que posteriormente puede ser útil en diferentes áreas de estudio como la biología, calidad del agua, geomorfología, transporte de sedimentos, etc.

1. Formulación matemática

La modelación del flujo se lleva a cabo al integrar las ecuaciones de aguas pandas (1871) en su presentación bidimensional completa donde se considera un esquema para el manejo de las irregularidades del terreno que corresponde al presentado por Molinero et.al, 1992. El modelo desprecia el movimiento en la dirección vertical de tal modo que las velocidades u y v en las direcciones x y y respectivamente son integradas en la vertical para cada volumen de control.

Figura 1. Velocidades en el volumen de control integradas en la dirección vertical



Por consiguiente:

$$u = \frac{1}{h} \int_0^h u_x(z) dz \quad (1.a)$$

$$v = \frac{1}{h} \int_0^h v_y(z) dz \quad (1.b)$$

El modelo numérico que se presenta considera características globales y promedias del flujo; por consiguiente, los fenómenos debidos a la estructura interna del flujo (nivel micro) como los presentes en la capa límite y la estructura de la turbulencia sólo son considerados en forma general y aproximada por la ley de resistencia de Manning. Adicionalmente se asume que las aceleraciones en la dirección vertical (dirección antiparalela al campo gravitatorio) tienen una magnitud despreciable y por consiguiente se considera una distribución de presiones hidrostática.

Si se asume que la densidad es constante, el flujo bidimensional no permanente puede ser descrito por tres variables dependientes, que serían el nivel de la superficie libre del agua y las componentes de la velocidad en las direcciones x, y . Por consiguiente, para definir el flujo es necesario plantear tres ecuaciones independientes.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

De acuerdo con el principio de conservación de masa se tiene la anterior ecuación diferencial, donde x, y, t son las coordenadas espaciales y temporales respectivamente; h es la profundidad, q_x y q_y son caudales por unidad de ancho en las direcciones x, y , respectivamente.

Si se desprecia el esfuerzo ejercido por el viento en la superficie del agua se puede considerar que las fuerzas externas de gravedad, presión y fricción son dominantes en el tipo de flujo a simular (Hromadka-Yen, 1986) y por consiguiente se puede expresar el principio de conservación del momentum lineal mediante las dos ecuaciones escalares siguientes:

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + u \frac{\partial q_x}{\partial x} + v \frac{\partial q_x}{\partial y} + u \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + (gh - u^2) \frac{\partial h}{\partial x} - uv \frac{\partial h}{\partial y} + gh(C_f q_x - S_x) = 0 \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + u \frac{\partial q_y}{\partial x} + v \frac{\partial q_y}{\partial y} + v \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + (gh - v^2) \frac{\partial h}{\partial y} - uv \frac{\partial h}{\partial x} + gh(C_f q_y - S_y) = 0 \quad (3.b)$$

Donde u y v son las componentes de la velocidad promediadas en la vertical para las direcciones x, y respectivamente; g la aceleración de la gravedad; C_f coeficiente de fricción, S_x, S_y pendiente del fondo del terreno en la dirección x y y .

El término C_f relativo a la resistencia ofrecida por el terreno puede ser cuantificado por la fórmula empírica de resistencia de Manning para canales anchos.

$$C_f = \frac{(N^2 * |q_s|)}{h^{10/3}} \quad (4)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning y s es el subíndice que indica la dirección x o y , según el caso.

2. Discretización numérica

Las ecuaciones de aguas pandas en su presentación bidimensional completa se discretizan utilizando una aproximación en diferencias finitas, de la siguiente forma (Escobar et.al., 2001):

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}\right)^{n+1} + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)^{n+1} = 0 \quad (5.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_x^{n+1} - q_x^n}{\Delta t} + u^n \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}\right)^n + v^n \left(\frac{\partial q_x}{\partial y}\right)^n - u^{n+1} \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t}\right) + (gh - u^2)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{n+1} \\ - (uv)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^{n+1} + gh^n (C_f^n q_x^{n+1} - S_x) = 0 \end{aligned} \quad (5.b)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_y^{n+1} - q_y^n}{\Delta t} + u^n \left(\frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^n + v^n \left(\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)^n - v^{n+1} \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t}\right) + (gh - v^2)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^{n+1} \\ - (uv)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{n+1} + gh^n (C_f^n q_y^{n+1} - S_y) = 0 \end{aligned} \quad (5.c)$$

Los superíndices n y $n+1$ indican, respectivamente, las características del flujo evaluadas en el tiempo t y $t+\Delta t$, donde Δt es el intervalo temporal de cálculo. De esta discretización se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales linealizado, en el cual algunas incógnitas (aquellas con el superíndice " $n+1$ ") están multiplicadas por variables conocidas que fueron halladas en el tiempo anterior (superíndice " n ").

