

# Una Transformación eficiente del Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos

Julio César Ángel Gutiérrez  
David Soler Fernández  
Antonio Hervás Jorge

## RESUMEN

El Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos (*PCRC-m*) consiste básicamente en encontrar un conjunto de rutas en un grafo mixto, comenzando y acabando en el mismo vértice (depósito), con coste total mínimo, satisfaciendo demandas localizadas en enlaces y vértices y con restricciones de capacidad en las demandas satisfechas por cada ruta. Este problema generaliza muchos problemas de rutas que han sido extensamente estudiados en la literatura de Investigación Operativa debido a sus importantes aplicaciones en problemas reales. Sin embargo, este problema general ha sido poco estudiado y sólo de cara a encontrar soluciones heurísticas.

Con el objetivo de resolver tanto óptima como heurísticamente el *PGRC-m*, presentamos en este artículo una transformación polinomial del *PGRC-m*, en el Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades sobre Grafos Dirigidos para el que existen implementados tanto algoritmos exactos como heurísticos.

## ABSTRACT

The Capacitated General Routing Problem on Mixed Graphs (*CGRP-m*) consists basically of finding a set of routes on a mixed graph, beginning and ending at the same vertex (depot), with minimum total cost, satisfying demands located at links and vertices and with a capacity restriction on the demand satisfied by each route. This problem generalizes many routing problems that have been largely studied in the operational research literature due to their important applications in real-world problems. However, this general problem has been hardly studied and only in order to find heuristic solutions.

We present in this paper a polynomial transformation of the *CGRP-m* into the Capacitated Vehicle Routing Problem on Directed Graphs, that allows us to solve it both optimally and heuristically with existing algorithms for this last problem.

## PALABRAS CLAVES

Problemas de rutas con capacidades / Grafos Mixtos / Resolución Exacta

## KEY WORDS

Capacitated routing problems / Mixed graphs / Exact resolution

## JULIO CÉSAR ÁNGEL GUTIÉRREZ

(Colombia). Ingeniero Industrial, Doctor en Matemáticas aplicadas. Profesor del Departamento de Informática y Sistemas, Universidad EAFIT. [jangel@eafit.edu.co](mailto:jangel@eafit.edu.co)

## DAVID SOLER FERNÁNDEZ

(España). Doctor en Ciencias matemáticas de la Universidad de Valencia. Actualmente Subdirector de Fomento a la Investigación del Departamento de Matemática Aplicada de la misma Universidad. [dsoler@upv.edu.es](mailto:dsoler@upv.edu.es)

## ANTONIO HERVÁS JORGE

(España). Doctor en Ciencias matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia y Catedrático de la misma en el Departamento de Matemáticas Aplicadas. [ahervas@mat.upv.es](mailto:ahervas@mat.upv.es)

## I. INTRODUCCIÓN

El Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos (*PGRC- m*) puede ser definido como sigue:

Sea  $G = (V, E \cup A)$  un grafo mixto fuertemente conexo donde: cada enlace  $e \in E \cup A$  tiene asociado un coste  $c_e \geq 0$ , el vértice  $l$  representa un depósito donde hay  $k$  vehículos, todos ellos con capacidad  $W$ , existe un conjunto  $V_R \subseteq V$  tal que cada vértice  $i \in V_R$  tiene asociado una demanda positiva  $q_i \leq W$ , existe un conjunto  $A_R \subseteq A$  tal que cada arco  $(i, j) \in A_R$  tiene asociado una demanda positiva  $q_{ij} \leq W$ , existe un conjunto  $E_R \subseteq E$  tal que cada arista  $(i, j) \in E_R$  tiene asociada una demanda positiva  $q_{ij} \leq W$  y la suma de todas las demandas es no mayor que  $kW$ .

Encontrar  $k$  tours en  $G$ , uno para cada vehículo, tal que cada tour pasa por el depósito, las demandas en  $V_R$ ,  $A_R$  y  $E_R$  son satisfechas, la demanda total asumida por cada vehículo no excede  $W$ , cada demanda es asumida por un solo vehículo y la suma de los costes de los tours es mínima.

Notar que, como es usual en problemas de rutas con capacidades, para garantizar la posibilidad del problema, asumiremos que  $k$  es el mínimo número de vehículos necesarios para satisfacer todas las demandas.

El *PGRC - m* generaliza muchos problemas de rutas de vehículos que han sido estudiados en los últimos cuarenta años y sobre los que cientos de artículos han sido escritos, bien para dar algoritmos exactos o heurísticos para su resolución o bien para dar cotas inferiores, debido al hecho de que muchos problemas del mundo real pueden ser modelizados como este tipo de problemas: recogida o reparto de mercancías, en particular recogida de basuras o reparto de correos, máquinas quitanieves, inspección de redes de distribución de gas o electricidad, rutas de autobuses escolares, etc. Como ejemplos relevantes de estos casos particulares, tenemos:

- Si  $A = \emptyset = V_R$ , el Problema de Rutas por Arcos con Capacidades (*PRAC*).

- Si  $A = \emptyset = E_R$ , el Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades (*PRVC*).
- Si  $E = \emptyset = A_R$ , el Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades sobre Grafos Dirigidos (*PRVC - d*).
- Si  $k = 1$ , el Problema General de Rutas (*GRP*).

Como trabajos recientes sobre estos problemas, podemos mencionar entre otros el libro editado por Dror (2000), el artículo de Ghiani, Hertz y Laporte (2001), que resume trabajos recientes de sus autores, el algoritmo de búsqueda tabú para *PRVC* de Barbarosoglu y Ozgur (1999), o el muy reciente algoritmo exacto para el *PGR* de Corberán, Letchford y Sanchís (2001).

