Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica

Manuel Sierra

RESUMEN

La negación clásica prohíbe la compatibilidad de un enunciado con su negación y las indeterminaciones respecto a la negación. El sistema presentado en este trabajo es una generalización de la lógica clásica. En él se tiene un operador llamado "negación débil", el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación ni las indeterminaciones respecto a la negación.

ABSTRACT

The usual negation prohibits the compatibility of a proposition with its negation and indetermination with respect to the negation. The system presented in this work is a generalization of the classical logic. In it there is new a operator called «weak negation», which has the characteristic of not prohibiting the compatibility of a proposition with its negation nor indetermination with respect to the negation.

PALABRAS CLAVES

Inconsistencia. Indeterminación. Negación fuerte y negación débil.

1. INTRODUCCIÓN[1]

El operador "negación clásica", simbolizado "$\sim$", está caracterizado desde el punto de vista semántico por la siguiente equivalencia:

A es aceptado $\Leftrightarrow$ $\sim$ A no es aceptado

Esta equivalencia dice que un enunciado es aceptado si y solamente si su negación no es aceptada. En ella pueden leerse 4 enunciados condicionales:

A es aceptado $\Rightarrow$ $\sim$A no es aceptado
$\sim$ A es aceptado $\Rightarrow$ A no es aceptado
A no es aceptado $\Rightarrow$ $\sim$A es aceptado
$\sim$A no es aceptado $\Rightarrow$ A es aceptado

los dos primeros son equivalentes y prohíben que un enunciado y su negación sean ambos aceptados, es decir, prohíbe que un enunciado sea compatible con su negación, los dos últimos son equivalentes y prohíben que un enunciado y su negación sean ambos no aceptados, es decir, prohíbe las indeterminaciones respecto a la negación. La negación clásica prohíbe la compatibilidad de un enunciado con su negación y las indeterminaciones respecto a la negación. El sistema presentado en este trabajo es una generalización de la lógica clásica en el cual se tiene un operador llamado "negación débil", el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación ni la indeterminacione respecto a la negación.

2. SISTEMA DEDUCTIVO [2]

AXIOMAS PARA LA LÓGICA POSITIVA CLÁSICA

Axiomas para el condicional ($\rightarrow$)

AXIOMA 1.
Irrelevancia del antecedente. Si el consecuente de un condicional es aceptado entonces el condicional es aceptado.

$$A\rightarrow(B\rightarrow A)$$

1. Este sistema deductivo fue presentado por primera vez en el VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas celebrado en la ciudad de Pasto en septiembre de 2001.

MANUEL SIERRA A. Escuela de Ciencias y Humanidades, Universidad EAFIT, Medellín.
E-mail: msierra@eafit.edu.co

2. El lenguaje consta de los conectivos binarios $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$; los conectivos unarios $\{\sim, \neg, \mathrm{I}, \mathrm{C}\}$; los símbolos de puntuación {), (}; el conjunto de Fórmulas (enunciados) es generado recursivamente con los conectivos a partir del conjunto de enunciados atómicos {p1, p2, ...}. Se escribirá A^{I} en vez de I(A), y A^{C} en vez de C(A).

AXIOMA 2.
Distributividad de $\rightarrow$.
Si al aceptar dos enunciados se acepta un tercero y si del primero se sigue el segundo entonces al aceptar el primero se acepta el tercero.

$$[A\rightarrow(B\rightarrow C)]\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)]$$

AXIOMA 3.
Ley de Peirce.
Si se acepta que de un condicional se siga su antecedente entonces se acepta el antecedente.

$$[(A\rightarrow B)\rightarrow A]\rightarrow A$$

Axiomas para la Disyunción ($\vee$)

AXIOMA 4.
Introducción de la disyunción en el consecuente. Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de este con cualquier otro.

$$A\rightarrow(A\vee B)$$

AXIOMA 5.
Introducción de la disyunción en el consecuente. Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de cualquier otro con éste.

$$A\rightarrow(B\vee A)$$

AXIOMA 6.
Introducción de la disyunción en el antecedente. Un condicional con una disyunción de antecedente es aceptado cuando de cada uno de los disyuntos se sigue se sigue el consecuente.

$$(B\rightarrow A)\rightarrow[(C\rightarrow A)\rightarrow\{(B\vee C)\rightarrow A\}]$$

Axiomas para la conjunción ($\wedge$)

AXIOMA 7.
Eliminación de la conjunción. Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto izquierdo.

$$(A\wedge B)\rightarrow A$$

AXIOMA 8.
Eliminación de la conjunción. Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto derecho.

$$(A\wedge B)\rightarrow B$$

AXIOMA 9.
Introducción de la conjunción en el consecuente. Se acepta que una conjunción se siga de un enunciado cuando de este se siguen cada uno de los coyuntos.

$$(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow C)\rightarrow\{A\rightarrow(B\wedge C)\}]$$

Axiomas para la negación clásica ($\sim$):

AXIOMA 10.
Principio de trivialización. Se acepta un enunciado arbitrario cuando algún enunciado rechazado es aceptado.

$$A\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$$

AXIOMA 11.
Principio de bivalencia. Un enunciado es aceptado o es rechazado[3].

$$A\vee\sim A$$

Axiomas para la negación débil ($\neg$):

AXIOMA 12.
AI A$\neg$ (Afirmación de la Incompatibilidad Afirmación de la Negación).

Si un enunciado es incompatible con su negación[4] y se cuestiona entonces el enunciado es rechazado.

$$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$$

AXIOMA 13.
FI (Falsedad de la Incompatibilidad).

Si un enunciado es compatible[5] con su negación entonces se acepta y se cuestiona.

$$\sim A^{I}\rightarrow(\neg A\wedge A)$$

---

3. Rechazar significa no aceptar.

4. Exactamente sería: incompatible con su negación débil, pero se omite el débil ya que un enunciado siempre es incompatible con su negación fuerte. Intuitivamente un enunciado α es Incompatible con su negación si no ocurre que éste sea aceptado y cuestionado.

5. Compatible significa no incompatible.

AXIOMA 14.
ACFA¬ (Afirmación de la Completez[6]. Falsedad del Alcance de la Negación). Si un enunciado es determinable y rechazado entonces es cuestionado.

$$\mathbf{A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)}$$

AXIOMA 15.
FC (Falsedad de la Completez).

Si un enunciado es indeterminable[7] entonces ni él ni su negación son aceptados.

$$\mathbf{\sim A^C \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)}$$

Regla de inferencia

Mp (Modus Ponens).

Si un condicional y su antecedente son aceptados entonces es aceptado su consecuente:

$$\mathbf{A,\ A \rightarrow B \vdash B}$$

3. ALGUNOS TEOREMAS[8]

Teorema 1.

ACF¬ (Afirmación de la Completez y Falsedad de la Negación). Si un enunciado es determinable y se no se cuestiona entonces es aceptado.

$$\mathbf{A^C \rightarrow (\sim\neg A \rightarrow A)}$$

Prueba:

1.	$A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA¬
2.	$A^C \rightarrow (\sim\neg A \rightarrow A)$	Transposición[9] en 1

Teorema 2.

AI AA¬ (Afirmación de la Incompatibilidad y Afirmación del Alcance de la Negación).

Si un enunciado es incompatible con su negación y es aceptado entonces no se cuestiona.

$$\mathbf{A^I \rightarrow (A \rightarrow \sim\neg A)}$$

Prueba:

1.	$A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬
2.	$A^I \rightarrow (A \rightarrow \neg\sim A)$	Transposición en 1

Teorema 3.

