Forzamiento Semántico de Marcas

para la Lógica Básica Paraconsistente - LBPc

Manuel Sierra Aristizábal

Fecha de recepción: 20 de abril de 2002   Fecha de aprobación: 16 de julio de 2002

RESUMEN

El forzamiento semántico de marcas para el sistema de Lógica Básica Paraconsistente, LBPc, se obtiene a partir del forzamiento semántico de marcas clásico agregando un nuevo operador llamado negación débil, las reglas de inferencia para esta negación indican que la negación débil se sigue de la negación usual, pero sólo en casos particulares vale la reciproca. El sistema resultante soporta contradicciones débiles, es decir, sirve de base para el estudio de teorías inconsistentes pero no triviales.

ABSTRACT

The semantic forcing of marks for the Basic Paraconsistent Logic system, LBPc, is obtained from the semantic forcing of marks for the classical logic, adding a new operator called weak negation. The inference rules for this negation indicate that the weak negation comes from the usual negation, but only in particular cases the reverse is valid. The resulting system supports weak contradictions and serves as a basis for the study of inconsistent theories but non-trivial.

PALABRAS CLAVE

Lógica paraconsistente / Negación débil / Semántica / Contradicción / Teoría trivial.

KEY WORDS

Paraconsistent logic / Weak negation / Semantic / Contradiction / Trivial theory.

MANUEL SIERRA ARISTIZÁBAL

(Colombia). Magister en matemáticas. Actualmente se desempeña como Profesor del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad EAFIT.

msierra@eafit.edu.co

REVISTA Universidad EAFIT No. 130 | abril.mayo.junio | 2003

INTRODUCCIÓN

Se presenta el sistema de inferencia "Forzamiento semántico de marcas para el sistema de Lógica Básica Paraconsistente". En la lógica resultante los enunciados pueden ser clasificados en 3 grupos: a) aceptados (A), b) débilmente negados, aparentemente falsos o cuestionables (¬A), c) fuertemente negados, rechazados o absolutamente falsos (∼A). El sistema permite que un enunciado sea aceptado y cuestionado, A∧¬A. El sistema no permite que: a) un enunciado absolutamente falso no sea cuestionado, ∼(∼A∧∼¬A), b) un enunciado rechazado sea aceptado, ∼(∼A∧A), c) un enunciado no rechazado no sea aceptado, ∼(∼∼A∧∼A).

En las secciones 1.1 a 1.6 se presenta el forzamiento semántico de marcas[1] clásico, se dan las reglas de inferencia para cada conectivo clásico[2], mostrando cuales de ellas son primitivas y cuales son derivadas, también se establece la equivalencia de estas reglas con el cálculo proposicional clásico y en la sección 1.7 se ilustra su funcionamiento con la prueba de importantes teoremas que involucran el operador negación clásica. En la sección 2.1 se presentan las reglas de inferencia para la negación débil y el operador incompatibilidad[3] mostrando cuales de ellas son primitivas y cuales son derivadas, en la sección 2.2 se ilustra su funcionamiento con la prueba de teoremas que involucran la negación débil. En la sección 3.1 se presenta el sistema *lógica positiva paraconsistente* LPPc y en la sección 3.2 el sistema *lógica paraconsistente* LPc.

1. FORZAMIENTO SEMÁNTICO DE MARCAS CLÁSICO

1.1 Construcción de enunciados

Enunciados atómicos: A, B, C, ...

Enunciados compuestos: generados a partir de los atómicos utilizando los conectivos binarios ∧, ∨, →, ↔ y el conectivo unario ∼.

1.2 Marcas

Se supone la existencia de un conjunto con al menos dos elementos[4], uno de los cuales es **"1",** a los elementos de este conjunto los llamamos marcas.

Si A es un enunciado arbitrario y m es una marca, **A=m** significa que **A está marcado con m. A=0** significa que la marca de A no es 1.

Cuando A es un enunciado y A1, ..., An son los enunciados que figuran en A, el proceso para determinar que marcas de A1, ..., An hacen que A no este marcado con 1, o la imposibilidad de esto, es llamado **Forzamiento semántico de marcas,** y está determinado por un conjunto de reglas de inferencia llamadas **reglas de inferencia para el forzamiento de marcas.** Cuando se inicia este proceso para un enunciado A, se dice que A es la **Raíz** del proceso.

1.3 Forzamiento semántico de marcas

El forzamiento semántico de marcas se genera utilizando las siguientes **reglas de inferencia para el forzamiento de marcas**[5]**:**

1.3.1 Regla básica

FR (Falsedad de la Raíz). Donde R es la raíz del proceso. R = 0

1.3.2 Reglas para el condicional →

AIA→ (Afirmación a la Izquierda, Afirmación del Condicional): A=1 y A→B=1 ⇒ [6] B=1.

1 Las marcas indican si un enunciado es plenamente aceptado o no, es decir, si se toma como verdadero o como falso.

2 Los *conectivos clásicos* son la conjunción ∧, la disyunción ∨, el condicional →, el bicondicional ↔ y la negación ∼

3 De manera precisa es la incompatibilidad de un enunciado con su negación débil.

4 Es suficiente con dos elementos, 1 para verdadero y 0 para falso.

5 Intuitivamente un enunciado marcado con 1 afirma el enunciado, un enunciado no marcado con 1 niega el enunciado.

6 es un símbolo de un metalenguaje cuya lógica es clásica.

FDA→ (Falsedad a la Derecha, Afirmación de Condicional): B=0 y A→B=1 ⇒ A=0.

F→ (Falsedad del Condicional): A→B=0 ⇒ A=1 y B=0.

FI→ (Falsedad a la Izquierda en un Condicional): A=0 ⇒ A→B=1.

AD→ (Afirmación a la Derecha en un Condicional): B=1 ⇒ A→B=1.

FDAI→ (Falsedad a la Derecha, Afirmación a la Izquierda en un Condicional): A=1 y B=0 ⇒ A→B=0.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **FI→, AD→ y FDAI→**, ya que las otras 3 reglas son derivadas de estas:

En AIA→ no puede inferirse marca 0 a la derecha, ya que por FDAI→ se tendría el condicional marcado con 0 y este no es el caso.

En FDA→ no puede inferirse marca 1 a la izquierda, ya que por FDAI→ se tendría el condicional marcado con 0 y este no es el caso.

En F→ no puede inferirse 0 a la izquierda, ya que por FI→ se tendría el condicional marcado con 1 y este no es el caso, tampoco puede inferirse 1 a la derecha, ya que por AD→ se tendría el condicional marcado con 1 y este no es el caso.

1.3.3 Reglas para la conjunción ∧

A∧ (Afirmación de la Conjunción): A∧B=1 ⇒ A=1 y B=1.

AIAD∧ (Afirmación a la Izquierda, Afirmación a la Derecha en la Conjunción): A=1 y B=1 ⇒ A∧B=1.

AIF∧ (Afirmación Izquierda, Falsedad de la Conjunción): A=1 y A∧B=0 ⇒ B=0.

ADF∧ (Afirmación Derecha, Falsedad de la Conjunción): B=1 y A∧B=0 ⇒ A=0.

FI∧ (Falsedad a la Izquierda en la Conjunción): A=0 ⇒ A∧B=0.

FD∧ (Falsedad a la Derecha en la Conjunción): B=0 ⇒ A∧B=0.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **A∧** y **AIAD∧**, ya que las otras 4 reglas son derivadas de éstas:

En AIF∧ no puede inferirse marca 1 a la derecha, ya que por AIAD∧ se tendría la conjunción marcada con 1 y este no es el caso.

En ADF∧ no puede inferirse marca 1 a la izquierda, ya que por AIAD∧ se tendría la conjunción marcada con 1 y este no es el caso.

En FI∧ no puede inferirse 1 en la conjunción, ya que por A∧ se tendría marcado con 1 a la izquierda y este no es el caso.

En FD∧ no puede inferirse 1 en la conjunción, ya que por A∧ se tendría marcado con 1 a la derecha y este no es el caso.

1.3.4 Reglas para la disyunción ∨

F∨ (Falsedad de la Disyunción): A∨B=0 ⇒ A=0 y B=0.

FDFI∨ (Falsedad a la Derecha, Falsedad a la Izquierda de una Disyunción): A=0 y B=0 ⇒ A∨B=0.

AD∨ (Afirmación a la Derecha de una Disyunción): B=1 ⇒ A∨B=1.

AI∨ (Afirmación a la Izquierda de una Disyunción): A=1 ⇒ A∨B=1.

FIA∨ (Falsedad a la izquierda, Afirmación de la Disyunción): A=0 y A∨B=1 ⇒ B=1.

FDA∨ (Falsedad a la Derecha, Afirmación de la Disyunción): B=0 y A∨B=1 ⇒ A=1.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **F∨** y **FDFI∨**, ya que las otras 4 reglas son derivadas de éstas:

En AD∨ no puede inferirse marca 0 en la disyunción, ya que por F∨ se tendría la marca 0 a la derecha y éste no es el caso.

En AI∨ no puede inferirse marca 0 en la disyunción, ya que por F∨ se tendría la marca 0 a la izquierda y este no es el caso.

En FIA∨ no puede inferirse marca 0 a la derecha, ya que por FDFI∨ se tendría la disyunción marcada con 0 y este no es el caso.

En FDA∨ no puede inferirse marca 0 a la izquierda, ya que por FDFI∨ se tendría la disyunción marcada con 0 y este no es el caso.