A pesar de que en una gran ciudad su red de calles puede ser modelizada como un grafo mixto y, por ejemplo para la recogida de basuras, se necesitan varios vehículos, algunos contenedores de basuras están localizados en las calles lejos de las encrucijadas y otros en las encrucijadas o próximos a ellas, y por tanto el *PGRC - m* parece apropiado para resolver este problema real; el único trabajo que nosotros hemos encontrado en la literatura de Investigación Operativa relativo a este problema es el de Pandit y Muralidharan (1995), donde un algoritmo heurístico tipo ruta-primero-partición después es dado.

Hoy en día los resultados dados por el modelo heurístico de Pandit y Muralidharan (a partir de ahora denotado por heurístico PM) pueden ser fácilmente mejorados con técnicas modernas (metaheurísticos por ejemplo). De hecho, recientemente nosotros hemos testado dos heurísticos constructivos similares para el *PGRC - m* hechos por nosotros (Ángel, Soler y Hervás (2002) y Ángel, Soler y Hervás (2001)) en un conjunto de 28 instancias y comparado con una mejora del heurístico PM, en el que la primera ruta (el tour gigante) se determina con el heurístico para el *GRP* dado por López (1998) basado en técnicas Monte Carlo. En promedio, el mejorado heurístico PM produjo un incremento de coste en la solución del 11.05% y del 13.77% respectivamente con respecto a las soluciones dadas por nuestros heurísticos para el *PGRC - m*.

Por tanto, podemos resolver heurísticamente el  $PGRC - m$  con algoritmos conocidos (que desde luego pueden ser mejorados), pero no sabemos cómo resolver el  $PGRC - m$  de manera exacta. Presentamos en este artículo una transformación polinomial del  $PGRC - m$  en uno de sus casos particulares, El Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades en Grafos Dirigidos ( $PRVC - d$ ), para el que existe al menos dos algoritmos exactos: el de Laporte, Mercure y Nobert (1986) y el más reciente de Fischetti, Toth y Vigo (1994), además de algoritmos heurísticos como el de Vigo (1996).

El resto de este artículo está organizado como sigue:

En la Sección 2 construimos un grafo auxiliar dirigido a partir del grafo donde está definido el  $PGRC - m$ . En la Sección 3 probamos que resolver el  $PGRC - m$  es equivalente a resolver el  $PRVC - d$  en su grafo auxiliar y finalmente, en la Sección 4, presentamos una generalización del  $PGRC - m$ , que permite situaciones "ventosas" (el coste de una arista depende de la dirección en que sea recorrida). Comprobaremos que esta generalización puede ser transformada también en un  $PRVC - d$ .

Como veremos, nuestra transformación es similar o mejor que otras transformaciones existentes en problemas de rutas por vértices para algunos casos particulares del  $PGRC - m$ , por lo que para concluir esta sección, pensamos que la transformación que aquí presentamos puede ser considerada una buena herramienta para comprobar la eficiencia de futuros algoritmos exactos o heurísticos para el  $PGRC - m$ , para algunos casos particulares o incluso para problemas similares.

## 2. GRAFO DIRIGIDO AUXILIAR

Para transformar un  $PGRC - m$  definido en el grafo  $G = (V, E \cup A)$  en un  $PRVC - d$ , primero construimos un grafo dirigido completo auxiliar  $G^* = (V^*, A^*)$  como sigue:

El conjunto de vértices  $V^*$  está compuesto por los siguiente elementos:

- Por cada vértice  $i \in V_R \cup \{1\}$  un vértice  $u_i$  con demanda  $q_i$  ( $q_1 = 0$ ).
- Por cada arco  $a = (i, j) \in A_R$  un vértice  $u_a$  con demanda  $q_a$ .
- Por cada arista  $e = (i, j) \in E_R$  (siempre supondremos  $i < j$  en aristas), dos vértices  $v_e$  y  $v_{e'}$ , ambos con demanda  $q_e/2$  (lo importante es que la suma de ambas demandas sea  $q_e$ , por lo que otra asignación de demandas para estos vértices puede ser hecha, de cara por ejemplo a mantener integridad de los valores).

El conjunto  $A^*$  está compuesto de los siguientes arcos con sus respectivos costes:

- Por cada arista  $e = (i, j) \in E_R$ , dos arcos  $(v_e, v_{e'})$  y  $(v_{e'}, u_a)$ , ambos con coste  $-M$ , siendo  $M$  un número positivo muy grande.
- Por cada par de vértices diferentes  $i, j \in V_R \cup \{1\}$ , dos arcos  $(v_i, v_j)$  y  $(v_j, v_i)$ , con costes  $cmc(i, j)$  y  $cmc(j, i)$  respectivamente ( $cmc(i, j)$  denota el coste del camino más corto del vértice  $i$  al vértice  $j$  en  $G$ ).
- Por cada par de arcos diferentes  $a = (i, j), b = (k, l) \in A_R$ , dos arcos  $(v_a, v_b)$  y  $(v_b, v_a)$ , con costes  $c_a + cmc(j, k)$  y  $c_b + cmc(l, i)$  respectivamente.
- Por cada par consistente en un vértice  $i \in V_R \cup \{1\}$  y un arco  $a = (j, l) \in A_R$ , dos arcos  $(v_i, v_a)$  y  $(v_a, v_i)$ , con costes  $cmc(i, j)$  y  $c_a + cmc(l, i)$  respectivamente.
- Por cada par de aristas diferentes  $a = (i, j), b = (k, l) \in E_R$ , ocho arcos:
  - $(v_a, v_b)$  con coste  $c_a + cmc(i, k)$ .
  - $(v_a, v_b)$  con coste  $c_a + cmc(i, l)$ .
  - $(v_b, v_a)$  con coste  $c_b + cmc(k, i)$ .
  - $(v_b, v_a)$  con coste  $c_b + cmc(l, i)$ .
  - $(v_{a'}, v_{a'})$  con coste  $c_b + cmc(k, j)$ .
  - $(v_{a'}, v_{b'})$  con coste  $c_a + cmc(j, k)$ .
  - $(v_{a'}, v_{b'})$  con coste  $c_a + cmc(j, l)$ .