La discretización espacial, utilizada para el cálculo de las derivadas, se obtiene mediante dos mallas superpuestas, tal como se muestra en la figura 2, donde la malla continua permite determinar el caudal sobre los lados de las celdas (malla principal) y la malla en líneas discontinuas permite determinar la profundidad del flujo en el centro de las celdas (malla secundaria).

El sistema de ecuaciones diferenciales (5) se resuelve numéricamente mediante un procedimiento iterativo basado en la anulación del residuo, tal como se indicará más adelante. La ecuación que resuelve el sistema vincula el nivel de una celda en particular con el nivel de las cuatro

celdas adyacentes y con el caudal que pasa a través de los cuatro lados de las celdas.

Considerando “n” como el valor en el tiempo anterior y “p” el valor en la iteración p-ésima se tiene que las ecuaciones (5.b) y (5.c) se reescriben como:

$$\begin{aligned} \frac{q_x^p - q_x^n}{\Delta t} + u^n \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^n + v^n \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \right)^n - u^p \left(\frac{h^p - h^n}{\Delta t} \right) + (gh - u^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p \\ - (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p + gh^n (C_f^n q_x^p - S_x) = 0 \end{aligned} \quad (6.b)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_y^p - q_y^n}{\Delta t} + u^n \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^n + v^n \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^n - v^p \left(\frac{h^p - h^n}{\Delta t} \right) + (gh - v^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p \\ - (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p + gh^n (C_f^n q_y^p - S_y) = 0 \end{aligned} \quad (6.c)$$

Si se despeja de estas ecuaciones en forma explícita el caudal por unidad de ancho en las direcciones x y y respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} q_x^p = \frac{\Delta t}{1 + gh^n C_f^n \Delta t} * \left[\frac{q_x^n}{\Delta t} - u^n \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^n - v^n \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \right)^n + gh^n S_x \right] \\ + \frac{\Delta t}{1 + gh^n C_f^n \Delta t} \left[u^p \left(\frac{h^p - h^n}{\Delta t} \right) - (gh - u^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p + (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p \right] \end{aligned} \quad (7.a)$$

$$\begin{aligned} q_y^p = \frac{\Delta t}{1 + gh^n C_f^n \Delta t} * \left[\frac{q_y^n}{\Delta t} - u^n \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^n - v^n \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^n + gh^n S_y \right] \\ + \frac{\Delta t}{1 + gh^n C_f^n \Delta t} \left[v^p \left(\frac{h^p - h^n}{\Delta t} \right) - (gh - v^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p + (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p \right] \end{aligned} \quad (7.b)$$

Donde u^p , v^p y h^p son valores tentativos que inicialmente se suponen iguales a los hallados en el paso temporal precedente.

Ahora sustituyendo el valor hallado de q^p utilizando los valores tentativos de u^p , v^p y h^p en la ecuación de conservación de la masa se obtiene la ecuación que resuelve el sistema para las profundidades “h”, de tal forma que se anule el residuo R^t :

$$\frac{h^p - h^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^p + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^p = R^t \quad (8)$$

El siguiente diagrama de flujo se aplica en el código de cálculo, en el cual se considera que el dominio de cálculo está discretizado por celdas

de igual tamaño de las cuales se conoce el coeficiente de Manning y su cota:

- (1) Se define la profundidad y el caudal a través de los cuatro lados de cada una de las celdas para el tiempo inicial.
- (2) Se calculan las velocidades en los lados de las celdas, de acuerdo con la información obtenida en el paso 1.
- (3) Usando las ecuaciones (7.a) y (7.b) se estiman los caudales a través de los lados de las celdas para el tiempo siguiente ($t+\Delta t$) en forma explícita, por lo tanto se asumen unos valores tentativos (los del tiempo inmediatamente anterior) para la profundidad h y para la velocidad u y v en las direcciones x y y . Estos valores serán corregidos posteriormente en el proceso iterativo.
- (4) Reemplazando los caudales determinados en el paso (3) en la ecuación (8) se resuelve el sistema para las profundidades h .