1.3.5 Reglas para ↔

ADAI↔ (Afirmación a la Derecha, Afirmación a la Izquierda en un Bicondicional): $B=1$ y $A=1 \Rightarrow A \leftrightarrow B=1$.

FDFI↔ (Falsedad a la Derecha, Falsedad a la Izquierda en un Bicondicional): $B=0$ y $A=0 \Rightarrow A \leftrightarrow B=1$.

AIFD↔ (Afirmación a la Izquierda, Falsedad a la Derecha en un Bicondicional): $B=0$ y $A=1 \Rightarrow A \leftrightarrow B=0$.

FIAD↔ (Falsedad a la Izquierda, Afirmación a la Derecha en un Bicondicional): $B=1$ y $A=0 \Rightarrow A \leftrightarrow B=0$.

AIA↔ (Afirmación a la Izquierda, Afirmación del Bicondicional): $A=1$ y $A \leftrightarrow B=1 \Rightarrow B=1$.

FIF↔ (Falsedad a la Izquierda, Falsedad del Bicondicional): $A=0$ y $A \leftrightarrow B=0 \Rightarrow B=1$.

FIA↔ (Falsedad a la Izquierda, Afirmación del Bicondicional): $A=0$ y $A \leftrightarrow B=1 \Rightarrow B=0$.

AIF↔ (Afirmación a la Izquierda, Falsedad del Bicondicional): $A=1$ y $A \leftrightarrow B=0 \Rightarrow B=0$.

ADA↔ (Afirmación a la Derecha, Afirmación del Bicondicional): $B=1$ y $A \leftrightarrow B=1 \Rightarrow A=1$.

FDF↔ (Falsedad a la Derecha, Falsedad del Bicondicional): $B=0$ y $A \leftrightarrow B=0 \Rightarrow A=1$.

FDA↔ (Falsedad a la Derecha, Afirmación del Bicondicional): $B=0$ y $A \leftrightarrow B=1 \Rightarrow A=0$.

ADF↔ (Afirmación a la Derecha, Falsedad del Bicondicional): $B=1$ y $A \leftrightarrow B=0 \Rightarrow A=0$.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **ADAI↔**, **FDFI↔**, **AIFD↔** y **FIAD↔**, ya que las otras 8 reglas son derivadas de estas:

En AIA↔ no puede inferirse marca 0 a la derecha, ya que por AIFD↔ se tendría la marca 0 en el bicondicional y este no es el caso.

En FIF↔ no puede inferirse marca 0 en la derecha, ya que por FDFI↔ se tendría la marca 1 en la equivalencia y este no es el caso.

En FIA↔ no puede inferirse marca 1 a la derecha, ya que por AIFD↔ se tendría la equivalencia marcada con 0 y este no es el caso.

En AIF↔ no puede inferirse marca 1 a la derecha, ya que por ADAI↔ se tendría la equivalencia marcada con 1 y este no es el caso.

En ADA↔ no puede inferirse marca 0 a la izquierda, ya que por FIAD↔ se tendría la equivalencia marcada con 0 y este no es el caso.

En FDF↔ no puede inferirse marca 0 a la izquierda, ya que por FDFI↔ se tendría la equivalencia marcada con 1 y este no es el caso.

En FDA↔ no puede inferirse marca 1 a la izquierda, ya que por AIFD↔ se tendría la equivalencia marcada con 0 y este no es el caso.

En ADF↔ no puede inferirse marca 1 a la izquierda, ya que por ADAI↔ se tendría la equivalencia marcada con 1 y este no es el caso.

1.3.6 Reglas para la negación clásica ~

A~ (Afirmación de la Negación): $\sim A=1 \Rightarrow A=0$.

FA~ (Falsedad del Alcance de la Negación): $A=0 \Rightarrow \sim A=1$.

F~ (Falsedad de la Negación): $\sim A=0 \Rightarrow A=1$.

AA~ (Afirmación del Alcance de la Negación): $A=1 \Rightarrow \sim A=0$.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **A~** y **FA~**, ya que las otras 2 reglas son derivadas de éstas:

En F~ no puede inferirse marca 0 en el alcance de la negación, ya que por FA~ se tendría la marca 1 en la negación y este no es el caso.

En AA~ no puede inferirse marca 1 en la negación, ya que por A~ se tendría la marca 0 en el alcance de la negación y este no es el caso.

1.4 Tipos de Enunciados

1.4.1 Enunciados bien marcados

Un **enunciado** A está **bien marcado (EBM)** si todos los enunciados atómicos y compuestos que figuran en A están marcados y no existe **doble marca** (no existe un mismo enunciado con distinta marca).

1.4.2 Enunciados mal marcados

Un **enunciado** A está **mal marcado (EMM)** si no está bien marcado, es decir, si existe enunciado que figura en A con doble marca.

1.4.3 Doble marca

DM (Doble Marca): B=1 y B=0 ⇒ EMM.

1.5 Teorema de opciones en el forzamiento

Sea B, un enunciado que figura en A, sin marcar:

1.5.1 **OADM** (Opción Afirmativa con Doble Marca)[7]: [Opción B=1 ⇒ C=1 y C=0] ⇒ B=0.

1.5.2 **OFDM** (Opción Falsa con Doble Marca): [Opción B=0 ⇒ C=1 y C=0] ⇒ B=1.

1.5.3 **OAOFDM** (Opción Afirmativa y Opción Falsa con Doble Marca): [Opción B=1 ⇒ C=1 y C=0] y [Opción B=0 ⇒ D=1 y D=0] ⇒ EMM.

1.5.4 [Opción B=1 ⇒ EBM] ⇒ B=1.

1.5.5 [Opción B=0 ⇒ EBM] ⇒ B=0.

Este teorema nos permite tomar opciones cuando es imposible aplicar las reglas de inferencia para el forzamiento y el proceso de marcar está incompleto (opción 1: B marcado con 1, opción 2: B marcado con 0). Este procedimiento se generaliza de manera natural si es necesario tomar opciones sobre otros enunciados diferentes.

1.6 Teorema de completitud

Podemos verificar que dado un sistema de deductivo para el cálculo proposicional clásico, todos sus axiomas están mal marcados y también podemos verificar que las reglas de forzamiento preservan la verdad, también se tiene que si un enunciado está mal marcado entonces es un teorema[8], es decir, sólo generan enunciados que se siguen lógicamente de las premisas, lo cual significa, que si un enunciado no es un teorema entonces este enunciado está bien marcado, podemos así concluir que: Un enunciado es válido[9] si y solamente si el forzamiento clásico de marcas del enunciado genera un enunciado mal marcado, es decir, un enunciado es inválido[10] si y solamente si el forzamiento clásico de las marcas del enunciado genera un enunciado bien marcado.

7 Intuitivamente: si al suponer que un enunciado B es aceptado se infiere la existencia de algún enunciado C, el cual es a la vez aceptado y no aceptado, entonces el enunciado B no es aceptado.

8 Para ello basta notar que las reglas de forzamiento pueden ser interpretadas como teoremas de la lógica clásica, utilizando una traducción T tal que: $T(A \Rightarrow B)=T(A) \rightarrow T(B)$, $T(A \text{ y } B)=T(A) \wedge T(B)$, $T(A \text{ o } B)=T(A) \vee T(B)$. Observar que la regla falsedad de la raíz FR en combinación con la regla doble marca DM, simulan el método de reducción al absurdo de la lógica clásica.

9 Un enunciado, es *Válido* si y solamente si no existe una asignación de valores de verdad que lo refute. Un enunciado, es un *Teorema* si y solamente si puede ser obtenido a partir de los axiomas utilizando reglas de inferencia. Un teorema de completitud para la Lógica de enunciados dice que un enunciado, es válido si y solamente si es un teorema. Por lo que se puede concluir que un enunciado, es un teorema si y solamente si está mal marcado.

10 Un enunciado, es *Inválido* si y solamente si existe una asignación de valores de verdad que lo refute.

Si el forzamiento clásico de las marcas de un enunciado genera un enunciado bien marcado, la interpretación de las marcas de los enunciados atómicos que figuran en el enunciado nos proporciona una asignación de valores de verdad que refuta el enunciado. Podemos concluir que el forzamiento clásico de las marcas de un enunciado nos proporciona un método de decisión para el cálculo proposicional clásico.

1.7 Algunos teoremas importantes

1.7.1 Principio de Trivialización

$\models \sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Este resultado indica que la lógica clásica no soporta contradicciones, es decir: de un enunciado y su negación se puede deducir cualquier otro enunciado (el sistema se trivializa)[12], por lo que la lógica clásica no sirve de base para teorías inconsistentes, puesto que las hace triviales, es decir, las teorías serían completamente inútiles.

Prueba:

1. $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B) = 0$	FR
2. $\sim A = 1$	F→ en 1
3. $A \rightarrow B = 0$	F→ en 1
4. $A = 1$	F→ en 3
5. $B = 0$	F→ en 3
6. $A = 0$	A~ en 2
7. Válido	DM en 6 y 4

Para fundamentar teorías inconsistentes pero no triviales, debe tenerse una lógica de base en la cual el principio de trivialización no sea válido, es decir, una lógica que soporte las inconsistencias, tales lógicas son llamadas Lógicas Paraconsistentes. Más adelante se presenta el operador negación débil, el cual no trivializa las teorías inconsistentes.