F¬FA¬C (Falsedad de la Negación y Falsedad del Alcance de la Negación en la Completez). Si un enunciado no es cuestionado y no es aceptado entonces es indeterminable.

$$\mathbf{\sim\neg A \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim A^C)}$$

Prueba:

1.	$A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA¬
2.	$\sim A \rightarrow (A^C \rightarrow \neg A)$	Intercambio[10] en 1
3.	$\sim(A^C \rightarrow \neg A) \rightarrow A$	Transposición en 2
4.	$(A^C \wedge \sim\neg A) \rightarrow A$	Negación del condicional[11] en 3
5.	$(\sim\neg A \wedge A^C) \rightarrow A$	Conmutatividad de la conjunción[12] en 4
6.	$\sim\neg A \rightarrow (A^C \rightarrow A)$	Exportación[13] en 5
7.	$\sim\neg A \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim A^C)$	Transposición en 6

6. Intuitivamente un enunciado α es Completo o Determinable (respecto a la negación débil) si ocurre que este sea aceptado o cuestionado.
7. Indeterminable significa no completo, no determinable.
8. Un enunciado A es un teorema (I-A) si y solamente si existe una prueba del enunciado A a partir de los axiomas, es decir, si existe una secuencia de enunciados de los cuales el enunciado A es el último y los demás son axiomas o se obtienen a partir de enunciados anteriores utilizando la regla de inferencia Modus ponens.
9. De $\sim X \rightarrow Y$ se sigue $\sim Y \rightarrow X$. De $X \rightarrow \sim Y$ se sigue $Y \rightarrow \sim X$. De $X \rightarrow Y$ se sigue $\sim Y \rightarrow \sim X$. De $\sim X \rightarrow \sim Y$ se sigue $Y \rightarrow X$.
10. De $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ se sigue $Y \rightarrow (X \rightarrow Z)$
11. De $\sim(X \rightarrow Y)$ se sigue $X \wedge \sim Y$. De $X \wedge \sim Y$ se sigue $\sim(X \rightarrow Y)$.
12. De $X \wedge Y$ se sigue $Y \wedge X$.
13. De $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ se sigue $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$.

Teorema 4.

AA¬A¬I (Afirmación del Alcance de la Negación y Afirmación de la Negación en la Incompatibilidad).

Si un enunciado es aceptado y cuestionado entonces es compatible con su negación.

$$\mathbf{A\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A^{I})}$$

Prueba:

1. $A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$ AIA¬
2. $A^{I}\rightarrow(A\rightarrow\sim\neg A)$ Transposición en 1
3. $A\rightarrow(A^{I}\rightarrow\sim\neg A)$ Intercambio en 2
4. $A\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A^{I})$ Transposición en 3

Teorema 5.

A¬C (Afirmación de la Negación en la Completez).

Si un enunciado es cuestionado entonces es determinable.

$$\mathbf{\neg A\rightarrow A^{C}}$$

Prueba:

1. $\sim A^{C}\rightarrow(\sim\neg A\wedge\sim A)$ FC
2. $\sim A^{C}\rightarrow\sim\neg A$ Simplificación[14] en 1
3. $\neg A\rightarrow A^{C}$ Transposición en 2

Teorema 6.

AA¬C (Afirmación del Alcance de la Negación en la Completez).

Si un enunciado es aceptado entonces es determinable.

$$\mathbf{A\rightarrow A^{C}}$$

Prueba:

1. $\sim A^{C}\rightarrow(\sim\neg A\wedge\sim A)$ FC
2. $\sim A^{C}\rightarrow\sim A$ Simplificación en 1
3. $A\rightarrow A^{C}$ Transposición en 2

Como caso particular se tiene:

Si un enunciado es determinable entonces el enunciado que dice que es determinable también es determinable.

$$\mathbf{A^{C}\rightarrow(A^{C})^{C}}$$

Como consecuencia inmediata se tiene:

Si un enunciado es aceptado entonces el enunciado que dice que es determinable es determinable.

$$\mathbf{A\rightarrow(A^{C})^{C}}$$

Teorema 7.

FA¬I (Falsedad del Alcance de la Negación en la Incompatibilidad).

Si un enunciado no es aceptado entonces es incompatible con su negación.

$$\mathbf{\sim A\rightarrow A^{I}}$$

Prueba:

1. $\sim A^{I}\rightarrow(\neg A\wedge A)$ FI
2. $\sim A^{I}\rightarrow A$ Simplificación en 1
3. $\sim A\rightarrow A^{I}$ Transposición en 2

Teorema 8.

F¬I (Falsedad de la Negación en la Incompatibilidad).

Si un enunciado no es cuestionado entonces es incompatible con su negación.

$$\mathbf{\sim\neg A\rightarrow A^{I}}$$

Prueba:

1. $\sim A^{I}\rightarrow(\neg A\wedge A)$ FI
2. $\sim A^{I}\rightarrow\neg A$ Simplificación en 1
3. $\sim\neg A\rightarrow A^{I}$ Transposición en 2

Teorema 9.

FIFC (Falsedad de la Incompatibilidad y Falsedad de la Completez).

Si un enunciado es compatible con su negación y es indeterminable entonces todo es aceptado. Esto significa que no puede ocurrir que un enunciado sea compatible con su negación e indeterminable.

$$\mathbf{\sim A^{I}\rightarrow(\sim A^{C}\rightarrow B)}$$

14. De $Z\rightarrow(X\wedge Y)$ se sigue $Z\rightarrow X$. De $Z\rightarrow(X\wedge Y)$ se sigue $Z\rightarrow Y$.

Prueba:

1.	$\sim A^{I}$	Premisa 1
2.	$\sim A^{C}$	Premisa 2
3.	$\sim A^{I} \rightarrow (\neg A \wedge A)$	FI
4.	$\neg A \wedge A$	Modus ponens en 1 y 3
5.	A	Simplificación en 4
6.	$\sim A^{C} \rightarrow (\sim\neg A \wedge \sim A)$	FC
7.	$\sim\neg A \wedge \sim A$	Modus ponens en 2 y 6
8.	$\sim A$	Simplificación en 7
9.	$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$	A10 Principio de trivialización
10.	$\sim A \rightarrow B$	Modus ponens en 5 y 9
11.	B	Modus ponens en 8 y 10
12.	$\sim A^{C} \rightarrow B$	MDC[15] en 2 y 11
13.	$\sim A^{I} \rightarrow (\sim A^{C} \rightarrow B)$	MDC en 1 y 12

Teorema 10.

AIoAC (Afirmación de la Incompatibilidad o Afirmación de la Completez).

Un enunciado es incompatible con su negación o es determinable.

$$A^{I} \vee A^{C}$$

Prueba:

1.	$\sim A^{I}$	Premisa
2.	$\sim A^{I} \rightarrow A \wedge \neg A$	FI
3.	$A \wedge \neg A$	Modus ponens en 1 y 2
4.	A	Simplificación en 3
5.	$A \rightarrow A^{C}$	AA¬C
6.	A^{C}	Modus ponens 4 y 5
7.	$\sim A^{I} \rightarrow A^{C}$	MDC en 1 y 6
8.	$A^{I} \vee A^{C}$	Implicación disyunción[16] en 7

Como consecuencia inmediata se tiene que si un enunciado es compatible con su negación entonces dicho enunciado es determinable.

$$\sim A^{I} \rightarrow A^{C}$$

También se concluye que si un enunciado es indeterminable entonces es incompatible su negación.

$$\sim A^{C} \rightarrow A^{I}$$

Teorema 11.