- $(v_b, v_o)$  con coste  $c_b + cmc(i, i)$ .
- $(v_b, v_o)$  con coste  $c_b + cmc(i, j)$ .
- Por cada par consistente en un vértice  $i \in V_R \cup \{1\}$  y una arista  $e = (j, l) \in E_R$ , cuatro arcos:
  - $(v_j, v_e)$  con coste  $cmc(i, j)$ .
  - $(v_j, v_e)$  con coste  $cmc(i, l)$ .
  - $(v_e, v_j)$  con coste  $c_e + cmc(j, i)$ .
  - $(v_e, v_j)$  con coste  $c_e + cmc(l, i)$ .
- Por cada par consistente en un arco  $a = (i, j) \in A_R$  y una arista  $e = (k, l) \in E_R$ , cuatro arcos:
  - $(v_a, v_e)$  con coste  $c_o + cmc(j, k)$ .
  - $(v_a, v_e)$  con coste  $c_o + cmc(j, l)$ .
  - $(v_e, v_a)$  con coste  $c_e + cmc(k, i)$ .
  - $(v_e, v_a)$  con coste  $c_e + cmc(l, i)$ .

**Ejemplo:** Consideremos el grafo mixto  $G = (V, E, UA)$  dado en la Figura 1 correspondiente a un PGRC - m con 6 vértices requeridos, dos arcos requeridos y una arista requerida, con una demanda total de 200

unidades (las demandas están dadas entre paréntesis en la Figura 1) y dos vehículos, ambos con capacidad 100.

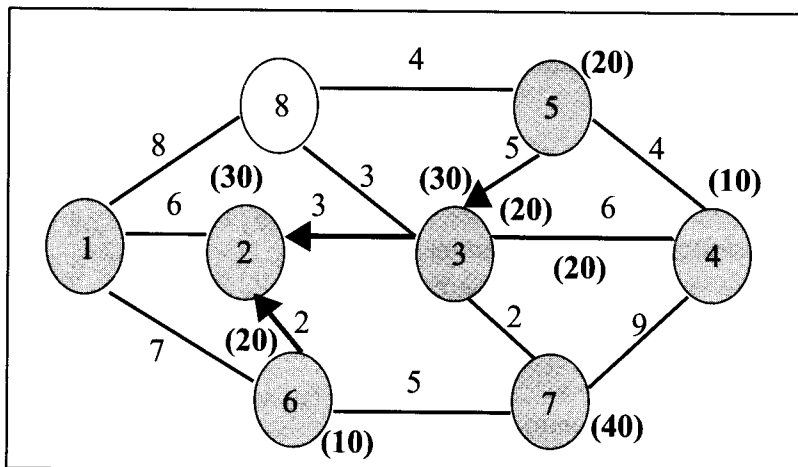
A partir de la Figura 1 tenemos que:  $V_R = \{6, 2, 5, 3, 4, 7\}$ ,  $V_R^1 = V_R \cup \{1\} = \{1, 6, 2, 5, 3, 4, 7\}$ ,  $A_R = \{(6, 2), (5, 3)\}$  y  $E_R = \{(3, 4)\}$ . Construimos  $G^* = (V^*, A^*)$ :

$V^*$  está compuesto por los siguientes vértices:

- Por cada vértice  $i \in V_R^1$ , un vértice  $v_i$  con demanda  $q_i$ , luego:
  - $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  con respectivas demandas  $\{0, 30, 30, 10, 20, 10, 40\}$ .
- Un vértice  $v_o$  correspondiente al arco requerido  $a = (6, 2)$  y un vértice  $v_b$  correspondiente al arco requerido  $b = (5, 3)$ , ambos con demanda 20.
- Dos vértices  $v_e, v_e$  correspondientes a la arista  $e = (3, 4)$ , ambos con demanda 10 ( $= q_e/2$ ).

Tenemos pues un grafo dirigido completo con 11 vértices (demasiados arcos para ser dibujado). Por brevedad, sólo vamos a ver cómo se calculan los costes de los arcos  $(v_i, v_o)$  y  $(v_e, v_e)$  correspondientes a pares consistentes en un vértice  $i \in V_R^1$  y un arco  $a = (j, l) \in A_R$  (ver Tabla 1).