1.7.2 Reducción al Absurdo Débil

$\models (A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A\}$. Cuando se quiere probar que un enunciado es falso, basta suponer que es verdadero y obtener a partir de este supuesto otro enunciado y la negación de este, es decir una contradicción.

Prueba:

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A\} = 0$	FR
2. $A \rightarrow B = 1$	F→ en 1
3. $(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A = 0$	F→ en 1
4. $A \rightarrow \sim B = 1$	F→ en 3
5. $\sim A = 0$	F→ en 3
6. $A = 1$	F~ en 5
7. $\sim B = 1$	AIA→ en 6 y 4
8. $B = 0$	A~ en 7
9. $B = 1$	AIA→ en 6 y 2
10. Válido	DM en 8 y 9.

1.7.3 Reducción al Absurdo Fuerte

$\models (\sim A \rightarrow B) \rightarrow \{(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow A\}$. Cuando se quiere probar que un enunciado es verdadero, basta suponer que es falso y obtener a partir de este supuesto otro enunciado y la negación de éste. Este resultado junto al anterior está formalizando el llamado método de reducción al absurdo o método de demostración indirecto.

Prueba:

1. $(\sim A \rightarrow B) \rightarrow \{(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow A\} = 0$	FR
2. $\sim A \rightarrow B = 1$	F→ en 1
3. $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow A = 0$	F→ en 1

11 $\models A$ significa que el enunciado A es válido, es decir, forzosamente A=1, no puede ocurrir que A=0.

12 Una teoría es *inconsistente* con respecto a un operador negación * con una lógica de base L sii existe un enunciado A tal que la teoría tiene como consecuencia con la lógica L tanto A como *A. Una teoría es *trivial* con una lógica de base L sii la teoría tiene como consecuencia con la lógica L todas las fórmulas.

4. $\sim A \rightarrow \sim B = 1$	F→ en 3
5. $A = 0$	F→ en 3
6. $\sim A = 1$	FA~ en 5
7. $\sim B = 1$	AIA→ en 6 y 4
8. $B = 0$	A~ en 7
9. $B = 1$	AIA→ en 6 y 2
10. Válido	DM en 9 y 8.

1.7.4 Principio de No Contradicción

$\models \sim(A \wedge \sim A)$. Un enunciado no puede ser a la vez verdadero y falso.

Prueba:

1. $\sim(A \wedge \sim A) = 0$	FR
2. $A \wedge \sim A = 1$	F~ en 1
3. $A = 1$	A∧ en 2
4. $\sim A = 1$	A∧ en 2
5. $A = 0$	A~ en 4
6. Válido	DM en 3 y 5.

1.7.5 Eliminación de la Doble Negación

$\models \sim\sim A \rightarrow A$. Si es falsa la falsedad de un enunciado entonces este enunciado es verdadero.

Prueba:

1. $\sim\sim A \rightarrow A = 0$	FR
2. $\sim\sim A = 1$	F→ en 1
3. $A = 0$	F→ en 1
4. $\sim A = 0$	A~ en 2
5. $A = 1$	F~ en 4
6. Válido	DM en 5 y 3.

1.7.6 Negación de la Conjunción

$\models \sim(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$. Si es falso que ambos son verdaderos entonces uno de los dos es falso. De la negación de la conjunción se sigue la disyunción de las negaciones.

Prueba:

1. $\sim(A \wedge B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B) = 0$	FR
2. $\sim(A \wedge B) = 1$	F→ en 1
3. $\sim A \vee \sim B = 0$	F→ en 1
4. $\sim A = 0$	F∨ en 3
5. $\sim B = 0$	F∨ en 3
6. $A = 1$	F~ en 4
7. $B = 1$	F~ en 5
8. $A \wedge B = 0$	A~ en 2
9. $B = 0$	AIF∧ en 6 y 8
10. Válido	DM en 9 y 7

1.7.7 Disyunción de Negaciones

$\models (\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$. Si uno de los dos es falso entonces es falso que ambos son verdaderos. De la disyunción de las negaciones se sigue la negación de la conjunción. Este resultado y el anterior son conocidos como las leyes de DeMorgan para la conjunción.

Prueba:

1. $(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B) = 0$	FR
2. $(\sim A \vee \sim B) = 1$	F→ en 1
3. $\sim(A \wedge B) = 0$	F→ en 1
4. $A \wedge B = 1$	F~ en 3
5. $A = 1$	A∧ en 4
6. $B = 1$	A∧ en 4

7.	$\sim A = 0$	AA~ en 5
8.	$\sim B = 1$	FIA∨ en 7 y 2
9.	$B = 0$	A~ en 8
10.	Válido	DM en 9 y 6.

1.7.8 Negación de la Disyunción

$\models \sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)$. Si es falso que uno de los dos sea verdadero entonces ambos son falsos. De la negación de la disyunción se sigue la conjunción de las negaciones. Este resultado y el siguiente son conocidos como las leyes de DeMorgan para la disyunción.

Prueba:

1.	$\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B) = 0$	FR
2.	$\sim(A \vee B) = 1$	F→ en 1
3.	$\sim A \wedge \sim B = 0$	F→ en 1
4.	$A \vee B = 0$	A~ en 2
5.	$A = 0$	F∨ en 4
6.	$B = 0$	F∨ en 4
7.	$\sim A = 1$	FA~ en 5
8.	$\sim B = 0$	AIF∧ en 7 y 3
9.	$B = 1$	F~ en 8
10.	Válido	DM en 6 y 9.

1.7.9 Conjunción de Negaciones

$\models (\sim A \wedge \sim B) \rightarrow \sim(A \vee B)$. De la conjunción de las negaciones se sigue la negación de la disyunción. Si ambos componentes de una disyunción son falsos entonces la disyunción es falsa.

Prueba:

1.	$(\sim A \wedge \sim B) \rightarrow \sim(A \vee B) = 0$	FR
2.	$\sim A \wedge \sim B = 1$	F→ en 1
3.	$\sim(A \vee B) = 0$	F→ en 1
4.	$\sim A = 1$	A∧ en 2
5.	$\sim B = 1$	A∧ en 2
6.	$A = 0$	A~ en 4
7.	$B = 0$	A~ en 5
8.	$A \vee B = 1$	F~ en 3
9.	$B = 1$	FIA∨ 6 y 8
10.	Válido	DM en 7 y 9.

1.7.10 Negación del Condicional

$\models \sim(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \sim B)$. Si un condicional es falso entonces su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. De la negación de un condicional se sigue la afirmación del antecedente y la negación del consecuente.

Prueba:

1.	$\sim(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \sim B) = 0$	FR
2.	$\sim(A \rightarrow B) = 1$	F→ en 1
3.	$A \wedge \sim B = 0$	F→ en 1
4.	$A \rightarrow B = 0$	A~ en 2
5.	$A = 1$	F→ en 4
6.	$B = 0$	F→ en 4
7.	$\sim B = 0$	AIF∧ en 5 y 3
8.	$B = 1$	F~ en 7
9.	Válido	DM en 6 y 8.

1.7.11 Afirmación del Condicional

$\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim A \vee B)$. Si un condicional es verdadero entonces su antecedente es falso o su consecuente es verdadero. De la afirmación de un condicional se sigue la negación del antecedente o la afirmación del consecuente.

Prueba:

1.	$(A\to B)\to(\sim A\vee B) = 0$	FR
2.	$A\to B = 1$	F→ en 1
3.	$\sim A\vee B = 0$	F→ en 1
4.	$\sim A = 0$	F∨ en 3
5.	$B = 0$	F∨ en 3
6.	$A = 1$	F~ en 4
7.	$A = 0$	FDA→ en 5 y 2
8.	Válido	DM en 7 y 6.

1.7.12 Afirmación del Antecedente y Negación del Consecuente

$\models (A\wedge\sim B) \to \sim(A \to B)$. Si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso entonces el condicional es falso. De la afirmación del antecedente y la negación del consecuente se tiene la negación del condicional.

Prueba:

1.	$(A\wedge\sim B)\to\sim(A\to B) = 0$	FR
2.	$A\wedge\sim B = 1$	F→ en 1
3.	$\sim(A\to B) = 0$	F→ en 1
4.	$A = 1$	A∧ en 2
5.	$\sim B = 1$	A∧ en 2
6.	$A\to B = 1$	F~ en 3
7.	$B = 0$	A~ en 5
8.	$B = 1$	AIA→ en 4 y 6
9.	Válido	DM en 7 y 8

1.7.13 Negación del Antecedente o Afirmación del Consecuente

$\models (\sim A\vee B) \to (A\to B)$. Si en un condicional el antecedente es falso o el consecuente es verdadero entonces el condicional es verdadero.

Prueba:

1.	$(\sim A\vee B)\to(A\to B) = 0$	FR
2.	$\sim A\vee B = 1$	F→ en 1
3.	$A\to B = 0$	F→ en 1
4.	$A = 1$	F→ en 3
5.	$B = 0$	F→ en 3
6.	$\sim A = 1$	FDA∨ en 5 y 2
7.	$A = 0$	A~ en 6
9.	Válido	DM en 7 y 4

1.7.14 Silogismo Disyuntivo

$\models (A\vee B) \to (\sim A\to B)$. Si al menos uno de dos enunciados es verdadero y uno de ellos es falso entonces el otro es verdadero. Al negar uno de los componentes de una disyunción se afirma el otro.