Propagación de la incompatibilidad.

Si un enunciado es incompatible con su negación entonces el enunciado que lo acepta y cuestiona también es incompatible con su negación.

$$A^{I} \rightarrow (A \wedge \neg A)^{I}$$

Prueba:

1.	A^{I}	Premisa
2.	$A^{I} \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬
3.	$\neg A \rightarrow \sim A$	Modus ponens en 1 y 2
4.	$A \vee \sim A$	Tercero excluido[17]
5.	$A \rightarrow \sim\neg A$	Transposición en 3
6.	$\sim A \rightarrow \sim A$	Identidad[18]
7.	$\sim A \vee \sim\neg A$	Dilema constructivo[19] en 4, 5 y 6
8.	$\sim(A \wedge \neg A)$	DeMorgan[20] en 7
9.	$\sim(A \wedge \neg A) \rightarrow (A \wedge \neg A)^{I}$	FA¬I T7
10.	$(A \wedge \neg A)^{I}$	Modus ponens en 8 y 9
11.	$A^{I} \rightarrow (A \wedge \neg A)^{I}$	MDC en 1 y 10

15. Método de demostración condicional. Si de X1, ..., Xn, Y se sigue Z entonces de X1, ..., Xn se sigue $Y \rightarrow Z$.
16. De $X \rightarrow Y$ se sigue $\sim X \vee Y$. De $\sim X \rightarrow Y$ se sigue $X \vee Y$.
17. Principio del tercero excluido es otro nombre para el principio de bivalencia (axioma 11).
18. El principio de identidad dice: $X \rightarrow X$.
19. De $X \vee Y$, $X \rightarrow Z$, $Y \rightarrow T$ se sigue $Z \vee T$. De $X \vee Y$, $X \rightarrow Z$, $Y \rightarrow Z$ se sigue Z.
20. De $\sim(X \wedge Y)$ se sigue $\sim X \vee \sim Y$. De $\sim X \vee \sim Y$ se sigue $\sim(X \wedge Y)$. De $\sim(X \vee Y)$ se sigue $\sim X \wedge \sim Y$. De $\sim X \wedge \sim Y$ se sigue $\sim(X \vee Y)$.

Teorema 12.

Propagación de la completez.

Si un enunciado es determinable entonces el enunciado que lo acepta o cuestiona es determinable.

$$\mathbf{A^C \rightarrow (A \vee \neg A)^C}$$

Prueba:

1.	A^C	Premisa
2.	$A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA¬
3.	$\sim A \rightarrow \neg A$	Modus ponens en 1 y 2
4.	$A \vee \neg A$	Implicación disyunción en 3
5.	$(A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg A)^C$	AA¬C T6
6.	$(A \vee \neg A)^C$	Modus ponens en 4 y 5
7.	$A^C \rightarrow (A \vee \neg A)^C$	MDC en 1 y 6

Teorema 13.

Si un enunciado es compatible con su negación entonces el enunciado que lo acepta o cuestiona es determinable.

$$\mathbf{\sim A^I \rightarrow (A \vee \neg A)^C}$$

Prueba:

1.	$A^I \vee A^C$	T10 AIoAC
2.	$\sim A^I \rightarrow A^C$	Implicación disyunción en 1
3.	$A^C \rightarrow (A \vee \neg A)^C$	T12
4.	$\sim A^I \rightarrow (A \vee \neg A)^C$	Silogismo Hipotético[21] en 2 y 3

Teorema 14.

Si un enunciado es indeterminable entonces el enunciado que lo acepta o cuestiona es incompatible con su negación.

$$\mathbf{\sim A^C \rightarrow (A \vee \neg A)^I}$$

Prueba:

1.	$\sim A^C \rightarrow (\sim \neg A \wedge \sim A)$	FC
2.	$(\sim \neg A \wedge \sim A) \rightarrow \sim(\neg A \vee A)$	DeMorgan
3.	$\sim(\neg A \vee A) \rightarrow (\neg A \vee A)^I$	T7 FA¬I
4.	$\sim A^C \rightarrow (\neg A \vee A)^I$	Silogismo Hipotético en 1, 2 y 3

Teorema 15.

Si un enunciado es compatible con su negación entonces el enunciado que lo acepta y cuestiona es determinable.

$$\mathbf{\sim A^I \rightarrow (A \wedge \neg A)^C}$$

Prueba:

1.	$\sim A^I \rightarrow A \wedge \neg A$	FI
2.	$A \wedge \neg A \rightarrow (A \wedge \neg A)^C$	T6 AA¬C
3.	$\sim A^I \rightarrow (A \wedge \neg A)^C$	Silogismo Hipotético en 1 y 2

Teorema 16.

Si un enunciado es indeterminable entonces el enunciado que lo acepta y cuestiona es incompatible con su negación.

$$\mathbf{\sim A^C \rightarrow (A \wedge \neg A)^I}$$

Prueba:

1.	$\sim A^C \rightarrow (\sim \neg A \wedge \sim A)$	FC
2.	$\sim A^C \rightarrow \sim \neg A$	Simplificación en 1
3.	$\sim A^C \rightarrow (\sim \neg A \vee \sim A)$	Adición[22] en 2
4.	$(\sim \neg A \vee \sim A) \rightarrow \sim(\neg A \wedge A)$	DeMorgan
5.	$\sim(\neg A \wedge A) \rightarrow (\neg A \wedge A)^I$	T7 FA¬I
6.	$\sim A^C \rightarrow (\neg A \wedge A)^I$	Silogismo Hipotético en 3, 4 y 5

Teorema 17.

Principio de bivalencia.

Si un enunciado se acepta o se cuestiona entonces es determinable.

$$\mathbf{(A \vee \neg A) \rightarrow A^C}$$

21. De $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow Z$ se sigue $X \rightarrow Z$.

22. De $Z \rightarrow X$ se sigue $Z \rightarrow (X \vee Y)$. De $Z \rightarrow Y$ se sigue $Z \rightarrow (X \vee Y)$.

Prueba:

1. $\sim A^C \to (\sim\neg A \wedge \sim A)$ FC
2. $\sim(\sim\neg A \wedge \sim A) \to A^C$ Transposición en 1
3. $(\neg A \vee A) \to A^C$ DeMorgan en 2

Teorema 18.

Principio de bivalencia.

Si un enunciado es determinable entonces se acepta o se cuestiona.

$$\mathbf{A^C \to (A \vee \neg A)}$$

Prueba:

1. $A^C \to (\sim A \to \neg A)$ ACFA¬
2. $A^C \to (A \vee \neg A)$ Implicación disyunción en 1

De los dos resultados anteriores se puede concluir la siguiente caracterización de A^C:

Los enunciados completos (determinables) son los que se aceptan o se cuestionan.

$$\mathbf{A^C \leftrightarrow^{23} (A \vee \neg A)}$$

Los enunciados incompletos (indeterminables) son los que ni se aceptan ni se cuestionan.

$$\mathbf{\sim A^C \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim\neg A)}$$

Teorema 19.

Compatibilidad con la negación.