FIGURA 1  
Grafo G





**TABLA I**  
Algunos costes de arcos en  $G^*$

Vértice	Arco de A	Arco de A*	Coste en G	Coste en G*
(i)	$a = (j, i)$		$cmc(i, j)$	$c_a + cmc(i, i)$
1	(6, 2)	$(v_1, v_2)$	$cmc(1, 6) = 7$	
1	(6, 2)	$(v_a, v_1)$		$2 + cmc(2, 1) = 8$
2	(6, 2)	$(v_2, v_2)$	$cmc(2, 6) = 13$	
2	(6, 2)	$(v_1, v_2)$		$2 + cmc(2, 2) = 2$
3	(6, 2)	$(v_3, v_2)$	$cmc(3, 6) = 7$	
3	(6, 2)	$(v_a, v_3)$		$2 + cmc(2, 3) = 19$
4	(6, 2)	$(v_4, v_2)$	$cmc(4, 6) = 13$	
4	(6, 2)	$(v_a, v_4)$		$2 + cmc(2, 4) = 24$
5	(6, 2)	$(v_5, v_2)$	$cmc(5, 6) = 12$	
5	(6, 2)	$(v_a, v_5)$		$2 + cmc(2, 5) = 20$
6	(6, 2)	$(v_6, v_2)$	$cmc(6, 6) = 0$	
6	(6, 2)	$(v_a, v_6)$		$2 + cmc(2, 6) = 15$
7	(6, 2)	$(v_7, v_2)$	$cmc(7, 6) = 5$	
7	(6, 2)	$(v_a, v_7)$		$2 + cmc(2, 7) = 20$
1	(5, 3)	$(v_1, v_3)$	$cmc(1, 5) = 12$	
1	(5, 3)	$(v_b, v_1)$		$5 + cmc(3, 1) = 14$
2	(5, 3)	$(v_2, v_3)$	$cmc(2, 5) = 18$	
2	(5, 3)	$(v_b, v_2)$		$5 + cmc(3, 2) = 8$
3	(5, 3)	$(v_3, v_3)$	$cmc(3, 5) = 7$	
3	(5, 3)	$(v_b, v_3)$		$5 + cmc(3, 3) = 5$
4	(5, 3)	$(v_4, v_3)$	$cmc(4, 5) = 4$	
4	(5, 3)	$(v_b, v_4)$		$5 + cmc(3, 4) = 11$
5	(5, 3)	$(v_5, v_3)$	$cmc(5, 5) = 0$	
5	(5, 3)	$(v_b, v_5)$		$5 + cmc(3, 5) = 12$
6	(5, 3)	$(v_6, v_3)$	$cmc(6, 5) = 14$	
6	(5, 3)	$(v_b, v_6)$		$5 + cmc(3, 6) = 12$
7	(5, 3)	$(v_7, v_3)$	$cmc(7, 5) = 9$	
7	(5, 3)	$(v_b, v_7)$		$5 + cmc(3, 7) = 7$

### 3. TRANSFORMACIÓN DEL PGRC - m al PRVC - d

A pesar de que el PRVC - d es un caso particular del PGRC - m en el que  $E = \emptyset = A_R$ , consideramos oportuno dar aquí la definición del PRVC - d de cara a clarificar la demostración dada para el teorema posterior:

Sea  $G = (V, A)$  un grafo completo dirigido donde: cada arco  $(i, j) \in A$ , tiene asociado un coste  $c_{ij} \geq 0$ , el vértice  $l$  representa un depósito donde hay  $k$  vehículos con idéntica capacidad  $W$ , cada vértice  $i \in V$  tiene asociado una demanda positiva  $q_i \leq W$ , excepto  $q_l$  que vale cero, y la suma de todas las demandas no es mayor que  $kW$ .

El PRVC - d consiste en encontrar  $k$  ciclos en  $G$  tal que cada ciclo pasa por el depósito, cada vértice diferente del depósito está en exactamente un ciclo, la suma de las demandas pertenecientes a los vértices del mismo ciclo no excede  $W$  y la suma de los costes de los  $k$  ciclos es mínima.

#### Teorema 1

El PGRC - m en el grafo  $G$  puede ser transformado en tiempo polinomial en un PRVC - d en su grafo auxiliar dirigido  $G^*$ .

#### Demostración

Sea  $S = \{T_i\}_{i=1}^k$  un conjunto de  $k$  tours en  $G$  correspondiente a una solución al PGRC - m. Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , a partir de  $T_i$  construimos un ciclo  $C_i$  en  $G^*$  en la forma siguiente:

Supongamos que  $T_i$  satisface y en este orden, las demandas  $q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_{m_i}}$ .  $C_i$  es un ciclo en  $G^*$  que visita en este orden, el conjunto de vértices  $V_{j_0}, V_{j_1}, V_{j_2}, \dots, V_{j_{m_i}}, V_{j_{m_i+1}}$ , donde:

- $V_{j_0} = V_{j_{m_i+1}} = \{u_i\}$  (el depósito en  $G^*$ ).
- Por cada  $s \in \{1, \dots, m_i\}$ ,  $V_{j_s}$  es:
  - $\{v_s\}$  si  $q_{j_s}$  es la demanda del vértice  $s \in V_R$ .
  - $\{v_a\}$  si  $q_{j_s}$  es la demanda del arco  $a \in A_R$ .
  - $\{v_e, v_e\}$  recorridos en este orden, si  $q_{j_s}$  es la demanda de la arista  $e = (r, s) \in E_R (r < s)$  la cual ha sido recorrida de  $r$  a  $s$  cuando  $T_i$  satisface su demanda.

- $\{v_e, v_e\}$  recorridos en este orden, si  $q_j$  es la demanda de la arista  $e = (r, s) \in E_R$  la cual ha sido recorrida de  $s$  a  $r$  cuando  $T_i$  satisface su demanda.

Es evidente que el conjunto de ciclos  $L_s = \{C_i\}_{i=1}^k$  es una solución al PRVC -  $d$  en  $G^*$ , siendo su coste  $c^*(L_s)$  menor o igual que  $c(S) - |E_R| M$  ya que un segmento de ruta en  $G$  entre dos elementos requeridos servidos consecutivamente es sustituido en  $G^*$  por el camino más corto desde el primero al segundo.