Este sistema se resuelve utilizando el método ADI, con el cual se halla la solución en cada intervalo de tiempo para cada una de las filas y luego para cada columna.

- (5) Se verifica si hay convergencia entre las soluciones a las profundidades " h " halladas por filas y por columnas. Si las soluciones no coinciden se regresa al paso 3, de lo contrario se determina la profundidad para el siguiente tiempo.

3. Aplicación en casos teóricos

Debido a la dificultad para obtener mediciones de la profundidad del agua y la velocidad en la totalidad del dominio espacial y temporal de cálculo, las soluciones analíticas para la propagación de ondas en bahías publicadas en la literatura científica (Lynch-Gray, 1978; Rahman, 1983; Lynch-Officer, 1985) adquieren una gran importancia en la validación de los distintos tipos de aproximaciones numéricas.

Se presentan a continuación unos ejemplos de aplicación del modelo que forman parte del proceso de validación.

3.1 Onda de marea en bahía rectangular

A continuación se presenta la solución analítica y numérica a la propagación unidimensional de una onda en una bahía rectangular, con un extremo abierto en el cual se aplica la condición de frontera deseada (Solución analítica Lynch-Gray, 1978).

Se considera una bahía cuadrada de 100 km de lado con fondo horizontal, que presenta las siguientes características:

Nivel medio del agua en el dominio: $H_o = 4\text{m}$.

Nivel en la frontera abierta: $H = H_o + a \cos(\omega t)$.

Amplitud: $a = 0.15\text{ m}$

Variable temporal: t

Frecuencia: $\omega = 2\pi/T$

Periodo: $T = 15988\text{ s}$ (Definido de tal forma que se evite la reflexión de la onda).

La solución numérica y analítica del caso expuesto se presentan a continuación, de tal forma que se pueda apreciar el ajuste entre los dos tipos de solución.

El ajuste entre la solución numérica y la analítica es buena para cualquier posición en el dominio de cálculo, pero sólo se presentan los niveles en las posiciones correspondientes a las abscisas 53 Km y 63 km (figuras 4 y 5). Además se presenta el perfil de la superficie de agua en una dirección perpendicular a la frontera abierta (dirección x), el cual es invariable con respecto al eje y (Figura 6).

En el caso anterior se hizo un análisis de sensibilidad con respecto al tamaño de las celdas y al intervalo temporal de cálculo. De acuerdo con este estudio, se pudo observar que al incrementar el tamaño de la celda se afecta gradualmente la precisión del ajuste con respecto a la solución analítica. Con respecto al intervalo temporal se detectó que éste debe permanecer por debajo de 1.2 veces al correspondiente a la condición de Courant, de lo contrario se presenta inestabilidad en el esquema numérico.