Si un enunciado se acepta y se cuestiona entonces es compatible con su negación.

$$\mathbf{(A \wedge \neg A) \to \sim A^I}$$

Prueba:

1. $A^I \to (\neg A \to \sim A)$ AIA¬
2. $A^I \to (\sim\neg A \vee \sim A)$ Implicación disyunción en 1
3. $A^I \to \sim(\neg A \wedge A)$ DeMorgan en 2
4. $(A \wedge \neg A) \to \sim A^I$ Transposición en 3

23 A↔B se define como (A→B)∧(B→A).

Puesto que por FI se tiene la recíproca de T19, se puede concluir la siguiente caracterización de A^I: Los enunciados compatibles con su negación son los que se aceptan y se cuestionan.

$$\mathbf{\sim A^I \leftrightarrow (A \wedge \neg A)}$$

Los enunciados incompatibles con su negación son los que no se aceptan o no se cuestionan.

$$\mathbf{A^I \leftrightarrow (\sim A \vee \sim\neg A)}$$

Teorema 20.

Principio de trivialización.

Si un enunciado es incompatible con su negación y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado.

$$\mathbf{A^I \to [\neg A \to (A \to B)]}$$

Prueba:

1. $A^I \to (\neg A \to \sim A)$ AIA¬
2. $(A^I \wedge \neg A) \to \sim A$ Importación[24] en 1
3. $\sim A \to (A \to B)$ Axioma 10 Principio de trivialización
4. $(A^I \wedge \neg A) \to (A \to B)$ Silogismo hipotético en 2 y 3
5. $A^I \to [\neg A \to (A \to B)]$ Exportación en 4

Teorema 21.

Principio de trivialización.

Si un enunciado es indeterminable y es aceptado y cuestionado entonces todo enunciado es aceptado.

$$\mathbf{\sim A^C \to [\neg A \to (A \to B)]}$$

Prueba:

1. $\sim A^C \to (\sim\neg A \wedge \sim A)$ FC
2. $\sim A^C \to \sim A$ Simplificación en 1
3. $\sim A \to [\neg A \to (A \to B)]$ Axioma 10 e intercambio
4. $\sim A^C \to [\neg A \to (A \to B)]$ Silogismo hipotético en 2 y 3

24. De X→(Y→Z) se sigue (X∧Y)→Z.

Teorema 22.

(FC) Falsedad de la completez.

Si un enunciado es indeterminable entonces aceptarlo equivale a cuestionarlo.

$$\mathbf{\sim A^C \to (A\leftrightarrow\neg A)}$$

Prueba:

1.	$\sim A^C\to(\sim A\wedge\sim\neg A)$	FC
2.	$\sim A^C\to\sim A$	Simplificación en 1
3.	$\sim A\to(\sim\neg A\to\sim A)$	Axioma 1 Debilitamiento
4.	$\sim A\to(A\to\neg A)$	Transposición en 3
5.	$\sim A^C\to(A\to\neg A)$	Silogismo hipotético en 2 y 4
6.	$\sim A^C\to\sim\neg A$	Simplificación en 1
7.	$\sim\neg A\to(\sim A\to\sim\neg A)$	Axioma 1 Debilitamiento
8.	$\sim\neg A\to(\neg A\to A)$	Transposición en 7
9.	$\sim A^C\to(\neg A\to A)$	Silogismo hipotético en 6 y 8
10.	$\sim A^C\to[(\neg A\to A)\wedge(A\to\neg A)]$	Conjunción[25] en 5 y 9
11.	$\sim A^C\to(A\leftrightarrow\neg A)$	Equivalencia[26] en 10

Teorema 23.

Reducción al absurdo débil

Si de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es cuestionado.

$$\mathbf{(A^C\wedge B^I)\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]\}}$$

Prueba:

1.	$A^C\wedge B^I$	Premisa 1
2.	A^C	Simplificación en 1
3.	$A^C\to(\sim A\to\neg A)$	ACFA¬
4.	$(\sim A\to\neg A)$	Modus ponens en 2 y 3
5.	B^I	Simplificación en 1
6.	$B^I\to(\neg B\to\sim B)$	AIA¬
7.	$(\neg B\to\sim B)$	Modus ponens en 5 y 6
8.	$A\to B$	Premisa 2
9.	$A\to\neg B$	Premisa 3
10.	$A\to\sim B$	Silogismo hipotético en 7 y 9
11.	$A\to(B\wedge\sim B)$	Conjunción en 8 y 10
12.	$\sim(B\wedge\sim B)$	Principio de no contradicción[27]
13.	$\sim A$	Modus tollens[28] en 11 y 12
14.	$\neg A$	Modus ponens en 4 y 13
15.	$(A\to\neg B)\to\neg A$	MDC en 9 y 14
16.	$(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]$	MDC en 8 y 15
17.	$A^C\wedge B^I\to(A\to B)\to A\to\neg B)\to\neg A]$	MDC en 1 y 16

Observando la prueba, se tiene también que si de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es rechazado.

$$\mathbf{(A^C\wedge B^I)\to\{(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\sim A]\}}$$

De manera similar se tiene la reducción al absurdo fuerte: Si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue la aceptación y cuestionamiento de un enunciado incompatible con su negación entonces el enunciado inicial es aceptado.

$$\mathbf{(A^C\wedge B^I)\to\{(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]\}}$$

---

25. De $Z\to X$, $Z\to Y$ se sigue $Z\to(X\wedge Y)$. De $Z\to X$, $Z\to Y$ se sigue $Z\to(Y\wedge X)$.

26. De $(X\to Y)\wedge(Y\to X)$ se sigue $X\leftrightarrow Y$. De $X\leftrightarrow Y$ se sigue $(X\to Y)\wedge(Y\to X)$.

27. Los principios de no contradicción ($\sim(B\wedge\sim B)$), bivalencia e identidad son equivalentes gracias a las leyes de DeMorgan e Implicación disyunción.

28. De $X\to Y$, $\sim Y$ se sigue $\sim X$. De $X\to\sim Y$, Y se sigue $\sim X$. De $\sim X\to Y$, $\sim Y$ se sigue X. De $\sim X\to\sim Y$, Y se sigue X.

Teorema 24.

Si cuando de un enunciado incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de uno determinable se sigue el cuestionamiento del incompatible entonces del incompatible se sigue el determinable.

$$\mathbf{(A^{I} \wedge B^{C}) \rightarrow \{[(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A] \rightarrow (A \rightarrow B)\}}$$

Prueba:

1.	$A^I \wedge B^C$	Premisa 1
2.	$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$	Premisa 2
3.	A	Premisa 3
4.	A^I	Simplificación en 1
5.	$A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬
6.	$\neg A \rightarrow \sim A$	Modus ponens en 4 y 5
7.	$\sim \neg A$	Modus tollens en 3 y 6
8.	$\sim (A \rightarrow \neg B)$	Modus tollens en 7 y 2
9.	$A \wedge \sim \neg B$	Negación de $\rightarrow$ en 8
10.	B^C	Simplificación en 1
11.	$B^C \rightarrow (\sim B \rightarrow \neg B)$	ACFA¬
12.	$(\sim B \rightarrow \neg B)$	Modus ponens en 10 y 11
13.	$\sim \neg B$	Simplificación en 9
14.	B	Modus tollens en 13 y 12
15.	$A \rightarrow B$	MDC en 3 y 14
16.	$[(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A] \rightarrow (A \rightarrow B)$	MDC en 2 y 15
17.	$A^I \wedge B^C \rightarrow \{[(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$	MDC en 1 y 16

De manera similar se tiene: Si cuando del cuestionamiento un enunciado incompatible con su negación que implica el cuestionamiento de uno determinable se sigue el incompatible entonces del cuestionamiento del incompatible se sigue el determinable.

$$\mathbf{(A^{I} \wedge B^{C}) \rightarrow \{[(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)\}}$$

Teorema 25.