Prueba:

1.	$(A\vee B)\to(\sim A\to B) = 0$	FR
2.	$A\vee B = 1$	F→ en 1
3.	$\sim A\to B = 0$	F→ en 1
4.	$\sim A = 1$	F→ en 3
5.	$B = 0$	F→ en 3
6.	$A = 1$	FDA∨ en 5 y 2
7.	$A = 0$	A~ en 4
8.	Válido	DM en 7 y 6

1.7.15 Contra Reciproca Débil

$\models (A\to B) \to (\sim B\to\sim A)$. Si un condicional es verdadero y su consecuente es falso entonces su antecedente también es falso. De la negación del consecuente en un condicional afirmado se sigue la negación del antecedente.

Prueba:

1. (A⟶B)⟶(~B⟶~A) = 0	FR
2. A⟶B = 1	F⟶ en 1
3. ~B⟶~A = 0	F⟶ en 1
4. ~B = 1	F⟶ en 3
5. ~A = 0	F⟶ en 3
6. A = 1	F~ en 5
7. B = 0	A~ en 4
8. A = 0	FDA⟶ en 7 y 2
9. Válido	DM en 8 y 6.

1.7.16 Contra Reciproca Fuerte

⊨(~B⟶~A) ⟶ (A⟶B). Si de la falsedad de un enunciado se sigue la falsedad de un segundo entonces de la afirmación del segundo se sigue la afirmación del primero. Este enunciado junto con el anterior están formalizando la regla de inferencia Modus Tollens: Si un condicional es verdadero y su consecuente es falso entonces el antecedente también es falso.

Prueba:

1. (~B⟶~A)⟶(A⟶B) = 0	FR
2. ~B⟶~A = 1	F⟶ en 1
3. A⟶B = 0	F⟶ en 1
4. A = 1	F⟶ en 3
5. B = 0	F⟶ en 3
6. ~B = 1	FA~ en 5
7. ~A = 1	AIA⟶ en 6 y 2
8. A = 0	A~ en 7
9. Válido	DM en 8 y 4

1.7.17 Tercero Excluido

⊨A ∨ ~A. Un enunciado es verdadero o es falso. Este resultado junto con el principio de no contradicción dicen que un enunciado es verdadero o falso pero no ambos.

Prueba:

1. A∨~A = 0	FR
2. A = 0	F∨ en 1
3. ~A = 0	F∨ en 1
4. A = 1	F~ en 3
5. Válido	DM en 2 y 4

2. LÓGICA BÁSICA PARACONSISTENTE – LBPC

El forzamiento semántico de marcas para el sistema de Lógica Básica Paraconsistente, LBPc, se obtiene a partir del forzamiento semántico de marcas clásico agregando un nuevo operador de negación[13] (negación débil o paraconsistente), las reglas de inferencia para esta negación indican que la negación débil se sigue de la negación usual, pero sólo en casos particulares vale la recíproca. El sistema resultante soporta contradicciones débiles, es decir, sirve de base para el estudio de teorías inconsistentes pero no triviales.

13 La negación clásica (~) está caracterizada por ser *completa* (Si el enunciado A es falso entonces el enunciado ~A es verdadero, o de forma equivalente, si el enunciado ~A es falso entonces el enunciado A es verdadero, lo cual significa que no puede ocurrir que los enunciados A y ~A sean simultáneamente falsos) y *Consistente* (Si el enunciado A es verdadero entonces el enunciado ~A es falso, o de forma equivalente, si el enunciado ~A es verdadero entonces el enunciado A es falso, lo cual significa que no puede ocurrir que los enunciados A y ~A sean simultáneamente verdaderos). Cuando una lógica tiene un operador negación (¬) que no es completo (para algún enunciado A, tanto A como ¬A son falsos), se dice que dicha lógica es *paracompleta*. Cuando una lógica tiene un operador negación (¬) que no es consistente (para algún enunciado A, tanto A como ¬A son verdaderos), se dice que dicha lógica es *paraconsistente.*

La fórmula $\neg A$ puede leerse: A es débilmente negado, A es cuetionable, A es objetable, A es aparentemente falso. La fórmula $\sim A$ puede leerse: A es fuertemente negado, A es rechazado, A es no aceptado, A es absolutamente falso. La fórmula A puede leerse: A es débilmente afirmado, A es aceptado, A es no rechazado. La fórmula A^I se lee: A es incompatible con su negación débil ($\neg$)[14].

2.1 Reglas de inferencia para la negación débil $\neg$[15]

$A\neg AI$ (Afirmación de la Negación débil y Afirmación de la Incompatibilidad): $\neg A=1$ y $A^I=1 \Rightarrow A=0$.

$FA\neg$ (Falsedad del Alcance de la Negación débil): $A=0 \Rightarrow \neg A=1$.

$F\neg$ (Falsedad de la Negación débil): $\neg A=0 \Rightarrow A=1$.

$AA\neg AI$ (Afirmación del Alcance de la Negación débil y Afirmación de la Incompatibilidad): $A=1$ y $A^I=1 \Rightarrow \neg A=0$.

AAI (Afirmación del Alcance de la Incompatibilidad): $A=1$ y $\neg A=1 \Rightarrow A^I=0$.

FI (Falsedad de la Incompatibilidad): $A^I=0 \Rightarrow A=1$ y $\neg A=1$.

$F\neg I$ (Falsedad de la Negación débil en la Incompatibilidad): $\neg A=0 \Rightarrow A^I=1$.

$FA\neg I$ (Falsedad del Alcance de la Negación débil en la Incompatibilidad): $A=0 \Rightarrow A^I=1$.

14 Esta forma de presentar la negación débil difiere de la presentación usual, en la cual, la negación clásica no es primitiva y se define en términos de cierto "buen comportamiento" de las fórmulas débilmente negadas. Se sabe que en general el principio de sustitución por equivalencia no vale para las fórmulas que están bajo el alcance de la negación débil, por lo que, la presentación de un operador como primitivo es en principio técnicamente y conceptualmente diferente de la presentación como operador definido.

15 Las reglas de inferencia para la negación débil fueron presentadas por primera vez en 2001, en el sistema "Lógica Básica Paraconsistente Clásica" el cual fue presentado en el VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, en la Universidad de Nariño, Pasto.

Observar que basta tomar como **primitivas** las reglas **$A\neg AI$, $FA\neg$** y **FI,** ya que las otras reglas son derivadas de éstas:

En $F\neg$ no puede inferirse marca 0 en el alcance de la negación débil, ya que por $FA\neg$ se tendría la marca 1 en la negación débil y este no es el caso.

En $AA\neg AI$ no puede inferirse marca 1 en la negación débil, ya que por $A\neg AI$ se tendría la marca 0 en el alcance de la negación débil y este no es el caso.

En AAI no puede inferirse la marca 1 en la incompatibilidad, ya que por $A\neg AI$ se tendría la marca 0 en el alcance de la negación débil y este no es el caso.

En $F\neg I$ no puede obtenerse la marca 0 en la incompatibilidad, ya que por FI se tendría la marca 1 en la negación débil y este no es el caso.

En $FA\neg I$ no puede obtenerse la marca 0 en la incompatibilidad, ya que por FI se tendría la marca 1 en el alcance de la negación débil y este no es el caso.

Con este debilitamiento puede ocurrir que una fórmula y su negación débil estén marcadas con 1 (sean ambas verdaderas) y no se genere doble marca, es decir, la fórmula y su negación débil son compatibles.

2.2 Algunos teoremas importantes para la negación débil

Observando las reglas de inferencia para la negación débil se tiene como consecuencia inmediata la validez de los siguientes enunciados:

$A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$, $\sim A \rightarrow \neg A$, $\sim \neg A \rightarrow A$, $A^I \rightarrow (A \rightarrow \sim\neg A)$, $\sim A^I \rightarrow (A \wedge \neg A)$, $(A \wedge \neg A) \rightarrow \sim A^I$, $\sim A \rightarrow A^I$, $\sim\neg A \rightarrow A^I$.

2.2.1 Principio de Trivialización

no $\models \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. $\models A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$. De la aceptación y el cuestionamiento de un enunciado se sigue cualquier otro enunciado si el enunciado inicial es incompatible con su negación.

Prueba:

1.	$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)) = 0$	FR
2.	$A^{I} = 1$	F$\rightarrow$ en 1
3.	$\neg A\rightarrow(A\rightarrow B) = 0$	F$\rightarrow$ en 1
4.	$\neg A = 1$	F$\rightarrow$ en 3
5.	$A\rightarrow B = 0$	F$\rightarrow$ en 3
6.	$A = 1$	F$\rightarrow$ en 5
7.	$B = 0$	F$\rightarrow$ en 5
8.	$A = 0$	A¬AI en 4 y 2
9.	Válido	DM en 8 y 6.

Los pasos 1, …, 9 indican que es válido el enunciado $A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow(A\rightarrow B))$. Los pasos 3, …, 7 indican que el enunciado $\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=1$ y $B=0$, los modelos en los cuales ocurre que un enunciado y su negación débil son verdaderos se llaman Modelos Inconsistentes[16].

La no validez del enunciado $\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$ (principio de trivialización) indica que el sistema LBPc soporta las contradicciones débiles, es decir, pueden tenerse como teoremas de una teoría los enunciados A y $\neg A$ y a pesar de ello la teoría no se trivializa (demuestra todas las fórmulas).