Figura 2. Esquema de malla alternada para la solución del sistema

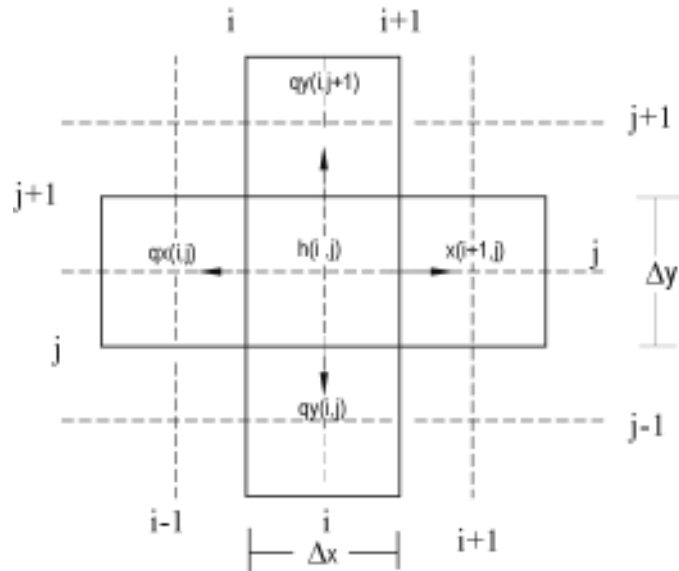


Figura 3. Vista en planta y perfil del dominio de cálculo

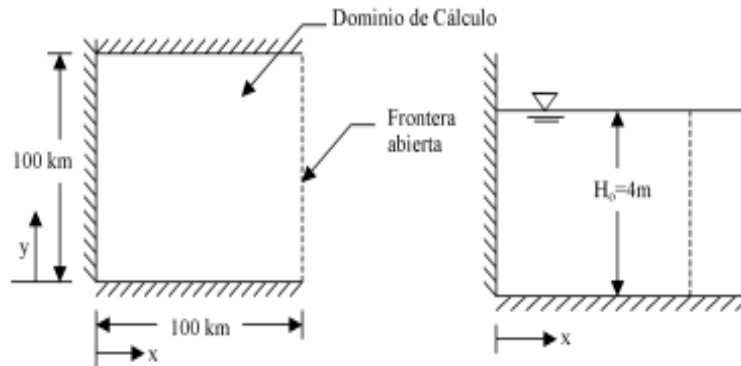


Figura 4. Onda de marea en la abscisa x=53 km.

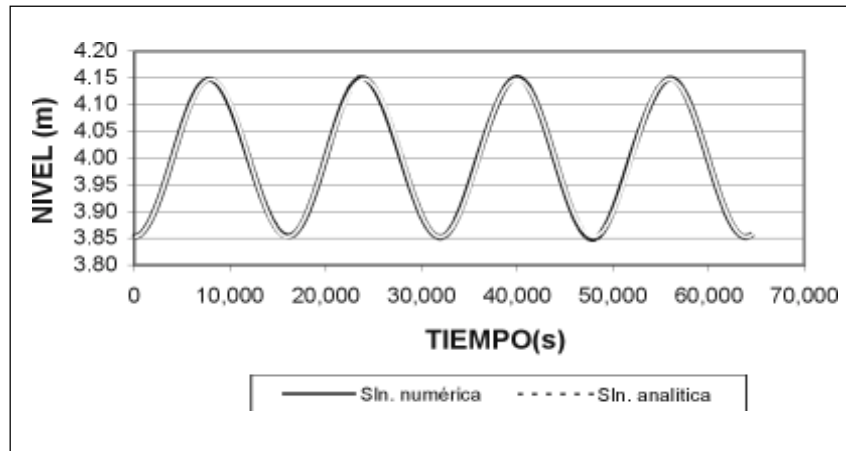


Figura 5. Onda de marea en la abscisa $x=63$ km.