Cuestionamiento de la conjunción

Del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación.

$$\mathbf{[(A \wedge B)^{I} \wedge A^{C} \wedge B^{C}] \rightarrow [\neg (A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]}$$

Prueba:

1.	$(A \wedge B)^I \wedge A^C \wedge B^C$	Premisa 1
2.	$\neg (A \wedge B)$	Premisa 2
3.	$\sim \neg A$	Premisa 3
4.	$(A \wedge B)^I$	Simplificación en 1
5.	$(A \wedge B)^I \rightarrow [\neg (A \wedge B) \rightarrow \sim (A \wedge B)]$	AIA¬
6.	$\neg (A \wedge B) \rightarrow \sim (A \wedge B)$	Modus ponens en 4 y 5
7.	$\sim (A \wedge B)$	Modus ponens en 2 y 6
8.	$\sim A \vee \sim B$	DeMorgan en 7
9.	A^C	Simplificación en 1
10.	$A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA¬
11.	$\sim A \rightarrow \neg A$	Modus ponens en 9 y 10
12.	A	Modus tollens en 3 y 11
13.	$\sim B$	Silogismo disyuntivo[29] en 12 y 8
14.	B^C	Simplificación en 1
15.	$B^C \rightarrow (\sim B \rightarrow \neg B)$	ACFA¬
16.	$\sim B \rightarrow \neg B$	Modus ponens en 14 y 15
17.	$\neg B$	Modus ponens en 13 y 16
18.	$\sim \neg A \rightarrow \neg B$	MDC en 3 y 17
19.	$\neg (A \wedge B) \rightarrow (\sim \neg A \rightarrow \neg B)$	MDC en 2 y 18
20.	$(A \wedge B)^I \wedge A^C \wedge B^C \rightarrow [\neg (A \wedge B) \rightarrow (\sim \neg A \rightarrow \neg B)]$	MDC en 1 y 19
21.	$(A \wedge B)^I \wedge A^C \wedge B^C \rightarrow [\neg (A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$	Implicación disyunción en 20

29. De $X \vee Y$, $\sim X$ se sigue Y. De $X \vee Y$, $\sim Y$ se sigue X.

Observando la prueba, también se tiene que del cuestionamiento de la conjunción de dos enunciados se sigue el rechazo de alguno de ellos cuando la conjunción es incompatible con su negación.

$$[(A\wedge B)^{I}]\to[\neg(A\wedge B)\to(\sim A\vee\sim B)]$$

Teorema 26.

Disyunción de cuestionamientos.

Si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la conjunción de ellos cuando esta es determinable.

$$[(A\wedge B)^{C}\wedge A^{I}\wedge B^{I}]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]$$

Prueba:

1.	$(A\wedge B)^{C}\wedge A^{I}\wedge B^{I}$	Premisa 1
2.	$\neg A\vee\neg B$	Premisa 2
3.	A^{I}	Simplificación en 1
4.	$A^{I}\to(\neg A\to\sim A)$	AIA¬
5.	$\neg A\to\sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6.	B^{I}	Simplificación en 1
7.	$B^{I}\to(\neg B\to\sim B)$	AIA¬
8.	$\neg B\to\sim B$	Modus ponens en 6 y 7
9.	$\sim A\vee\sim B$	Dilema constructivo en 2, 5 y 8
10.	$\sim(A\wedge B)$	DeMorgan en 9
11.	$(A\wedge B)^{C}$	Simplificación en 1
12.	$(A\wedge B)^{C}\to[\sim(A\wedge B)\to\neg(A\wedge B)]$	ACFA¬
13.	$\sim(A\wedge B)\to\neg(A\wedge B)$	Modus ponens en 11 y 12
14.	$\neg(A\wedge B)$	Modus ponens en 10 y 13
15.	$(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)$	MDC en 2 y 14
16.	$[(A\wedge B)^{C}\wedge A^{I}\wedge B^{I}]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\neg(A\wedge B)]$	MDC en 1 y 15

Observando la prueba, también se tiene que si se cuestiona alguno de dos enunciados incompatibles con su negación entonces se rechaza la conjunción de ellos.

$$[A^{I}\wedge B^{I}]\to[(\neg A\vee\neg B)\to\sim(A\wedge B)]$$

Teorema 27.

Cuestionamiento de la disyunción.

Del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados determinables se sigue el cuestionamiento de ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación.

$$[(A\vee B)^{I}\wedge A^{C}\wedge B^{C}]\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$$

Prueba:

1.	$(A\vee B)^{I}\wedge A^{C}\wedge B^{C}$	Premisa 1
2.	$\neg(A\vee B)$	Premisa 2
3.	$(A\vee B)^{I}$	Simplificación en 1
4.	$(A\vee B)^{I}\to[\neg(A\vee B)\to\sim(A\vee B)]$	AIA¬
5.	$\neg(A\vee B)\to\sim(A\vee B)$	Modus ponens en 3 y 4
6.	$\sim(A\vee B)$	Modus ponens en 2 y 5
7.	$\sim A\wedge\sim B$	DeMorgan en 6
8.	A^{C}	Simplificación en 1
9.	$A^{C}\to(\sim A\to\neg A)$	ACFA¬
10.	$\sim A\to\neg A$	Modus ponens en 8 y 9
11.	$\sim A$	Simplificación en 7
12.	$\neg A$	Modus ponens en 11 y 10
13.	$\sim B$	Simplificación en 7
14.	B^{C}	Simplificación en 1
15.	$B^{C}\to(\sim B\to\neg B)$	ACFA¬
16.	$\sim B\to\neg B$	Modus ponens en 14 y 15
17.	$\neg B$	Modus ponens en 13 y 16
18.	$\neg A\wedge\neg B$	Conjunción en 12 y 17
19.	$\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$	MDC en 2 y 18
20.	$(A\vee B)^{I}A^{C}\wedge B^{C}\to[\neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)]$	MDC en 1 y 19

Observando la prueba, también se tiene que del cuestionamiento de la disyunción de dos enunciados se sigue el rechazo de ambos cuando la disyunción es incompatible con su negación.

$$[(A \vee B)^{I}] \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\sim A \wedge \sim B)]$$

Teorema 28.

Conjunción de cuestionamientos.