Por otro lado, sea  $L = \{C_i\}_{i=1}^k$  un conjunto de ciclos correspondiente a una solución al PRVC -  $d$  en  $G^*$ , tal que para cada arista  $e = (i, j) \in E_R$  o bien el arco  $(v_e, v_e)$  o bien el arco  $(v_e, v_e)$  pertenece a un  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , esto es, la demanda asociada con una arista en  $E_R$ , que en  $G^*$  es distribuida entre dos vértices, es servida por solo un vehículo que además visita los dos vértices consecutivamente. Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , a partir de  $C_i$  construimos un  $T_i$  en  $G$  como sigue:

Sea  $(r, p)$  un arco genérico de  $C_i$ . Este arco es sustituido en  $G$  por:

- El camino más corto de  $i$  a  $j$  si  $r = v_i$  y  $p = v_j$ , con  $i, j \in V_R \cup \{1\}$ .
- El camino más corto de  $i$  a  $j$  si  $r = v_i$  y  $p = v_i$ , con  $i \in V_R \cup \{1\}$  y  $a = (j, s) \in A_R$ .
- El camino más corto de  $i$  a  $j$  si  $r = v_i$  y  $p = v_e$ , con  $i \in V_R \cup \{1\}$  y  $e = (j, s) \in E_R$ .
- El camino más corto de  $i$  a  $s$  si  $r = v_i$  y  $p = v_e$ , con  $i \in V_R \cup \{1\}$  y  $e = (j, s) \in E_R$ .
- El arco  $a = (i, j) \in A_R$  más el camino más corto de  $j$  a  $l$ , con  $l \in V_R \cup \{1\}$ , Si  $r = v_o$  y  $p = v_l$ .
- El arco  $a = (i, j) \in A_R$  más el camino más corto de  $j$  a  $l$ , con  $b = (l, s) \in A_R$  si  $r = v_o$  y  $p = v_b$ .
- El arco  $a = (i, j) \in A_R$  más el camino más corto de  $j$  a  $l$ , con  $b = (l, s) \in E_R$ , si  $r = v_o$  y  $p = v_b$ .

- El arco  $a = (i, j) \in A_R$  más el camino más corto de  $j$  a  $s$ , con  $b = (l, s) \in E_R$ , si  $r = v_o$  y  $p = v_b$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $i$  a  $j$  más el camino más corto de  $j$  a  $s$ , con  $s \in V_R \cup \{1\}$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_s$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $j$  a  $i$  más el camino más corto de  $i$  a  $s$ , con  $s \in V_R \cup \{1\}$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_s$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $i$  a  $j$  más el camino más corto de  $j$  a  $s$ , con  $a = (s, l) \in A_R$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_a$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $j$  a  $i$  más el camino más corto de  $i$  a  $s$ , con  $a = (s, l) \in A_R$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_a$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $i$  a  $j$  más el camino más corto de  $j$  a  $s$ , con  $f = (s, l) \in E_R$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_f$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $j$  a  $i$  más el camino más corto de  $i$  a  $s$ , con  $f = (s, l) \in E_R$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_f$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $i$  a  $j$  más el camino más corto de  $j$  a  $l$ , con  $f = (s, l) \in E_R$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_f$ .
- La arista  $e = (i, j) \in E_R$  recorrida de  $j$  a  $i$  más el camino más corto de  $i$  a  $l$ , con  $f = (s, l) \in E_R$ , si  $r = v_e$  y  $p = v_f$ .
- Nada si  $(r, p) = (v_e, v_e)$  o  $(r, p) = (v_e, v_e)$  para algún  $e \in E_R$ .

Es evidente que tras sustituir cada arco de  $C_i$  por su correspondiente sección en  $G$ , obtenemos un tour  $T_i$  en  $G$  que empieza y acaba en el depósito, y que el conjunto de tours  $S_L = \{T_i\}_{i=1}^k$  es una solución al PGRC -  $m$  en  $G$ , siendo su coste  $c(S_L) = c^*(L) + |E_R| M$ .

Además, cada solución óptima al PRVC -  $d$  en  $G^*$  es de este tipo, esto es, para cada arista  $e \in E_R$ , o bien

el arco  $(v_e, v_e)$  a bien el arco  $(v_e, v_e)$  pertenece a un ciclo  $C_i$  en la solución, ya que en caso contrario, dada una solución  $S$  al  $PGRC - m$  con coste  $c(S)$ , esta solución proporciona una solución  $L_s$  al  $PRVC - d$  con coste  $c^*(L_s) \leq c(S) - |E_R| M$ . Si  $L^0$  es una solución óptima al  $PRVC - d$  en  $G^*$  no de este tipo, tendrá como mucho  $|E_R| - 1$  arcos con coste  $-M$ ; luego, como  $M$  es un número positivo muy grande, tendremos que:  $c^*(L^0) > -(|E_R| - 1)M > -|E_R| M + c(S) \geq c^*(L_s)$  por lo que  $L^0$  no es una solución óptima, lo que es una contradicción.

Finalmente, tenemos que ver que una solución óptima al  $PRVC - d$  en  $G^*$  produce una solución óptima al  $PGRC - m$  en  $G$ . Sea  $L^0$  una solución óptima al  $PRVC - d$  en  $G^*$  y sea  $S$  una solución al  $PGRC - m$  en  $G$ , tenemos que:

$$c(S) > c^*(L_s) + |E_R| M > c^*(L^0) + |E_R| M = c(S_L^0)$$

Por consiguiente,  $S_L^0$  es una solución óptima al  $PGRC - m$  en  $G$ .

Volviendo al ejemplo dado en la Figura 1, si resolvemos el  $PRVC - d$  en  $G^*$ , obtenemos la solución óptima dada por los dos ciclos:

$$C_1 = (v_1, v_5) (v_5, v_b) (v_b, v_3) (v_3, v_e) (v_e, v_e) (v_e, v_4) (v_4, v_1) \text{ y}$$

$$C_2 = (v_1, v_6) (v_6, v_7) (v_7, v_d) (v_d, v_2) (v_2, v_1)$$

La Figura 2 muestra los dos ciclos en  $G^*$ . Los arcos de  $C_1$  están formados por puntos mientras que los arcos de  $C_2$  están dados con línea continua.