16 Los *modelos consistentes respecto al operador negación* $\sim$ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos, los cuales satisfacen la siguiente definición (para M un modelo, A y B fórmulas, p fórmula atómica): M satisface p sii $p\in M$. M satisface $\sim A$ sii M no satisface A. M satisface $A\wedge B$ sii M satisface A y M satisface B. M satisface $A\vee B$ sii M satisface A o M satisface B. M satisface $A\rightarrow B$ sii M no satisface A o M satisface B. Los *modelos inconsistentes respecto al operador negación débil* $\neg$ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbitrarios, los cuales satisfacen la siguiente definición: M satisface $\neg A$ sii M no satisface A o $\neg A\in M$.

2.2.2 Reducción al Absurdo Débil

No $\models (A\rightarrow B)\rightarrow\{(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A\}$. $\models B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow\{(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A\}]$. Si de la aceptación de un enunciado se sigue una contradicción débil entonces el enunciado inicial es cuestionado si el enunciado contradictorio es incompatible con su negación.

Prueba:

1.	$B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow\{(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A\}] = 0$	FR
2.	$B^{I} = 1$	F$\rightarrow$ en 1
3.	$(A\rightarrow B)\rightarrow\{(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A\} = 0$	F$\rightarrow$ en 1
4.	$A\rightarrow B = 1$	F$\rightarrow$ en 3
5.	$(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A = 0$	F$\rightarrow$ en 3
6.	$A\rightarrow\neg B = 1$	F$\rightarrow$ en 5
7.	$\neg A = 0$	F$\rightarrow$ en 5
8.	$A = 1$	F¬ en 7
9.	$\neg B = 1$	AIA$\rightarrow$ en 8 y 6.
10.	$B = 1$	AIA$\rightarrow$ en 8 y 4
11.	$B = 0$	A¬AI en 2 y 9
12.	Válido	DM en 10 y 11.

Los pasos 1, …, 12 indican que es válido el enunciado $B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow\{(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A\}]$. Los pasos 3, …, 10 indican que el enunciado $(A\rightarrow B)\rightarrow\{(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A\}$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=0$, $B=1$ y $\neg B=1$.

2.2.3 Reducción al Absurdo Fuerte

No $\models (\neg A\rightarrow B)\rightarrow\{(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A\}$. $\models B^{I}\rightarrow[(\neg A\rightarrow B)\rightarrow\{(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A\}]$. Si del cuestionamiento de un enunciado se sigue una contradicción débil entonces el enunciado inicial es aceptado si el enunciado contradictorio es incompatible con su negación.

Prueba:

1.	$B^{I}\to[(\neg A\to B)\to\{(\neg A\to\neg B)\to A\}] = 0$	FR
2.	$B^{I} = 1$	$F\to$ en 1
3.	$(\neg A\to B)\to\{(\neg A\to\neg B)\to A\} = 0$	$F\to$ en 1
4.	$\neg A\to B = 1$	$F\to$ en 3
5.	$(\neg A\to\neg B)\to A = 0$	$F\to$ en 3
6.	$\neg A\to\neg B = 1$	$F\to$ en 5
7.	$A = 0$	$F\to$ en 5
8.	$\neg A = 1$	$FA\neg$ en 7
9.	$\neg B = 1$	$AIA\to$ en 8 y 6
10.	$B = 1$	$AIA\to$ en 8 y 4
11.	$B = 0$	$A\neg AI$ en 9 y 2
12.	Válido	DM en 10 y 11

Los pasos 1, …, 12 indican que es válido el enunciado $B^{I}\to[(\neg A\to B)\to\{(\neg A\to \neg B)\to A]$. Los pasos 3, …, 10 indican que el enunciado $(\neg A\to B)\to\{(\neg A\to\neg B)\to A\}$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$, $B=1$ y $\neg B=1$. Los anteriores resultados indican que no puede utilizarse el método de demostración indirecta (reducción al absurdo) si la contradicción débil[17] encontrada se da con una fórmula que no es incompatible con su negación débil.

2.2.4 Principio de no Contradicción

No $\models \neg(A\wedge\neg A)$. $\models A^{I}\to \neg(A\wedge\neg A)$. El principio de no contradicción es uno de los teoremas fundamentales de la lógica clásica. Para el caso de la negación débil este principio sólo tiene validez restringida, es decir, cuando el enunciado es incompatible con su negación débil.

17 Una contradicción débil tiene la forma $A\wedge\neg A$, también se dice que $A\wedge\neg A$ es una contradicción respecto a la negación débil $\neg$.

Prueba:

1.	$A^{I}\to\neg(A\wedge\neg A) = 0$	FR
2.	$A^{I} = 1$	$F\to$ en 1
3.	$\neg(A\wedge\neg A) = 0$	$F\to$ en 1
4.	$A\wedge\neg A = 1$	$F\neg$ en 3
5.	$A = 1$	$A\wedge$ en 4
6.	$\neg A = 1$	$A\wedge$ en 4
7.	$A = 0$	$A\neg AI$ en 6 y 2
8.	Válido	DM en 5 y 7

Los pasos 1, …, 8 indican que es válido el enunciado $A^{I}\to\neg(A\wedge\neg A)$. Los pasos 3, …, 6 indican que el enunciado $\neg(A\wedge\neg A)$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=1$ y $\neg(A\wedge\neg A) = 0$.

2.2.5 Cuestionamiento no implica Incompatibilidad

No $\models\neg(A\wedge\neg A)\to A^{I}$. El cuestionamiento de la conjunción de un enunciado con su cuestionamiento no implica que este sea incompatible con su negación. El cuestionamiento de una contradicción débil no implica incompatibilidad.

Prueba:

1.	$\neg(A\wedge\neg A)\to A^{I} = 0$	FR
2.	$\neg(A\wedge\neg A) = 1$	$F\to$ en 1
3.	$A^{I} = 0$	$F\to$ en 1
4.	$A = 1$	FI en 3
5.	$\neg A = 1$	FI en 3
6.	Inválido	EBM

Los pasos 1, …, 6 indican que es inválido el enunciado $\neg(A\wedge\neg A)\to A^{I}$ y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=1$ y $\neg(A\wedge\neg A)=1$. El anterior resultado indica que no es válida la equivalencia $\neg(A\wedge\neg A)\leftrightarrow A^{I}$. Este resultado muestra una diferencia fundamental entre la formalización que se hace del buen comportamiento de un enunciado, por parte de la tradición iniciada por Newton da Costa,[18] y desarrollada por la escuela Brasilera, con la presentada en este trabajo.

2.2.6 Preservación[19] de la Incompatibilidad con la Conjunción:

No $\models (B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}$. $\models [\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]\rightarrow[B^{I}\wedge A^{I}\rightarrow(A\wedge B)^{I}]$. La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la conjunción cuando al cuestionar la conjunción de los enunciados, se cuestiona alguno de ellos. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la conjunción y la preservación de la incompatibilidad con la conjunción.

Prueba:

1.	$[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}] = 0$	FR
2.	$\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B) = 1$	F$\rightarrow$ en 1
3.	$(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I} = 0$	F$\rightarrow$ en 1
4.	$B^{I}\wedge A^{I} = 1$	F$\rightarrow$ en 3
5.	$(A\wedge B)^{I} = 0$	F$\rightarrow$ en 3
6.	$\neg(A\wedge B) = 1$	FI en 5
7.	$A\wedge B = 1$	FI en 5
8.	$A = 1$	A$\wedge$ en 7
9.	$B = 1$	A$\wedge$ en 7
10.	$A^{I} = 1$	A$\wedge$ en 4
11.	$B^{I} = 1$	A$\wedge$ en 4
12.	$\neg A = 0$	AA$\neg$AI en 8 y 10
13.	$\neg B = 0$	AA$\neg$AI en 9 y 11
14.	$\neg A\vee\neg B = 1$	AIA$\rightarrow$ en 6 y 2
15.	$\neg B = 1$	FIA$\vee$ en 12 y 14
16.	Válido	DM en 15 y 13

Los pasos 1, .., 16 indican que es válido el enunciado $[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}]$. Los pasos 3, …, 13 indican que es inválido el enunciado $(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\wedge B)^{I}$ y es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=0$, $B=1$, $\neg B=0$ y $\neg(A\wedge B)=1$.

2.2.7 Preservación de la Incompatibilidad con la Disyunción

No $\models (B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}$. $\models [\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}]$. La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la disyunción cuando al cuestionar la disyunción de los enunciados, se cuestionan ambos. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la disyunción y la preservación de la incompatibilidad con la disyunción.

Prueba:

1.	$[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}] = 0$	FR
2.	$\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B) = 1$	F$\rightarrow$ en 1
3.	$(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I} = 0$	F$\rightarrow$ en 1
4.	$B^{I}\wedge A^{I} = 1$	F$\rightarrow$ en 3
5.	$(A\vee B)^{I} = 0$	F$\rightarrow$ en 3
6.	$A^{I} = 1$	A$\wedge$ en 4
7.	$B^{I} = 1$	A$\wedge$ en 4
8.	$\neg(A\vee B) = 1$	FI en 5

18 Da Costa define $A^{o} = \neg(A\wedge\neg A)$, lo cual significa que el enunciado A tiene *buen comportamiento*. En este trabajo el buen comportamiento es formalizado con A^{I} el cual se lee A es *incompatible con su negación débil* y es caracterizado por la equivalencia $A^{I}\leftrightarrow{\sim}(A\wedge\neg A)$.