Si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se cuestiona la disyunción de ellos cuando esta es determinable.

$$[(A \vee B)^{C} \wedge A^{I} \wedge B^{I}]$$

Prueba:

1.	$(A \vee B)^{C} \wedge A^{I} \wedge B^{I}$	Premisa 1
2.	$\neg A \wedge \neg B$	Premisa 2
3.	A^{I}	Simplificación en 1
4.	$A^{I} \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$	AIA¬
5.	$\neg A \rightarrow \sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6.	B^{I}	Simplificación en 1
7.	$B^{I} \rightarrow (\neg B \rightarrow \sim B)$	AIA¬
8.	$\neg B \rightarrow \sim B$	Modus ponens en 6 y 7
9.	$\neg A$	Simplificación en 2
10.	$\sim A$	Modus ponens en 9 y 5
11.	$\neg B$	Simplificación en 2
12.	$\sim B$	Modus ponens en 11 y 8
13.	$\sim A \wedge \sim B$	Conjunción en 10 y 12
14.	$\sim(A \vee B)$	DeMorgan en 13
15.	$(A \vee B)^{C}$	Simplificación en 1
16.	$(A \vee B)^{C} \rightarrow [\sim(A \vee B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$	ACFA¬
17.	$\sim(A \vee B) \rightarrow \neg(A \vee B)$	Modus ponens en 15 y 16
18.	$\neg(A \vee B)$	Modus ponens en 14 y 17
19.	$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$	MDC en 2 y 18
20.	$[(A \wedge B)^{C} \wedge A^{I} \wedge B^{I}] \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$	MDC en 1 y 19

Observando la prueba, también se tiene que si se cuestionan dos enunciados incompatibles con su negación entonces se rechaza la disyunción de ellos.

$$[A^{I} \wedge B^{I}] \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \sim (A \vee B)]$$

Teorema 29.

Contra recÍproca débil. Modus tollens.

Cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y este se cuestiona entonces se cuestiona el antecedente si este es determinable.

$$[A^{C} \wedge B^{I}] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$$

Prueba:

1.	$A^{C} \wedge B^{I}$	Premisa 1
2.	$A \rightarrow B$	Premisa 2
3.	$\sim B \rightarrow \sim A$	Transposición en 2
4.	A^{C}	Simplificación en 1
5.	$A^{C} \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$	ACFA¬
6.	$\sim A \rightarrow \neg A$	Modus ponens en 4 y 5
7.	$\sim B \rightarrow \neg A$	Silogismo hipotético en 3 y 6
8.	B^{I}	Simplificación en 1
9.	$B^{I} \rightarrow (\neg B \rightarrow \sim B)$	AIA¬
10.	$\neg B \rightarrow \sim B$	Modus ponens en 8 y 9
11.	$\neg B \rightarrow \neg A$	Silogismo hipotético en 10 y 7
12.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	MDC en 2 y 11
13.	$(A^{C} \wedge B^{I}) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, se tiene también que cuando se acepta un condicional cuyo consecuente es incompatible con la negación y este se cuestiona entonces se rechaza el antecedente.

$$B^{I} \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \sim A)]$$

Teorema 30.

Contra recíproca fuerte. Modus tollens.

Si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación entonces si se acepta el último también se acepta el primero.

$$[A^{I}\wedge B^{C}]\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$$

Prueba:

1.	$A^{I}\wedge B^{C}$	Premisa 1
2.	$\neg B\rightarrow\neg A$	Premisa 2
3.	A^{I}	Simplificación en 1
4.	$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA¬
5.	$\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 3 y 4
6.	$\neg B\rightarrow\sim A$	Silogismo hipotético en 2 y 5
7.	B^{C}	Simplificación en 1
8.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬
9.	$\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 7 y 8
10.	$\sim B\rightarrow\sim A$	Silogismo hipotético entre 9 y 6
11.	$A\rightarrow B$	Transposición en 10
12.	$(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$	MDC en 2 y 11
13.	$(A^{I}\wedge B^{C})\rightarrow[(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]$	MDC en 1 y 12

Observando la prueba, también se tiene que si del cuestionamiento de un enunciado determinable se sigue el rechazo de otro enunciado entonces si se acepta el último también se acepta el primero.

$$\mathbf{B^{C}\rightarrow[(\neg B\rightarrow\sim A)\rightarrow(A\rightarrow B)]}$$

Observando la prueba, también se tiene que si del rechazo de un enunciado se sigue el cuestionamiento de otro enunciado incompatible con su negación entonces si se acepta el último también se acepta el primero.

$$\mathbf{A^{I}\rightarrow[(\sim B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)]}$$

Teorema 31.

Principio de bivalencia

Si un enunciado se sigue de uno determinable y del cuestionamiento de este entonces ese enunciado es aceptado.

$$B^{C}\rightarrow[(B\rightarrow A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}]$$

Prueba:

1.	B^{C}	Premisa 1
2.	$B\rightarrow A$	Premisa 2
3.	$\neg B\rightarrow A$	Premisa 3
4.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬
5.	$\sim B\rightarrow\neg B$	Modus ponens en 1 y 4
6.	$\sim B\rightarrow A$	Silogismo hipotético entre 5 y 3
7.	$B\vee\sim B$	Principio de bivalencia
8.	A	Dilema constructivo en 7, 2 y 6
9.	$(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A$	MDC en 3 y 8
10.	$(B\rightarrow A)\rightarrow[(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A]$	MDC en 2 y 9
11.	$B^{C}\rightarrow\{(B\rightarrow A)\rightarrow[(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A]\}$	MDC en 1 y 10

De manera similar se prueba que si el cuestionamiento de un enunciado se sigue de uno determinable y del cuestionamiento de este entonces ese enunciado es cuestionado.

$$\mathbf{B^{C}\rightarrow[(B\rightarrow\neg A)\rightarrow\{(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A\}]}$$

Teorema 32.

Si al cuestionar un enunciado incompatible con su negación, se sigue un segundo enunciado, y ésto implica el segundo, entonces el segundo se sigue del incompatible.

$$\mathbf{B^{I}\rightarrow[\{(\neg B\rightarrow A)\rightarrow A\}\rightarrow(B\rightarrow A)]}$$

Prueba:

1. B^I Premisa 1
2. $(\neg B \to A) \to A$ Premisa 2
3. $B^I \to (\neg B \to \sim B)$ AIA¬
4. $\neg B \to \sim B$ Modus ponens en 1 y 3
5. B Premisa 3
6. $\sim\neg B$ Modus Tollens en 5 y 4
7. $\sim\neg B \to (\sim A \to \sim\neg B)$ A1 Irrelevancia del antecedente
8. $\sim A \to \sim\neg B$ Modus ponens en 6 y 7
9. $\neg B \to A$ Transposición en 8
10. A Modus ponens en 9 y 2
11. $B \to A$ MDC 5 y 10
12. $[(\neg B \to A) \to A] \to (B \to A)$ MDC en 2 y 11
13. $B^I \to \{[(\neg B \to A) \to A] \to (B \to A)\}$ MDC en 1 y 12

Teorema 33.

Introducción del doble cuestionamiento.

Si se acepta un enunciado incompatible con su negación cuyo cuestionamiento sea determinable entonces se cuestiona el cuestionamiento de éste.

$$[A^{\mathbf{I}} \wedge (\neg A)^{\mathbf{C}}] \to [A \to \neg\neg A)]$$

Prueba:

1. $A^I \wedge (\neg A)^C$ Premisa 1
2. $A^I \to (\neg A \to \sim A)$ AIA¬
3. A^I Simplificación en 1
4. $\neg A \to \sim A$ Modus ponens en 3 y 2
5. $(\neg A)^C$ Simplificación en 1
6. $(\neg A)^C \to (\sim\neg A \to \neg\neg A)$ ACFA¬
7. $\sim\neg A \to \neg\neg A$ Modus ponens en 5 y 6
8. $A \to \sim\neg A$ Transposición en 4
9. $A \to \neg\neg A$ Silogismo hipotético en 8 y 7
10. $(A^I \wedge (\neg A)^C) \to (A \to \neg\neg A)$ MDC en 1 y 9

Teorema 34.

Eliminación del doble cuestionamiento.