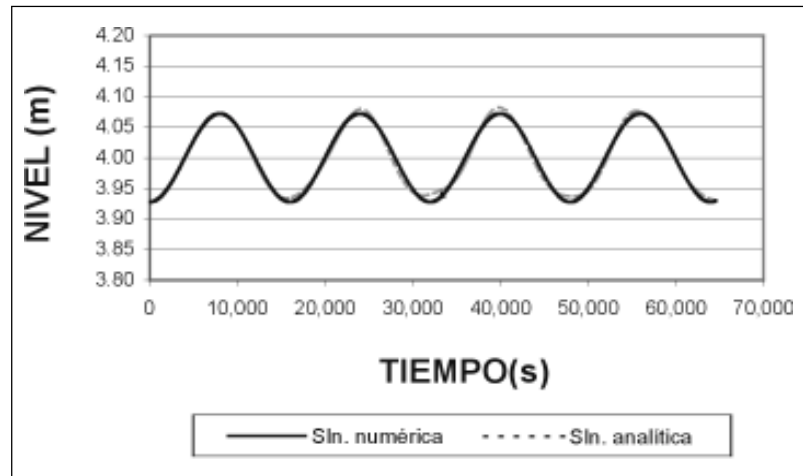


Figura 6. Perfil de la onda en la dirección x

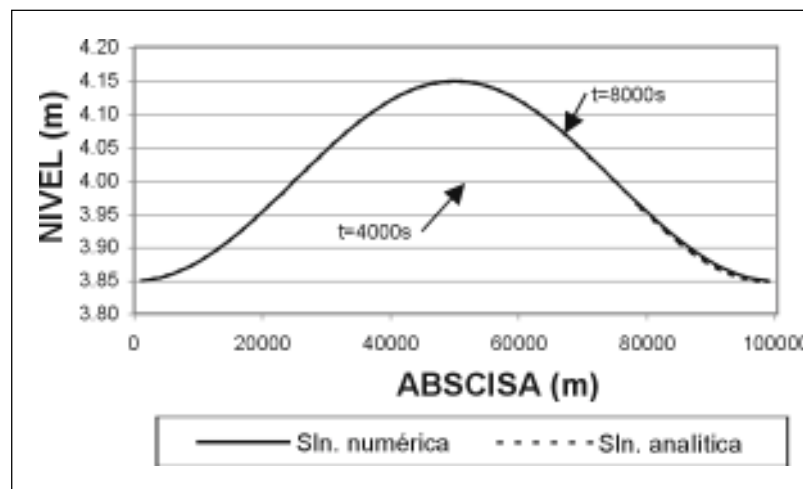
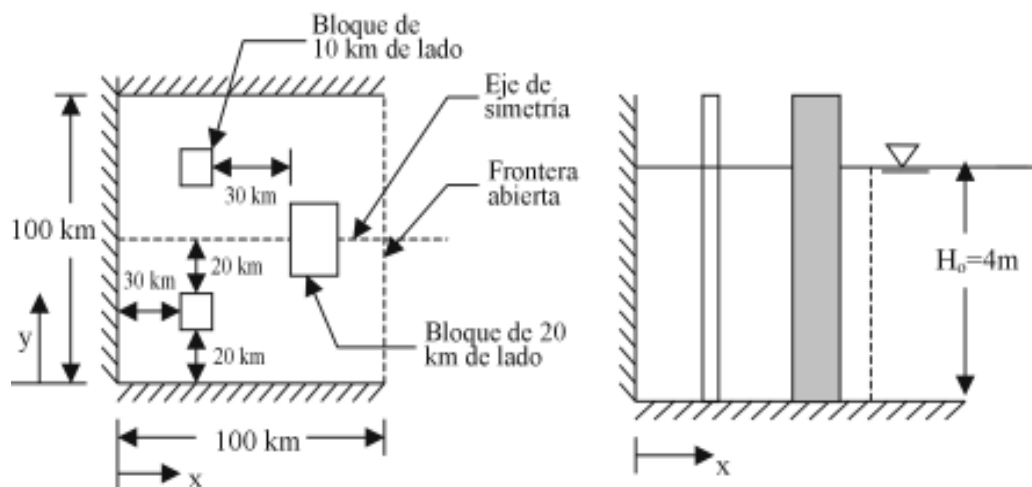


Figura 7. Vista en planta y transversal a lo largo del eje de simetría del dominio de cálculo



Aunque no se presentan los resultados, fueron realizadas diferentes pruebas en las cuales se cambiaron el tamaño del dominio de cálculo, la localización de la frontera abierta, la amplitud y frecuencia de la onda, y también se obtuvieron buenos ajustes con respecto a la solución analítica, pero siempre y cuando las relaciones a/H_0 y a/λ (λ es la longitud de la onda) fueron pequeñas de tal forma que se estén considerando ondas largas y aceleraciones verticales despreciables.

3.2 Onda de marea en bahías con obstáculos al flujo

Se considera una bahía cuadrada de 100 km de lado con fondo horizontal, que presenta las siguientes características:

Nivel medio del agua en el dominio: $H_0 = 4m$.

Nivel en la frontera abierta: $H = H_0 + a \cos(\omega t)$.

Amplitud: $a = 0.15 m$ Variable temporal: t

Frecuencia: $\omega = 2\pi/T$ Período: $T = 15988 s$

A la cual se le ubicaron unos obstáculos con forma de bloques cuadrados en el interior del dominio de cálculo con el fin de forzar el movimiento bidimensional del flujo en la simulación.

Se presenta a continuación el campo de velocidades del flujo para dos instantes de tiempo diferentes, en los cuales se puede apreciar la simetría de la solución con respecto al eje central del dominio de cálculo en la dirección x.

Figura 8: Campo de velocidades en el tiempo $t=7500s$.