19 Se dice que una propiedad P se preserva con el conectivo binario # si y solamente si cuando A y B tienen la propiedad P entonces A#B también tiene la propiedad P. Se dice que una propiedad P se preserva con el conectivo unario * si y solamente si cuando A tiene la propiedad P entonces *A también tiene la propiedad P.

9.	$A\vee B = 1$	FI en 5
10.	$\neg A = 1$	Opción
11.	$A = 0$	A¬AI en 10 y 6
12.	$B = 1$	FIA∨ en 11 y 9
13.	$\neg B = 0$	AA¬AI en 12 y 7
14.	$\neg A\wedge\neg B = 1$	AIA→ en 8 y 2
15.	$\neg B = 1$	A∧ en 14
16.	$\neg A = 1$	A∧ en 14
17.	Válido	DM en 15 y 13

Los pasos 1, …, 17 indican que es válido el enunciado $[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}]$. Los pasos 3, …, 13 indican que es inválido el enunciado $(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\vee B)^{I}$ y es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$, $B=1$, $\neg B=0$ y $\neg(A\vee B)=1$. Observar que en análisis final el paso 10. $\neg A = 1$ no es una opción, es una consecuencia de 14.

2.2.8 Preservación de la Incompatibilidad con el Condicional

No $\models (B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}$. $\models [\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}]$. La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con el condicional cuando al cuestionar el condicional, se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento del condicional y la preservación de la incompatibilidad con el condicional

Prueba:

1.	$[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}] = 0$	FR
2.	$\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B) = 1$	F→ en 1
3.	$(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I} = 0$	F→ en 1
4.	$B^{I}\wedge A^{I} = 1$	F→ en 3
5.	$(A\rightarrow B)^{I} = 0$	F→ en 3
6.	$A\rightarrow B = 1$	FI en 5
7.	$\neg(A\rightarrow B) = 1$	FI en 5
8.	$A^{I} = 1$	A∧ en 4
9.	$B^{I} = 1$	A∧ en 4
10.	$A = 1$	Opción
11.	$B = 1$	AIA→ en 10 y 6
12.	$\neg B = 0$	AA¬AI en 11 y 9
13.	$\neg A = 0$	AA¬AI en 10 y 8
14.	$A\wedge\neg B = 1$	AIA→ en 7 y 2
15.	$A = 1$	A∧ en 14
16.	$\neg B = 1$	A∧ en 14
17.	Válido	DM en 12 y 16

Los pasos 1, …, 17 indican que es válido el enunciado $[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]\rightarrow[(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}]$. Los pasos 3, …, 13 indican que es inválido el enunciado $(B^{I}\wedge A^{I})\rightarrow(A\rightarrow B)^{I}$ y es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=0$, $B=1$, $\neg B=0$ y $\neg(A\rightarrow B)=1$. Observar que en el análisis final, el paso 10 deja de ser una opción, es una consecuencia de 14.

2.2.9 Preservación de la Incompatibilidad con el Cuestionamiento

No $\models A^{I}\rightarrow(\neg A)^{I}$. $\models [\neg\neg A\rightarrow A]\rightarrow[A^{I}\rightarrow(\neg A)^{I}]$. La incompatibilidad de un enunciado con su negación débil se preserva con la negación cuando al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado, se acepta este. Se establece una importante conexión entre el cuestionamiento de la negación débil y la preservación de la incompatibilidad con la negación débil.

Prueba:

1.	$[\neg\neg A\rightarrow A]\rightarrow[A^{I}\rightarrow(\neg A)^{I}] = 0$	FR
2.	$\neg\neg A\rightarrow A = 1$	F→ en 1

3. $A^{I}\to(\neg A)^{I} = 0$	F→ en 1
4. $A^{I} = 1$	F→ en 3
5. $(\neg A)^{I} = 0$	F→ en 3
6. $\neg\neg A = 1$	FI en 5
7. $\neg A = 1$	FI en 5
8. $A = 0$	A¬AI en 7 y 4
9. $A = 1$	AIA→ en 6 y 2
10. Válido	DM en 8 y 9

Los pasos 1, ..., 10 indican que es válido el enunciado $[\neg\neg A\to A]\to[A^{I}\to(\neg A)^{I}]$. Los pasos 3, ..., 8 indican que es inválido el enunciado $A^{I}\to(\neg A)^{I}$, y que es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$ y $\neg\neg A=1$. Los resultados anteriores establecen una importante conexión entre el cuestionamiento de un conectivo y la preservación de la incompatibilidad con ese conectivo.

2.2.10 Eliminación del Doble Cuestionamiento

No $\models \neg\neg A\to A$. $\models (\neg A)^{I}\to (\neg\neg A\to A)$. La eliminación del doble cuestionamiento de A es válida cuando se satisface la incompatibilidad del cuestionamiento de A ($\neg A$) con su negación débil ($\neg\neg A$).

Prueba:

1. $(\neg A)^{I} \to (\neg\neg A\to A) = 0$	FR
2. $(\neg A)^{I} = 1$	F→ en 1
3. $\neg\neg A\to A = 0$	F→ en 1
4. $\neg\neg A = 1$	F→ en 3
5. $A = 0$	F→ en 3
6. $\neg A = 1$	FA¬ en 5
9. $\neg\neg A = 0$	AA¬AI en 6 y 2
10. Válido	DM en 4 y 9

Los pasos 1, ..., 10 indican que el enunciado $(\neg A)^{I}\to(\neg\neg A\to A)$ es válido. Los pasos 3, .., 6 indican que el enunciado $\neg\neg A\to A$ es inválido y es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$, $\neg\neg A=1$.

2.2.11 Introducción del Doble Cuestionamiento

No $\models A\to\neg\neg A$.1 = $A^{I}\to[A\to\neg\neg A]$. La introducción del doble cuestionamiento de A es válida cuando se satisface la incompatibilidad de A con su negación débil.

Prueba:

1. $A^{I}\to[A\to\neg\neg A] = 0$	FR
2. $A^{I} = 1$	F→ en 1
3. $A\to\neg\neg A = 0$	F→ en 1
4. $A = 1$	F→ en 3
5. $\neg\neg A = 0$	F→ en 3
6. $\neg A = 1$	F¬ en 5
7. $A = 0$	A¬AI en 6 y 2
8. Válido	DM en 7 y 4

Los pasos 1, …, 8 indican que es válido el enunciado $A^{I}\to[A\to\neg\neg A]$. Los pasos 3, …, 6 indican que es inválido el enunciado $A\to\neg\neg A$ y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=1$, $\neg\neg A=0$.

2.2.12 Cuestionamiento de la Conjunción

No $\models \neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)$. $\models (A\wedge B)^{I} \to [\neg (A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)]$. Al cuestionar una conjunción se cuestiona al menos uno de sus componentes cuando la conjunción es incompatible con su negación débil.

Prueba:

1. $(A\wedge B)^{I}\to[\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)] = 0$	FR
2. $(A\wedge B)^{I} = 1$	F→ en 1
3. $\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B) = 0$	F→ en 1

4. $\neg(A\wedge B) = 1$	F$\rightarrow$ en 3
5. $\neg A\vee\neg B = 0$	F$\rightarrow$ en 3
6. $\neg A = 0$	F$\vee$ en 5
7. $\neg B = 0$	F$\vee$ en 5
8. $B = 1$	F$\neg$ en 7
9. $A = 1$	F$\neg$ en 6
10. $A\wedge B = 0$	A$\neg$AI en 4 y 2
11. $B = 0$	AIF$\wedge$ en 9 y 10
12. Válido	DM en 8 y 11

De los pasos 1, …, 12 se concluye que $(A\wedge B)^I\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$ es válido. De los pasos 3, …, 9 se concluye que $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ es inválido, y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $B=1$, $\neg A=0$, $\neg B=0$ y $\neg(A\wedge B)=1$. Se observa de los pasos 6 y 7 que A y B son incompatibles con su negación débil, por lo que también es inválido $(A^I\wedge B^I)\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$.

2.2.13 Disyunción de Cuestionamientos

No $\vDash (\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$. $\vDash (A^I\wedge B^I)\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$. De la disyunción de cuestionamientos se sigue el cuestionamiento de la conjunción cuando cada enunciado es incompatible con su negación.

Prueba:

1. $(A^I\wedge B^I)\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)] = 0$	FR
2. $A^I\wedge B^I = 1$	F$\rightarrow$ en 1
3. $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B) = 0$	F$\rightarrow$ en 1
4. $\neg A\vee\neg B = 1$	F$\rightarrow$ en 3
5. $\neg(A\wedge B) = 0$	F$\rightarrow$ en 3
6. $A\wedge B = 1$	F$\neg$ en 5
7. $A = 1$	A$\wedge$ en 6
8. $B = 1$	A$\wedge$ en 6
9. $\neg A = 0$	Opción
10. $\neg B = 1$	FIA$\vee$ en 9 y 4
11. $A^I = 1$	A$\wedge$ 2
12. $B^I = 1$	A$\wedge$ 2
13. $\neg A = 0$	AA$\neg$AI en 7 y 11
14. $B = 0$	A$\neg$AI en 10 y 12
15. Válido	DM en 8 y 14

Los pasos 1, …, 15 indican que es válido el enunciado $(A^I\wedge B^I)\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow \neg(A\wedge B)]$. Los pasos 3, …, 10 indican que el enunciado $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=0$, $B=1$, $\neg B=1$ y $\neg(A\wedge B)=0$. Observar que cuando se tiene el análisis completo, el paso 9 deja de ser una opción, puesto que realmente se infiere en 13.