Al cuestionar el cuestionamiento de un enunciado se sigue el enunciado cuando este es determinable y su cuestionamiento es incompatible con la negación.

$$[A^{\mathbf{C}} \wedge (\neg A)^{\mathbf{I}}] \to [\neg\neg A \to A)]$$

Prueba:

1. $A^C \wedge (\neg A)^I$ Premisa 1
2. A^C Simplificación en 1
3. $(\neg A)^I$ Simplificación en 1
4. $A^C \to (\sim A \to \neg A)$ ACFA¬
5. $\sim A \to \neg A$ Modus ponens en 2 y 4
6. $(\neg A)^I \to (\neg\neg A \to \sim\neg A)$ AIA¬
7. $\neg\neg A \to \sim\neg A$ Modus ponens en 3 y 6
8. $\sim\neg A \to A$ Transposición en 5
9. $\neg\neg A \to A$ Silogismo hipotético en 7 y 8
10. $[A^C \wedge ((\neg A)^I] \to [\neg\neg A \to A]$ MDC en 1 y 9

Teorema 35.

Implicación disyunción.
Cuando se tiene un condicional con antecedente determinable entonces se cuestiona el antecedente o se acepta el consecuente.

$$\mathbf{A^C \to [(A \to B) \to (\neg A \vee B)]}$$

Prueba:

1. A^C Premisa 1
2. $A \to B$ Premisa 2
3. $A^C \to (\sim A \to \neg A)$ ACFA¬
4. $\sim A \to \neg A$ Modus ponens en 1 y 3
5. $\sim\neg A \to A$ Transposición en 4
6. $\sim\neg A \to B$ Silogismo hipotético en 5 y 2
7. $\neg A \vee B$ Implicación disyunción en 6
8. $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$ MDC en 2 y 7
9. $A^C \to [(A \to B) \to (\neg A \vee B)]$ MDC en 1 y 8

Teorema 36.

Disyunción implicación. Silogismo disyuntivo.

Si se cuestiona el componente incompatible con la negación de una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción.

$$\mathbf{A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]}$$

Prueba:

1.	A^{I}	Premisa 1
2.	$A\vee B$	Premisa 2
3.	$\sim A\rightarrow B$	Implicación disyunción en 2
4.	$A^{I}\rightarrow(\neg A\rightarrow\sim A)$	AIA¬
5.	$\neg A\rightarrow\sim A$	Modus ponens en 1 y 4
6.	$\neg A\rightarrow B$	Silogismo hipotético en 5 y 3
7.	$(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$	MDC en 2 y 6
8.	$A^{I}\rightarrow[(A\vee B)\rightarrow(\neg A\rightarrow B)]$	MDC en 1 y 7

De manera similar se prueba que si se acepta el componente incompatible con la negación que se cuestiona en una disyunción entonces se acepta el otro componente de la disyunción.

$$\mathbf{A^{I}\rightarrow[(\neg A\vee B)\rightarrow(A\rightarrow B)]}$$

Teorema 37.

Cuestionamiento del condicional.

Si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación y cuyo consecuente es determinable entonces se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente.

$$\mathbf{B^{C}\wedge(A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]}$$

Prueba:

1.	$B^{C}\wedge(A\rightarrow B)^{I}$	Premisa 1
2.	$\neg(A\rightarrow B)$	Premisa 2
3.	$(A\rightarrow B)^{I}$	Simplificación en 1
4.	$(A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)]$	AIA¬
5.	$\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\sim(A\rightarrow B)$	Modus ponens en 3 y 4
6.	$\sim(A\rightarrow B)$	Modus ponens en 2 y 5
7.	$A\wedge\sim B$	Negación del condicional en 6
8.	A	Simplificación en 7
9.	$\sim B$	Simplificación en 7
10.	B^{C}	Simplificación en 1
11.	$B^{C}\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$	ACFA¬
12.	$(\sim B\rightarrow\neg B)$	Modus ponens en 10 y 11
13.	$\neg B$	Modus ponens en 9 y 12
14.	$A\wedge\neg B$	Conjunción en 8 y 13
15.	$\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$	MDC en 2 y 14
16.	$[B^{C}\wedge(A\rightarrow B)^{I}]\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\neg B)]$	MDC en 1 y 15

Observando la prueba, se tiene también que si se cuestiona un condicional que es incompatible con su negación entonces se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente.

$$\mathbf{(A\rightarrow B)^{I}\rightarrow[\neg(A\rightarrow B)\rightarrow(A\wedge\sim B)]}$$

Teorema 38.

Aceptar el antecedente y cuestionar el consecuente.

Si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que este sea determinable y el consecuente sea incompatible con la negación.

$$\mathbf{B^{I}\wedge(A\rightarrow B)^{C}\rightarrow[(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)]}$$

Prueba:

1. $B^I \wedge (A \rightarrow B)^C$ Premisa 1
2. $A \wedge \neg B$ Premisa 2
3. B^I Simplificación en 1
4. $B^I \rightarrow (\neg B \rightarrow \sim B)$ AIA¬
5. $\neg B \rightarrow \sim B$ Modus ponens en 3 y 4
6. $\neg B$ Simplificación en 2
7. $\sim B$ Modus ponens en 6 y 5
8. A Simplificación en 2
9. $A \wedge \sim B$ Conjunción en 8 y 7
10. $\sim(A \rightarrow B)$ Negación del condicional en 9
11. $(A \rightarrow B)^C$ Simplificación en 1
12. $(A \rightarrow B)^C \rightarrow [\sim(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$ ACFA¬
13. $\sim(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ Modus ponens en 11 y 12
14. $\neg(A \rightarrow B)$ Modus ponens en 10 y 13
15. $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ MDC en 2 y 14
16. $[B^I \wedge (A \rightarrow B)^C] \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$ MDC en 1 y 15

Observando la prueba, también se tiene que si en un condicional se acepta el antecedente y se cuestiona el consecuente entonces se rechaza el condicional siempre que el consecuente sea incompatible con la negación.

$$\mathbf{B^I \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \sim(A \rightarrow B)]}$$

y también se observa que si en un condicional se acepta el antecedente y se rechaza el consecuente entonces se cuestiona el condicional siempre que este sea determinable.

$$(A \rightarrow B)^{\mathbf{C}} \rightarrow [(A \wedge \sim B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$$

4. SEMÁNTICA

Semántica de valuaciones

Una valuación doblepara v, es una función que interpreta las fórmulas atómicas y las negaciones de fórmulas arbitrarias como elementos del conjunto $\{1, 0\}$[30], y además satisface:

V1. $v(A \rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow v(A) = 1$ y $v(B) = 0$

V2. $v(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ y $V(B) = 1$

V3. $v(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow v(A) = 0$ y $V(B) = 0$

V4. $v(\sim A) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0$

V5. $v(A^I) = 0 \Leftrightarrow v(A) = 1$ y $v(\neg A) = 1$

V6. $v(A^C) = 0 \Leftrightarrow v(A) = 0$ y $v(\neg A) = 0$

Un enunciado A es válido ($\models A$) si y solamente si para toda valuación doble para v, $v(A) = 1$.