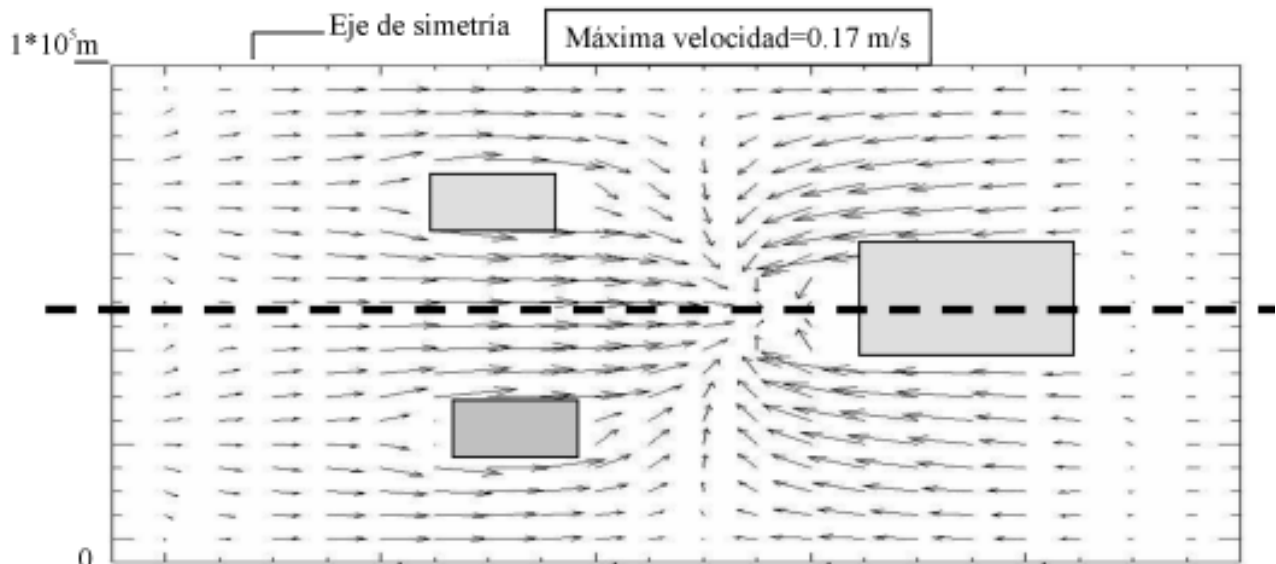
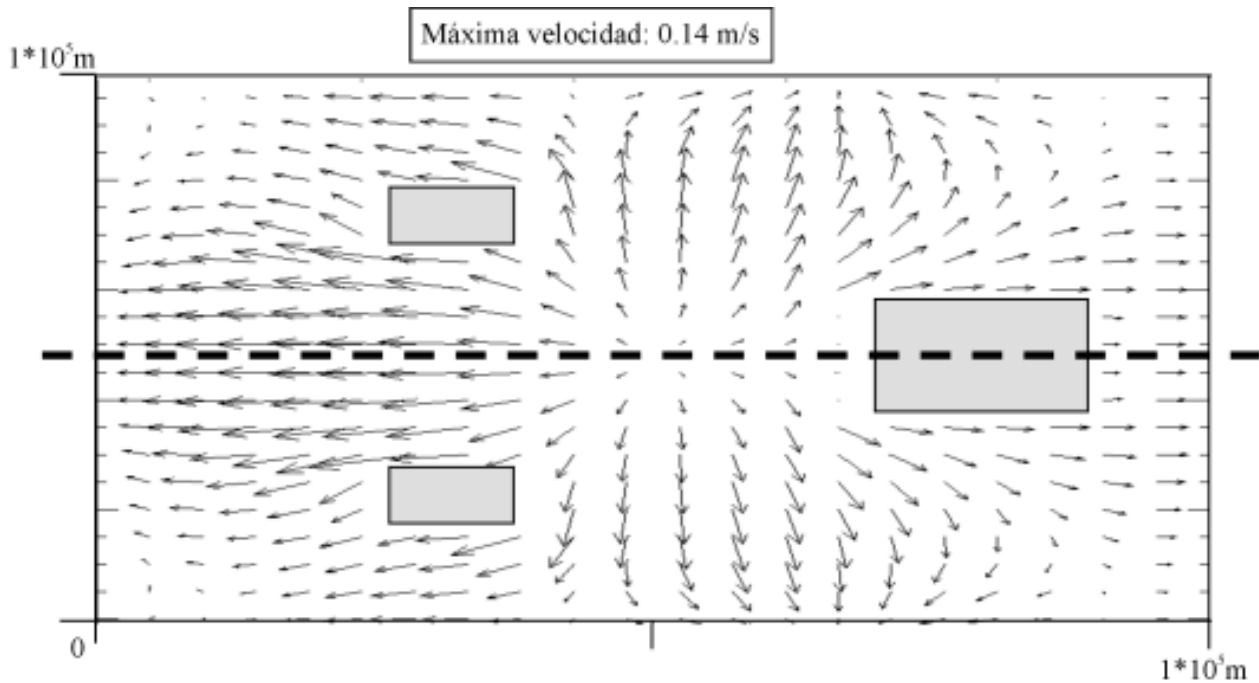