2.2.14 Cuestionamiento de Disyunción

No $\vDash \neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$. $\vDash (A\vee B)^I\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)]$. Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue la conjunción de sus cuestionamientos cuando la disyunción es incompatible con su negación débil.

Prueba:

1. $(A\vee B)^I\rightarrow[\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)] = 0$	FR
2. $(A\vee B)^I = 1$	F$\rightarrow$ en 1
3. $\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B) = 0$	F$\rightarrow$ en 1
4. $\neg(A\vee B) = 1$	F$\rightarrow$ en 3
5. $\neg A\wedge\neg B = 0$	F$\rightarrow$ en 3
6. $A = 0$	Opción
7. $\neg A = 1$	FA$\neg$ en 6
8. $\neg B = 0$	AIF$\wedge$ en 7 y 5

9. $B = 1$	$F\neg$ en 8
10. $A \vee B = 1$	$AD\vee$ en 9
11. $A \vee B = 0$	$A\neg AI$ en 4 y 2
12. $A = 0$	$F\vee$ en 11
13. Válido	DM en 10 y 11

Los pasos 1, …, 13 indican que es válido el enunciado $(A^I \wedge B^I) \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$. Los pasos 3, …, 10 indican que el enunciado $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$, $B=1$, $\neg B=0$ y $\neg(A \vee B)=1$. Observar que en el análisis final el paso 6 deja de ser una opción, se sigue de 11.

2.2.15 Conjunción de Cuestionamientos

No $\vDash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$. $\vDash (A^I \wedge B^I) \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$. De la conjunción de cuestionamientos se sigue el cuestionamiento de la disyunción cuando cada enunciado es incompatible con su negación débil.

Prueba:

1. $(A^I \wedge B^I) \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)] = 0$ FR	
2. $A^I \wedge B^I = 1$	$F\rightarrow$ en 1
3. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B) = 0$	$F\rightarrow$ en 1
4. $\neg A \wedge \neg B = 1$	$F\rightarrow$ en 3
5. $\neg(A \vee B) = 0$	$F\rightarrow$ en 3
6. $\neg A = 1$	$A\wedge$ en 4
7. $\neg B = 1$	$A\wedge$ en 4
8. $A \vee B = 1$	$F\neg$ en 5
9. $A = 0$	Opción
10. $B = 1$	$FIA\vee$ en 9 y 8
11. $A^I = 1$	$A\wedge$ en 2
12. $B^I = 1$	$A\wedge$ en 2
13. $B = 0$	$A\neg AI$ en 7 y 12
14. $A = 1$	OFDM en 9, 10 y 13
15. A^I	$A\wedge$ en 2
16. $A = 0$	$A\neg AI$ en 6 y 15
17. Válido	DM en 14 y 16

Los pasos 1, …, 19 indican que es válido el enunciado $(A^I \wedge B^I) \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$. Los pasos 3, …, 10 indican que el enunciado $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$, $B=1$, $\neg B=1$ y $\neg(A \vee B)=0$.

2.2.16 Cuestionamiento del Condicional

No $\vDash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$. no $\vDash (A^I \wedge B^I) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)]$.

Prueba:

1. $(A^I \wedge B^I) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)] = 0$ FR	
2. $A^I \wedge B^I = 1$	$F\rightarrow$ en 1
3. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B) = 0$	$F\rightarrow$ en 1
4. $\neg(A \rightarrow B) = 1$	$F\rightarrow$ en 3
5. $A \wedge \neg B = 0$	$F\rightarrow$ en 3
6. $A = 1$	Opción
7. $\neg B = 0$	$AIF\wedge$ en 6 y 5
8. $B = 1$	$F\neg$ en 7
9. $A^I = 1$	$A\wedge$ en 2
10. $B^I = 1$	$A\wedge$ en 2
11. $\neg A = 0$	$AA\neg AI$ en 6 y 9
12. Inválido	EBM

Los pasos 1, …, 12 indican que los enunciados $(A^I \wedge B^I) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)]$ y $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$, son inválidos y refutados por un modelo en el cual $A=1$, $\neg A=0$, $B=1$, $\neg B=0$ y $\neg(A \rightarrow B)=1$.

2.2.17 Cuestionamiento del Condicional

No $\models \neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$. $\models (A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$. Del cuestionamiento de un condicional se sigue la aceptación de su antecedente y el cuestionamiento de su consecuente cuando el condicional es incompatible con su negación débil.

Prueba:

1.	$(A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)] = 0$	FR
2.	$(A\rightarrow B)^{I} = 1$	F→ en 1
3.	$\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B) = 0$	F→ en 1
4.	$\neg(A\rightarrow B) = 1$	F→ en 3
5.	$A\wedge\neg B = 0$	F→ en 3
6.	$A = 1$	Opción
7.	$\neg B = 0$	AIF∧ en 6 y 5
8.	$B = 1$	F¬ en 7
9.	$A\rightarrow B = 0$	A¬AI en 4 y 2
10.	$A = 1$	F→ en 9
11.	$B = 0$	F→ en 9
12.	Válido	DM en 8 y 11

Los pasos 1, …, 12 indican que es válido el enunciado $(A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow (A\wedge\neg B)]$. Los pasos 3, …, 8 indican que el enunciado $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow (A\wedge\neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $B=1$, $\neg B=0$ y $\neg(A\rightarrow B)=1$. Observar que en análisis final el paso 6 deja de ser una opción, se sigue de 9.

2.2.18 Implicación Disyunción

$\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A\vee B)$. De un condicional se sigue la disyunción entre el cuestionamiento de su antecedente y la aceptación de su consecuente, sin importar si son o no incompatibles con sus negaciones débiles.

Prueba:

1.	$(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg A\vee B) = 0$	FR
2.	$A\rightarrow B = 1$	F→ en 1
3.	$\neg A\vee B = 0$	F→ en 1
4.	$\neg A = 0$	F∨ en 3
5.	$B = 0$	F∨ en 3
6.	$A = 1$	F¬ en 4
7.	$A = 0$	FDA→ en 5 y 2
8.	Válido	DM en 7 y 6

2.2.19 Aceptación del Antecedente y Cuestionamiento del Consecuente

No $\models (A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$. $\models B^{I}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$. De la aceptación del antecedente y el cuestionamiento de su consecuente se sigue el cuestionamiento del condicional cuando el consecuente es incompatible con su negación débil.

Prueba:

1.	$B^{I}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)] = 0$	FR
2.	$B^{I} = 1$	F→ en 1
3.	$(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B) = 0$	F→ en 1
4.	$A\wedge\neg B = 1$	F→ en 3
5.	$\neg(A\rightarrow B) = 0$	F→ en 3
6.	$A\rightarrow B = 1$	F¬ en 5
7.	$A = 1$	A∧ en 4
8.	$\neg B = 1$	A∧ en 4
9.	$B = 1$	AIA→ en 7 y 6
10.	$B = 0$	A¬AI en 8 y 2
11.	Válido	DM en 9 y 10

Los pasos 1, …, 11 indican que es válido el enunciado $B^{I}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]$. Los pasos 3, …, 9 indican que el enunciado $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $B=1$, $\neg B=1$ y $\neg(A\rightarrow B)=0$.

2.2.20 Cuestionamiento del Antecedente o Aceptación del Consecuente

No $\models(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$. $\models A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]$. De la disyunción entre el cuestionamiento del antecedente y la aceptación del consecuente se sigue la aceptación del condicional cuando el antecedente es incompatible con su negación.

Prueba:

1. $A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]=0$	FR
2. $A^{I}=1$	F$\rightarrow$ en 1
3. $(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)=0$	F$\rightarrow$ en 1
4. $\neg A\vee B=1$	F$\rightarrow$ en 3
5. $A\rightarrow B=0$	F$\rightarrow$ en 3
6. $A=1$	F$\rightarrow$ en 5
7. $B=0$	F$\rightarrow$ en 5
8. $\neg A=1$	FD$\vee$ en 7 y 4
9. $A=0$	A$\neg$AI en 8 y 2
10. Válido	DM en 6 y 9

Los pasos 1, …, 10 indican que es válido el enunciado $A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]$. Los pasos 3, …, 8 indican que el enunciado $(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $B=0$, $\neg A=1$.

2.2.21 Silogismo Disyuntivo

No $\models(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$. $\models A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$. De la disyunción de dos enunciados y el cuestionamiento de uno de ellos se sigue la aceptación del otro cuando el cuestionado es incompatible con su negación débil. Este enunciado está representando el Silogismo Disyuntivo (de $A\vee B$ y $\neg A$ se sigue B). Se tiene entonces que el Silogismo Disyuntivo es válido si el enunciado cuestionado es incompatible con su negación débil.

Prueba:

1. $A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]=0$	FR
2. $A^{I}=1$	F$\rightarrow$ en 1
3. $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)=0$	F$\rightarrow$ en 1
4. $A\vee B=1$	F$\rightarrow$ en 3
5. $\neg A\rightarrow B=0$	F$\rightarrow$ en 3
6. $\neg A=1$	F$\rightarrow$ en 5
7. $B=0$	F$\rightarrow$ en 5
8. $A=1$	FD$\vee$ en 7 y 4
9. $A=0$	A$\neg$AI en 6 y 2
10. Válido	DM en 8 y 9

Los pasos 1, …, 10 indican que es válido el enunciado $A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$. Los pasos 3, …, 8 indican que el enunciado $(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $B=0$, $\neg A=1$.