Se sabe que V1, ..., V4 caracterizan la Lógica Clásica, por lo que los axiomas para el condicional, para la conjunción, para la disyunción y para la negación clásica son válidos, utilizando V5 y V6 se tiene la validez de los axiomas para la negación débil, además se sabe que la regla de inferencia Modus ponens preserva validez, se puede entonces concluir que, los teoremas de la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Clásica son válidos. También se tiene el recíproco, por lo que, la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Clásica esta caracterizada por la semántica de las valuaciones doble para:

$$\vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \models \mathbf{A}$$

Este resultado permite mostrar que la negación débil y la negación fuerte son diferentes, probando por ejemplo que no es un teorema $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, para lograrlo basta verificar que no es valido, lo cual se logra con una valuación v tal que, $v(A) = v(\neg A) = 1$ y $V(B) = 0$.

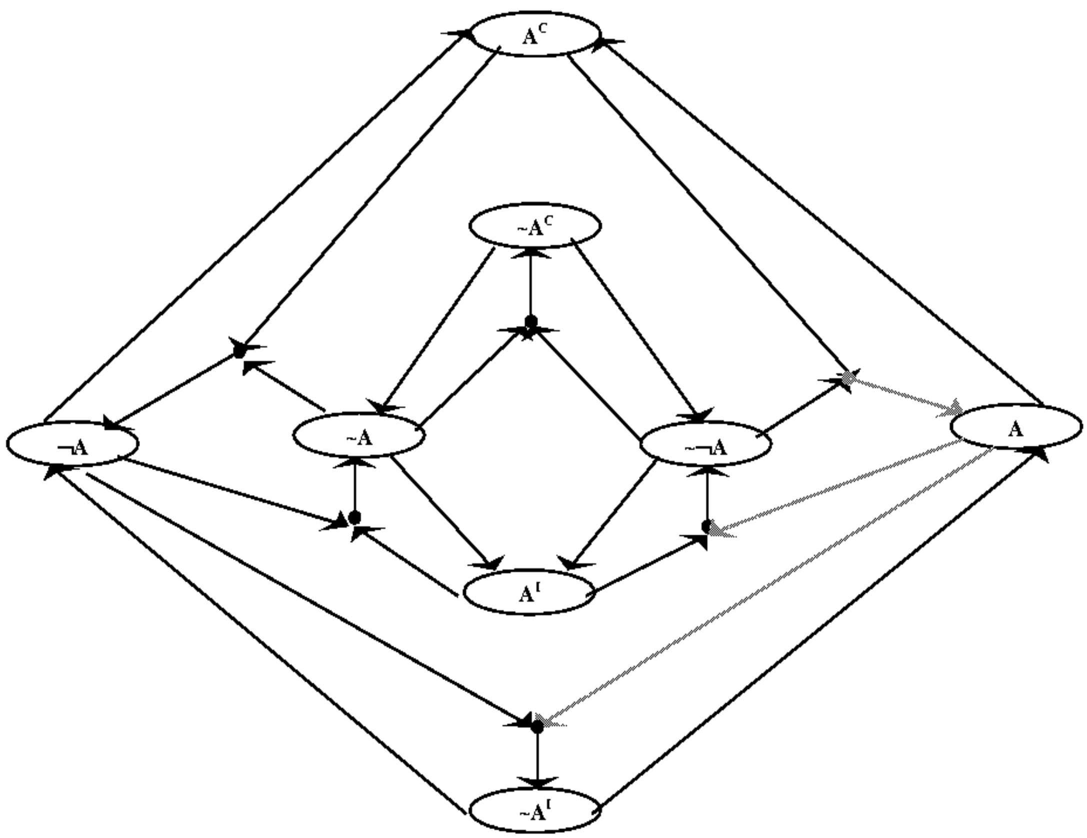
30. $V(A) = 1$ puede leerse como "A es verdadero", "A es aceptado". $V(A) = 0$ puede leerse como "A es falso", "A es rechazado"

Tampoco son teoremas los siguientes enunciados: $\neg(A\wedge B)\rightarrow\neg A\vee\neg B$, $\neg A\vee\neg B\rightarrow\neg(A\wedge B)$, $\neg(A\vee B)\rightarrow\neg A\wedge\neg B$, $\neg A\wedge\neg B\rightarrow\neg(A\vee B)$, $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A\wedge\neg B$, $A\wedge\neg B\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$, $A\rightarrow\neg\neg A$, $\neg\neg A\rightarrow A$.

5. RETÍCULO DE CONSECUENCIAS

En el diagrama 1 se resume la relación de implicación entre los operadores negación fuerte, negación débil, incompatibilidad y completez, desde el punto de vista deductivo.

DIAGRAMA 1



Se sabe que V1, ..., V4 caracterizan la Lógica Clásica, por lo que los axiomas para el condicional, para la conjunción, para la disyunción y para la negación clásica son válidos, utilizando V5 y V6 se tiene la validez de los axiomas para la negación débil, además se sabe que la regla de inferencia Modus ponens preserva validez, se puede entonces concluir que, los teoremas de la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Clásica son válidos. También se tiene el recíproco, por lo que, la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Clásica está caracterizada por la semántica de las valuaciones doble para.

6. CONCLUSIONES

El sistema Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta Clásica, desde el punto de vista de la negación clásica captura todos los teoremas de la lógica clásica. Por otro lado, la negación débil puede verse como una generalización de la negación clásica, con la característica de detectar los requerimientos mínimos de completez e incompatibilidad, para las subfórmulas de un enunciado que, desde el punto de vista de la lógica clásica sería válido, se tiene así que el análisis de las inferencias que involucran el operador negación débil es más fino.

BIBLIOGRAFÍA

Alves, E. (1976). Logic and Inconsistency, Thesis, USP, Brazil.

Arruda, A. (1980). A survey of paraconsistent logic. In: A. I. Arruda, R. Chuaqui, and N.C.A. da Costa, editors, *Mathematical Logic in Latin America:* Proceedings of the IV Latin American Symposium on Mathematical Logic, Chile, 1978. Amsterdam: North-Holland.

Batens, D. (2000). A survey of inconsistency-adaptive logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors, *Frontiers in Paraconsistent Logic:* Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications.

Bobenrieth-Miserda, A. (1996). Inconsistencias ¿Por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo.

Bueno, O. (1999). Truth, quasi-truth and paraconsistency. In: W. A. Carnielli, and I. M. L. D'Ottaviano, editors, Advances in Contemporary Logic and Computer Sci-ence: Proceedings of the XI Brazilian Conference of Mathematical Logic, Sal-vador, 1996, pp.275–293. Providence: American Mathematical Society, 1999.

Bunder, M. (1984). Some definitions of negation leading to paraconsistent logics. Studia Logica, 43(1/2).

Carnielli, W. (2000). Possible-translations semantics for paraconsistent logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors, Frontiers in Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

Carnielli, W., Marcos, J. and de Amo, S. (1976). Formal inconsistency and evolutionary databases. To appear in : Logic and Logical Philosophy, (Proceedings of the Jaskowski's Memorial Symposium), 1999/2000.

Da Costa, N. (1993). Inconsistent Formal Systems. Thesis, UFPR, Brazil, 1963. Curitiba: Editora UFPR.

Priest, G. In Contradiction. (1987). A Study of the Transconsistent. Dordrecht : Nijhoff,

Priest, G. and Routley, and J. Norman (editors). (1989). Paraconsistent Logic: essays on the inconsistent. Munich: Philosophia Verlag.

Sierra, M. (2001). Árboles de Forzamiento Semántico. *Revista EAFIT,* **No 123**.

Sierra, M. (2001). Lógica Básica Paraconsistente Clásica. Memorias del VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Pasto.