Figura 9. Campo de velocidades en el tiempo $t=16000s$.

Conclusiones

Se presentó un modelo matemático bidimensional y su solución aproximada que permite hacer simulaciones hidrodinámicas en zonas costeras y corrientes fluviales con un buen grado de confiabilidad, siempre y cuando las suposiciones básicas del flujo no permanente, tales como: aceleraciones verticales despreciables, variación espacio-temporal gradual de las variables hidráulicas y movimiento de todo el cuerpo de agua en la sección transversal al paso de la onda, sean cumplidas.

La solución numérica muestra un buen ajuste a la solución analítica presentada por Lynch – Gray en dominios de cálculo rectangulares y fondo horizontal. Se hace la precisión acerca de la omisión de las aceleraciones de tipo convectivo en la solución analítica y por consiguiente sólo se compararon los casos en los cuales estos términos no son significativos, e.g. bajas velocidades y topografía regular.

Con el fin de verificar el potencial del esquema numérico en casos bidimensionales, se hicieron simulaciones en las cuales se localizaron obstáculos al flujo en el dominio de cálculo de tal forma que se obtuvieran soluciones simétricas con respecto a un eje del dominio. Al no contar con una solución analítica en estos casos, se procedió a verificar la simetría y la conservación de la masa (comparación volumétrica del agua en distintos tiempos en el dominio) en la solución numérica durante la simulación, obteniéndose los resultados esperados.

Bibliografía

Escobar, C.; Toro, M.; Pacheco, R., (2001). "Un modelo de propagación bidimensional de ondas basado en las ecuaciones de aguas profundas". *Avances en Recursos Hídricos*, 6.

Hromadka, T., and Yen, C. (1986). "A diffusion hydrodynamic model (DHM)." *Advances in Water Resources*, 9.

Lynch, D., and Gray, W. (1978). "Analytic solutions for computer flow model testing". *J. Hydr. Division.*, ASCE, No. HY10, proc. Paper 14105.

Lynch, D., Officer, C. (1985). "Analytic test cases for three-dimensional hydrodynamic models." *J. For Numerical Methods in Fluids*, 5.

Molinaro, P., Pacheco, R. (1994). "Sul calcolo della portata transitante attraverso singolarità presenti in un alveo naturale". Relazione ENEL – CRIS n 4840.

Molinaro, P., Di Filippo, A., Ferrari, F. (1992). "Un modello matematico per la simulazione delle inondazioni di vaste aree a topografia complessa. Aspetti teorici, informatici e applicativi. Relazione ENEL – CRIS n 4514.

Palacio, C., Mayerle, R., Toro, M. (2002). "Análisis de mareas en la bahía de Meldorf del mar del norte alemán » . XV Seminario Nacional de Hidráulica e Hidrología, Medellín.

Palacio, C.; Mayerle, R.; Toro, M. (2002). "Modelo anidado de gran escala para simular tormentas en el mar del norte. XV Seminario Nacional de Hidráulica e Hidrología, Medellín

Rahman, M. (1983). "Analytical solutions for tidal propagation in a rectangular basin ." *Advances in Water Resources*, 6.

Wang, D. (1979). "Wind-driven circulation in the Chesapeake Bay, winter 1975." *J. Phys. Oceanogr.*, 9.