Esta solución al  $PRVC - d$  en  $G^*$  produce la solución óptima al  $PGRC - m$  en  $G$ , compuesta por los dos tours:

-  $T_1 = (1, 8) (8, 5) (5, 3) (3, 4) (4, 3) (3, 2) (2, 1)$  con coste 38 y una demanda satisfecha de 100 unidades:  $q_3 = 30, q_5 = 20, q_4 = 10, q_{33} = 20$  y  $q_{34} = 20$ , (ver Figura 3).

-  $T_2 = (1, 6) (6, 7) (7, 6) (6, 2) (2, 1)$  con coste 25 y una demanda satisfecha de 100 unidades:  $q_2 = 30, q_6 = 10, q_7 = 40$  y  $q_{62} = 20$ , (ver Figura 4).

El coste total de esta solución es entonces 63.

FIGURA 2  
Solución óptima al  $PRVC - d$  en  $G^*$

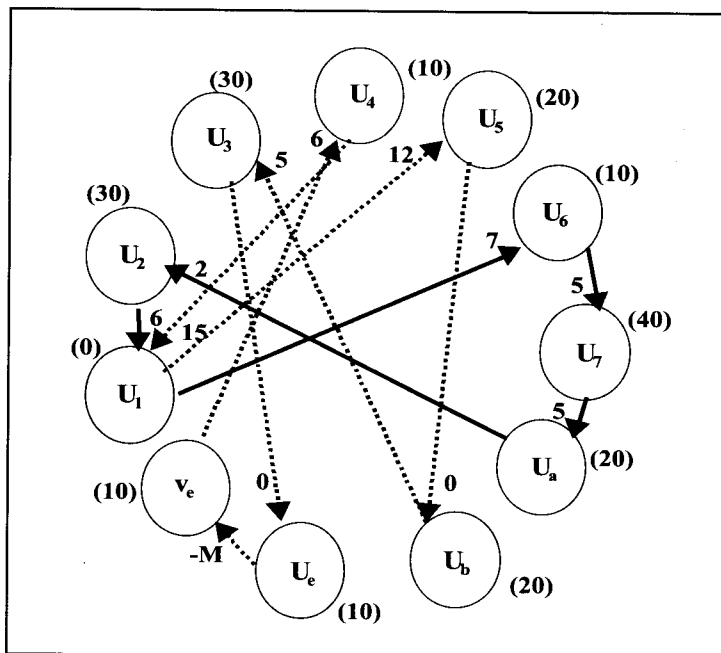


FIGURA 3  
Primera ruta (arco con línea punteada) de la solución al PGRC -  $m$  en  $G$

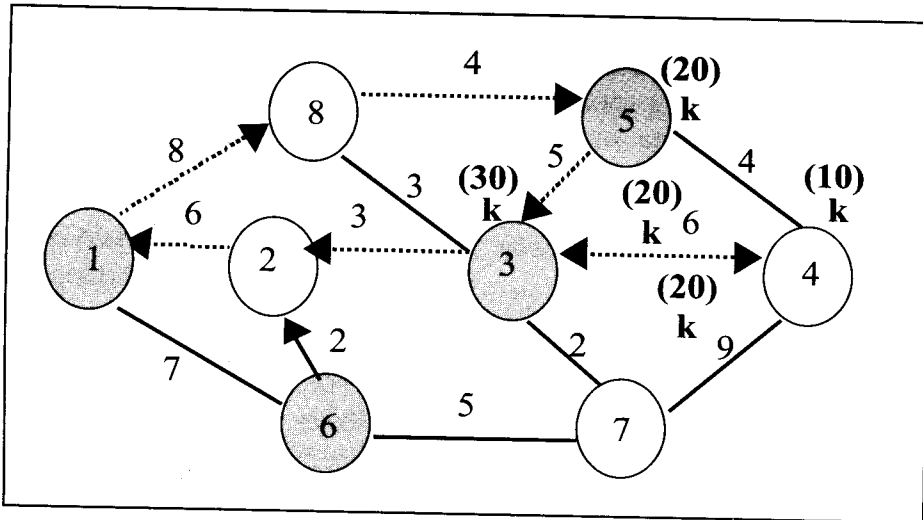
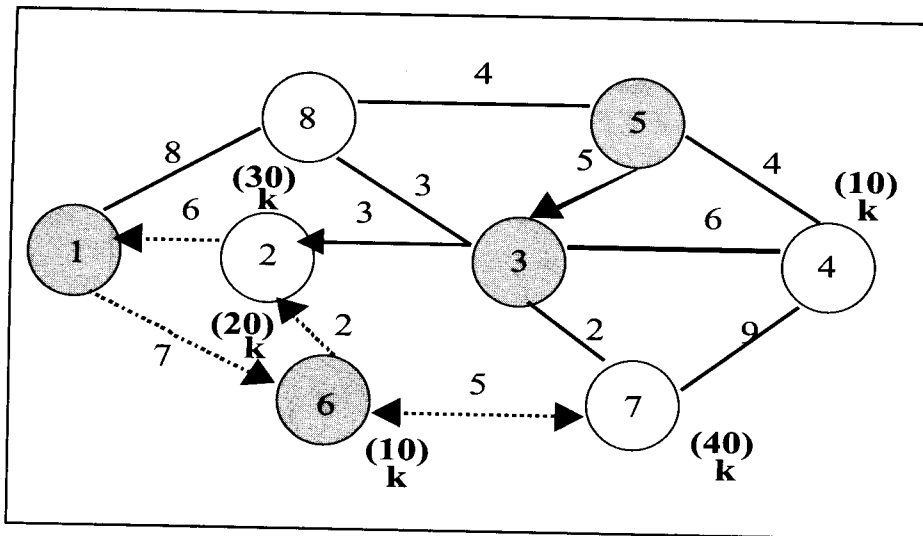


FIGURA 4  
Segunda ruta (arco con línea punteada) de la solución al PGRC -  $m$  en  $G$



#### 4. EL PROBLEMA GENERAL DE RUTAS CON CAPACIDADES VENTOSO

De cara a resolver algunos problemas reales de rutas de vehículos, puede ser más apropiado asociar dos costes a cada arista: el coste de atravesarla en una dirección y el coste de atravesarla en la dirección opuesta. Esto puede ocurrir por ejemplo cuando en

una carretera o calle una dirección es cuesta arriba y la otra, por tanto, pendiente abajo, o una dirección es a favor del viento y la otra en contra del viento. Varios artículos relativos a problemas de rutas con un solo vehículo han tenido en cuenta esta característica; ver por ejemplo Grötschel y Win (1992), Pearn y Li (1994) y Laporte (1997).