2.2.22 Contra Reciproca Débil:

No $\models(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$. $\models B^{I}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)]$. Si un condicional es verdadero y su consecuente es cuestionado y es incompatible con su negación débil entonces el antecedente también es cuestionado. Este enunciado está representando el Modus Tollens (de $A\rightarrow B$ y $\neg B$ se sigue $\neg A$), se tiene entonces que el Modus Tollens es válido si el enunciado cuestionado es incompatible con su negación débil.

Prueba:

1. $B^I \to [(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)] = 0$ FR
2. $B^I = 0$ F→ en 1
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A) = 0$ F→ en 1
4. $A \to B = 1$ F→ en 3
5. $\neg B \to \neg A = 0$ F→ en 3
6. $\neg B = 1$ F→ en 5
7. $\neg A = 0$ F→ en 5
8. $A = 1$ F¬ en 7
9. $B = 1$ AIA→ en 8 y 4
10. $B = 0$ A¬AI en 6 y 2
11. Válido DM en 9 y 10

Los pasos 1, …, 11 indican que es válido el enunciado $B^I \to [(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)]$. Los pasos 3, …, 9 indican que el enunciado $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=1$, $B=1$, $\neg B=1$ y $\neg A=0$.

2.2.23 Contra Recíproca Fuerte

No $\models (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$. $\models A^I \to [(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)]$.

Prueba:

1. $B^I \to [(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)] = 0$ FR
2. $B^I = 0$ F→ en 1
3. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A) = 0$ F→ en 1
4. $\neg A \to \neg B = 1$ F→ en 3
5. $B \to A = 0$ F→ en 3
6. $B = 1$ F→ en 5
7. $A = 0$ F→ en 5
8. $\neg A = 1$ FA¬ en 7
9. $\neg B = 1$ AIA→ en 8 y 4
10. $B = 0$ A¬AI en 9 y 2
11. Válido DM en 6 y 10

Los pasos 1, …, 11 indican que es válido el enunciado $B^I \to [(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)]$. Los pasos 3, …, 9 indican que el enunciado $(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A=0$, $\neg A=1$, $B=1$, $\neg B=1$.

2.2.24 Tercero Excluido

$\models A \vee \neg A$. Todo enunciado es aceptado o cuestionado. Este resultado indica que el principio del tercero excluido vale para la negación débil.

1. $A \vee \neg A = 0$ FR
2. $A = 0$ F∨ en 1
3. $\neg A = 0$ F∨ en 1
4. $A = 1$ F¬ en 3
5. Válido DM en 2 y 4.

2.3 Caracterización Axiomática[20]

La Lógica Básica Paraconsistente LBPc, está caracterizada por los siguientes axiomas:

Ax1. $A \to (B \to A)$

Ax2. $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

Ax3. $[(A \to B) \to A] \to A$

Ax4. $(A \wedge B) \to A$ $(A \wedge B) \to B$

Ax5. $(A \to B) \to [(A \to C) \to (A \to [B \wedge C])]$

Ax6. $A \to (A \vee B)$ $B \to (A \vee B)$

20 La prueba del correspondiente teorema de completitud es similar a la indicada en la sección 1.6.

Ax7. $(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow B) \rightarrow ([A \vee C] \rightarrow B)]$

Ax8. $A \vee \sim A$

Ax9. $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Ax10. $\sim A \rightarrow \neg A$

Ax11. $A^{I} \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$

Regla de inferencia: de A y $A \rightarrow B$ se sigue B.

3. CONCLUSIÓN

El forzamiento semántico de marcas para el sistema de Lógica Básica Paraconsistente, proporciona un mecanismo bastante simple y a la vez poderoso para el estudio de teorías inconsistentes y no triviales. Aparentemente, la construcción de sistemas más fuertes basados en éste puede en principio ser bastante simple, a continuación se presentan dos ejemplos:

3.1 Lógica positiva paraconsistente LPPc

El sistema lógica positiva paraconsistente se obtiene a partir del sistema lógica básica paraconsistente, agregándole reglas que permitan preservar, con los conectivos positivos (condicional, conjunción y disyunción), la incompatibilidad de un enunciado con su negación. Los teoremas 2.2.6, 2.2.7 y 2.2.8 sugieren (claramente ésta no es la única forma de hacerlo) las siguientes reglas:

$A\neg\wedge$ (Afirmación de la Negación Débil de la Conjunción): $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B) = 1$

$A\neg\vee$ (Afirmación de la Negación Débil de la Disyunción): $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B) = 1$

$A\neg\rightarrow$ (Afirmación de la Negación Débil del Condicional): $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B) = 1$

Modificando las pruebas de los teoremas 2.2.6, 2.2.7 y 2.2.8, se tienen los teoremas requeridos:

3.1.1 Preservación de la incompatibilidad con la conjunción

$\models (A^{I} \wedge B^{I}) \rightarrow (A \wedge B)^{I}$. Si dos enunciados son incompatibles con su negación entonces su conjunción también lo es.

3.1.2 Preservación de la incompatibilidad con la disyunción

$\models (A^{I} \wedge B^{I}) \rightarrow (A \vee B)^{I}$. Si dos enunciados son incompatibles con su negación entonces su disyunción también lo es.

3.1.3 Preservación de la incompatibilidad con el condicional

$\models (A^{I} \wedge B^{I}) \rightarrow (A \rightarrow B)^{I}$. Si el antecedente y el consecuente son incompatibles con su negación entonces el condicional también lo es.

3.2 Lógica paraconsistente LPc

El sistema lógica paraconsistente se obtiene a partir del sistema lógica positiva paraconsistente, agregándole reglas que permitan preservar, con los conectivos negación débil y negación fuerte, la incompatibilidad de un enunciado con su negación. El teorema 2.2.9 sugiere (no es la única forma de hacerlo) la siguiente regla:

$A\neg\neg$ (Afirmación de la Negación Débil de la Negación Débil): $\neg\neg A \rightarrow A = 1$

Modificando la prueba del teorema 2.2.9, se tiene el teorema requerido:

3.2.1 Preservación de la incompatibilidad con la negación débil

$\models A^{I} \rightarrow (\neg A)^{I}$. Si un enunciado es incompatible con su negación entonces su negación débil también lo es.

Observando los teoremas 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9 y las nuevas reglas $A\neg\rightarrow$, $A\neg\vee$, $A\neg\wedge$ y $A\neg\neg$, se sugiere el siguiente teorema en la lógica básica paraconsistente:

3.2.2 Preservación de la incompatibilidad con la negación fuerte

$\models (\neg\sim A \to A) \to (A^{I} \to (\sim A)^{I})$. La incompatibilidad de un enunciado con su negación se preserva con la negación fuerte cuando al cuestionar el rechazo de un enunciado, éste se acepta.

El teorema anterior sugiere la siguiente regla:

$A\neg\sim$ (Afirmación de la negación Débil de la Negación Fuerte). $\neg\sim A \to A = 1$.

Como consecuencia de esta regla y del teorema 3.2.2 se tiene el teorema requerido:

3.2.3 Preservación de la incompatibilidad con la negación fuerte

$\models (A^{I} \to (\sim A)^{I})$. La incompatibilidad de un enunciado con su negación se preserva con la negación fuerte.

4. BIBLIOGRAFÍA

Batens, D.(1999). "Inconsistency adaptive logics". In E. Orlowska, editor, logic at work. Essays dedicated to memory of Helena Rasiowa. Physica Verlag (springer). New York: Heidelberg.

Batens, D., Mortensen, C., Priest G. and. Van Bendegem, J. P. (2000). Editors. " Frontiers of paraconsistent logic". En: *Research studies press*, Baldock, UK.

Carnielli, W. A. and M. Lima-Marques (1999). "Society semantics and multiple valued logics". En: *Advances in contemporary logic and computer science*. Proceedings of the XI Brazilian conference of mathematical logic.

Carnielli, W. A. and S. de Amo. (1999). "A logic based system for controlling inconsistencies in evolutionary databases". Proceedings of the VI workshop on logic, language, information and computation, Brasil.

Da Costa, N. C. A.(1974). "On theory of inconsistent formal systems". *Notre dame journal of formal logic.*

Da Costa. N. C. A. and Alves, E. H. (1977). "A semantical analysis of the calculi Cn". En: *Notre dame journal of formal logic.*

Da Costa, N. C. A. y Béziau, J. and Bueno, A. S. (1995). Aspects of paraconsistent logic. En: *Bulletin of the IGPL*.

Marcos, J. (1999). "Possible translations semantics". Thesis, State University of Campinas.

Sette, A. M. (1973). "On the propositional calculus P1". En: Mathematica Japonicae. No. 18.

Sierra, M.(1999). "Árboles de forzamiento semántico". Memorias del VII encuentro de la escuela regional de matemáticas. Universidad de Antioquia, 1999. y en Revista Universidad EAFIT No 123, 2001.

Sierra, M. (2001). "Lógica Básica Paraconsistente Clásica". Memorias del VIII encuentro de la escuela regional de matemáticas, Universidad de Nariño.

Sierra, M. (2002). "Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica". En: *Revista Universidad EAFIT.* No 126.