Presentamos en esta sección una generalización del *PGRC - m* en la que las aristas pueden tener dos costes diferentes asociados, una por cada dirección. Veremos que esta generalización puede ser transformada también en un *PRVC - d*, de forma que también podemos resolver esta generalización tanto óptima como heurísticamente. Esta transformación, como es de esperar, es muy similar a la dada para el *PGRC - m*, pero teniendo en cuenta que el coste de atravesar una arista depende de la dirección en que ésta ha sido atravesada, debemos prestar atención a la hora de calcular caminos más cortos en  $G$ . Por consiguiente, expondremos esta transformación lo más brevemente posible.

Definimos el Problema General de Rutas con Capacidades Ventoso (*PGRC- v*) como sigue:

Sea  $G = (V, E \cup A)$  un grafo fuertemente conexo, donde: cada arco  $a \in A$  tiene asociado un coste  $c^a \geq 0$  de ser atravesado; cada arista  $e = (i, j) \in E$  tiene asociados dos costes: un coste  $c_{ij}^e \geq 0$  de atravesar  $e$  yendo de  $i$  a  $j$ , y un coste  $c_{ji}^e \geq 0$  de atravesar  $e$  yendo de  $j$  a  $i$ ; el vértice  $l$  representa un depósito donde hay  $k$  vehículos, todos ellos con capacidad  $W$ , existe un conjunto  $V_R \subseteq V$  tal que cada vértice  $i \in V_R$  tiene asociado una demanda positiva  $q_i \leq W$ , existe un conjunto  $A_R \subseteq A$  tal que cada arco  $(i, j) \in A_R$  tiene asociado una demanda positiva  $q_{ij} \leq W$ , existe un conjunto  $E_R \subseteq E$  tal que cada arista  $(i, j) \in E_R$  tiene asociada una demanda positiva  $q_{ij} \leq W$  y la suma de todas las demandas es no mayor que  $kW$ .

Encontrar  $k$  tours en  $G$ , uno para cada vehículo, tal que cada tour pasa por el depósito, las demandas en  $V_R$ ,  $A_R$  y  $E_R$  son satisfechas, la demanda total asumida por cada vehículo no excede  $W$ , cada demanda es asumida por un solo vehículo y la suma de los costes de los tours es mínima.

Como en el *PGRC - m*, asumimos que  $k$  es el mínimo número de vehículos necesarios para atender todas las demandas.

En el caso particular en que  $c_{ji}^e = c_{ij}^e$  para toda  $e = (i, j) \in E$ , tenemos obviamente el *PGRC - m* y en el caso particular en que  $k = 1$  y  $V_R = \emptyset$  tenemos

la generalización del Problema del Cartero Rural resuelta por Laporte (1997).

El *PGRC - v* puede también transformarse en su caso particular, el *PRVC - d*; dado un *PGRC - v* definido en un grafo  $G = (V, E \cup A)$ , construimos un grafo dirigido completo auxiliar  $G^{**} = (V^{**}, A^{**})$ , donde:

$V^{**} = V^*$ , esto es, el mismo conjunto de vértices correspondiente al grafo auxiliar  $G^*$  visto en la Sección 2, y con la misma asignación de demandas a sus vértices.

$A^{**} = A^*$ , esto es, el mismo conjunto de arcos correspondiente al grafo auxiliar  $G^*$  visto en la Sección 2. y con la misma asignación de costes, excepto para los siguientes arcos, correspondientes a caminos en  $G$  que empiezan en arista:

- Por cada par de aristas diferentes  $a = (i, j), b = (k, l) \in E_R$ :
  - $(v_a, v_b)$  tiene coste  $c_{ji}^a + cmc(i, k)$ .
  - $(v_a, v_b)$  tiene coste  $c_{ji}^a + cmc(i, l)$ .
  - $(v_b, v_a)$  tiene coste  $c_{lk}^b + cmc(k, i)$ .
  - $(v_b, v_a)$  tiene coste  $c_{lk}^b + cmc(k, j)$ .
  - $(v_a, v_b)$  tiene coste  $c_{ij}^a + cmc(j, k)$ .
  - $(v_a, v_b)$  tiene coste  $c_{ij}^a + cmc(j, l)$ .
  - $(v_b, v_a)$  tiene coste  $c_{kl}^b + cmc(l, i)$ .
  - $(v_b, v_a)$  tiene coste  $c_{kl}^b + cmc(l, j)$ .
- Por cada par consistente en un vértice  $i \in V_R \cup \{l\}$  y una arista  $e = (j, l) \in E_R$ :
  - $(v_i, v_i)$  tiene coste  $c_{jl}^e + cmc(j, i)$ .
  - $(v_i, v_i)$  tiene coste  $c_{jl}^e + cmc(l, i)$ .
- Por cada par consistente en un arco  $a = (i, j) \in A_R$  y una arista  $e = (k, l) \in E_R$ :
  - $(v_e, v_a)$  tiene coste  $c_{lk}^e + cmc(k, i)$ .
  - $(v_e, v_a)$  tiene coste  $c_{lk}^e + cmc(l, i)$ .

## Teorema 2

El PGRC -  $v$  puede ser transformado en tiempo polinomial en un PRVC -  $d$  en su grafo auxiliar dirigido  $G^{**}$ .

La demostración es la misma que la dada para el Teorema 1, pero cambiando el superíndice  $*$  por  $**$  y PGRC -  $m$  por PGRC -  $v$ .

## 5. CONCLUSIONES

El Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos (PGRC -  $m$ ) generaliza muchos problemas importantes de rutas, como el Problema de Rutas por Arcos con Capacidades o El Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades. No se conoce ningún algoritmo para su resolución óptima. Hemos presentado aquí una transformación polinomial del PGRC -  $m$  y su generalización a situaciones "ventosas" al Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades en Grafos Dirigidos, para el que al menos han sido implementados dos algoritmos exactos, de forma que podemos resolver el PGRC -  $m$  óptimamente.

En la literatura de Investigación Operativa hemos encontrado transformaciones de tres casos particulares del PGRC -  $v$  en problemas de rutas por vértices:

- La dada por Laporte (1997) al caso particular en que  $k = 1$  y  $V_R = \emptyset$ . A pesar de que la forma de construir el grafo  $G^*$  es diferente a la dada por Laporte, el grafo resultante es el mismo en ambas construcciones, a excepción de los costes de los arcos. De hecho, en este caso particular, nuestra transformación resulta en un caso particular del dado por Corberán, Martí, Martínez y Soler (2002) para el "Problema del Cartero Rural Mixto con Giros Penalizados".
- La dada por Pearn, Assad y Golden (1987) para el (no dirigido) PRAC. Su grafo transformado tiene  $3|E_R| + 1$  vértices, mientras que  $G^*$  tiene  $2|E_R| + 1$  para el mismo caso.

- La dada por Mullaseril y Dror (1997) para el PRAC en un grafo mixto con ventanas de tiempo en el que solo los arcos son requeridos. Aunque esta transformación describe un problema diferente, si no consideramos las ventanas de tiempo, su grafo dirigido auxiliar es prácticamente el mismo que el nuestro excepto por los costes de los arcos y la no existencia del vértice depósito.

Ya que la transformación para el PGRC -  $v$  descrita en este artículo es similar o mejor que las existentes para algunos casos particulares de este problema y nos permite resolver el problema (y por tanto cualquier caso particular de él) tanto óptimamente, por ejemplo con el algoritmo de Fischetti, Toth y Vigo (1994), como heurísticamente, por ejemplo con el algoritmo de Vigo (1996), pensamos que esta transformación puede considerarse una buena herramienta para probar la eficiencia de algoritmos exactos o heurísticos futuros para el PGRC -  $v$ , para algunos casos particulares o incluso para problemas similares.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ángel, J. C., Soler, D., Hervás, A., 2001. *Un nuevo heurístico para el problema general de rutas con capacidades*. Proceedings of the XVII Congreso de Ecuaciones Diferenciales/VII Congreso de Matemática Aplicada. Salamanca, Spain, September.
- Ángel, J. C., Soler, D., Hervás, A., 2002. *The capacitated general routing problem on mixed graphs*. Forthcoming in Investigación Operacional 23.
- Barbarosoglu, G., Ozgur, D., 1999. *A tabu search algorithm for the vehicle routing problem*, Computer & Operations Research 26 255-270.
- Corberán, A., Letchford, A. N., Sanchís, J. M., 2001. *A cutting plane algorithm for the general routing problem*, Mathematical Programming 90 (2) 291-316.

- Corberán, A., Martí, R., Martínez, E., Soler, D., 2002. *The rural postman problem on mixed graphs with turn penalties*, Computers & Operations Research 29 887-903.
- Dror, M. (ed), 2000. *Arc routing problems: theory, solutions and applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Fischetti, M., Toth, P., Vigo, D., 1994. *A branch and bound algorithm for the capacitated vehicle routing problem on directed graphs*, Operations Research 42 (5) 846-859.
- Ghiani, G., Hertz, G., Laporte, G., 2001. *Recent algorithmic advances for arc routing problems*. Submitted to *Putting Theory into Practice*, edited by E. Kozan and A.A. Ohuchi. Kluwer, New York.
- Grötschel, M., Win, Z., 1992. *A cutting plane algorithm for the windy postman problem*, Mathematical Programming 55 339-358.
- Laporte, G., Mercure, H., Nobert, Y., 1986. *An exact algorithm for the asymmetrical capacitated arc routing problem*, Networks 16 33-46.
- Laporte, G., 1997. *Modeling and solving several classes of arc routing problems as traveling salesman problems*, Computers & Operations Research 24 1057-1061.
- López, M., 1998. *Optimización mediante técnicas de simulación Monte Carlo del recorrido del servicio de recogida de residuos en el municipio de Aldaya (Valencia): caso de trazado urbano con alto número de calles con sentido de circulación prohibido*. Proyecto final de carrera. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia.
- Mullaseril, P.A., Dror, M., 1997. *A set covering approach for directed node and arc routing problems with split delivery and time windows*. Working Paper, MIS Department, University of Arizona, Tucson, Arizona 85721.
- Pearn, W.L., Assad, A., Golden, B.L., 1987. *Transforming arc routing into node routing problems*, Computers & Operations Research 14 285-288.
- Pearn, W.L., Li, M.L., 1994. *Algorithms for the windy postman problem*, Computers & Operations Research 21 641-651.
- Vigo, D., 1996. *A heuristic algorithm for the asymmetric capacitated vehicle routing problem*, European Journal of Operational Research 89 108-126.