



# Respuesta de Sistemas Suelo-Estructura con amortiguamiento en la base

Juan Carlos Botero

## RESUMEN

Se presenta un procedimiento descrito en la literatura que permite evaluar la respuesta de sistemas amortiguados suelo-estructura. Se demuestra que la respuesta dinámica de estos sistemas no siempre presenta frecuencias y modos clásicos de vibración, debido a que éstos resultan ser cantidades complejas. Se desarrolla un ejemplo de aplicación práctica de un sistema de dos niveles, en el que se comparan los resultados obtenidos cuando se incluye o desprecia, los efectos de interacción suelo-estructura y el amortiguamiento en la base.

## INTRODUCCIÓN

Recientemente, se han desarrollado investigaciones para determinar la respuesta sísmica de edificios susceptibles a efectos de interacción suelo-estructura (ISE). Una de las principales hipótesis que se consideran, es que los amortiguamientos del sistema son proporcionales a su masa y a su rigidez, lo cual hace que su respuesta presente modos clásicos de vibración. Estos modos clásicos son los que se obtienen mediante el empleo de procedimientos convencionales, para analizar un sistema de varios grados de libertad, empotrado en la base.

El asumir un análisis modal clásico para sistemas combinados suelo-estructura no siempre es apropiado (Rosenblueth y Newmark, 1971). Esto se debe a que al realizar un análisis dinámico suelo-estructura, es necesario plantear una ecuación de movimiento que depende de la matriz de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, en la cual los términos

de la matriz de amortiguamiento asociados a los efectos ISE, son función de las propiedades del suelo (Avilés y Pérez-Rocha, 1996). De esta forma, es posible determinar que dichos valores sólo pueden ser proporcionales a los términos correspondientes de la matriz de masa y de rigidez, cuando los niveles de amortiguamientos del suelo son similares a los de la estructura. Sin embargo, esto no siempre se cumple, si se tiene en cuenta que los valores de amortiguamiento de suelos típicos asociados a cada modo de vibración, pueden oscilar entre el 10 y 20 por ciento, mientras que en edificios, estos valores pueden variar entre el 1 y el 20 por ciento (Novak y Hifnawy, 1983; Murià-Vila y Toro, 1998; Celebi, 1998).

**Recientemente, se han desarrollado investigaciones para determinar la respuesta sísmica de edificios susceptibles a efectos de interacción suelo-estructura (ISE). Una de las principales hipótesis que se consideran, es que los amortiguamientos del sistema son proporcionales a su masa y a su rigidez, lo cual hace que su respuesta presente modos clásicos de vibración.**

Con base en lo anterior, y con el fin de asumir las hipótesis despreciadas en algunos estudios, se presenta este informe en el cual se plantean las definiciones de sistemas con amortiguamiento clásico y no clásico, luego se demuestra porque

JUAN CARLOS BOTERO PALACIO. Ingeniero Civil, Universidad EAFIT. Profesor del Departamento Ingeniería Civil, Universidad EAFIT. Maestro y Doctor en Ingeniería, UNAM (México).  
E-mail: jcbotero@eafit.edu.co

un sistema suelo-estructura no presenta modos clásicos de vibración. Posteriormente se describe un procedimiento analítico para evaluar la respuesta modal de sistemas suelo-estructura incluyendo amortiguamiento no clásico y por último se desarrolla un ejemplo de aplicación.

## SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO CLÁSICO Y NO CLÁSICO

Cuando se incluye el amortiguamiento en un sistema de varios grados de libertad, las ecuaciones dinámicas del movimiento quedan definidas:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\} \quad (1)$$

Donde  $[m]$ ,  $[c]$  y  $[k]$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, respectivamente,  $\{p(t)\}$  es el vector de fuerza de excitación y  $\{u(t)\}$  es el vector de desplazamientos relativos de los grados de libertad del sistema que definen la configuración deformada de la estructura. El vector  $\{u(t)\}$  puede ser expresado como la superposición del producto, entre el vector de forma modal  $r$ ,  $\{\varphi\}_r$  y la amplitud modal  $q_r(t)$ . También se puede obtener mediante el producto de la matriz de formas modales,  $[\varphi]$  y el vector de amplitudes modales  $\{q(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \{u(t)\} &= \{\varphi\}_1 q_1(t) + \{\varphi\}_2 q_2(t) + \dots + \{\varphi\}_N q_N(t) \\ &= \sum_{r=1}^N \{\varphi\}_r q_r(t) = [\varphi]\{q(t)\} \end{aligned} \quad (2)$$

Al sustituir la ec.2 en la ec.1 y premultiplicando cada término por el vector modal transpuesto "n",  $\{\varphi_n\}^T$ , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N \{\varphi_n\}^T [m] \{\varphi_r\} \ddot{q}_r + \sum_{r=1}^N \{\varphi_n\}^T [c] \{\varphi_r\} \dot{q}_r + \\ \sum_{r=1}^N \{\varphi_n\}^T [k] \{\varphi_r\} q_r = \{\varphi_n\}^T \{p(t)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Expresando la respuesta total en forma matricial, se tiene:

$$\begin{aligned} [\varphi]^T [m] [\varphi] \{\ddot{q}\} + [\varphi]^T [c] [\varphi] \{\dot{q}\} + \\ [\varphi]^T [k] [\varphi] \{q\} = [\varphi]^T \{p(t)\} \end{aligned} \quad (4)$$

El producto de  $[\varphi]^T [m] [\varphi]$  y el de  $[\varphi]^T [k] [\varphi]$  resultan ser matrices diagonales, donde  $[m]$  y  $[k]$  son matrices simétricas y

positivas definidas. Si el producto  $[\varphi]^T [c] [\varphi]$  es una matriz diagonal, entonces el sistema de  $N$  grados de libertad se convierte en  $N$  sistemas de un grado de libertad, y el sistema queda totalmente desacoplado. Este tipo de problemas es conocido como el de sistemas con amortiguamiento clásico y su solución fue presentada por Caughey (1960). Sin embargo, existe una condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal amortiguado tenga modos clásicos y es que debe existir una transformación que diagonalice las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, en forma simultánea. Esta transformación se puede realizar si la matriz de amortiguamiento es proporcional a la matriz de masa o a la de rigidez, o que sea una combinación de ambas (Caughey, 1960; Clough y Penzien, 1993):

$$[c] = [m] \sum_{b=-\infty}^{\infty} a_b [[m]^{-1} [k]]^b \quad (5)$$

Con la expresión anterior y teniendo en cuenta que  $a_b$  son coeficientes arbitrarios diferentes de cero (condición necesaria para que el sistema sea amortiguado), es posible obtener un número específico de coeficientes asociados a los modos de vibración deseados, de tal forma que se cumpla con las condiciones de ortogonalidad, y que por lo tanto la solución del problema dinámico corresponda a un planteamiento de amortiguamiento clásico. Sin embargo, en aplicaciones prácticas es usual tomar únicamente los dos primeros términos de la serie definida en la ec. 5 ( $b=0$  y  $b=1$ ), para lo cual se obtiene la matriz de amortiguamiento propuesta por Rayleigh (1945):

$$[c] = a_0 [m] + a_1 [k] \quad (6)$$

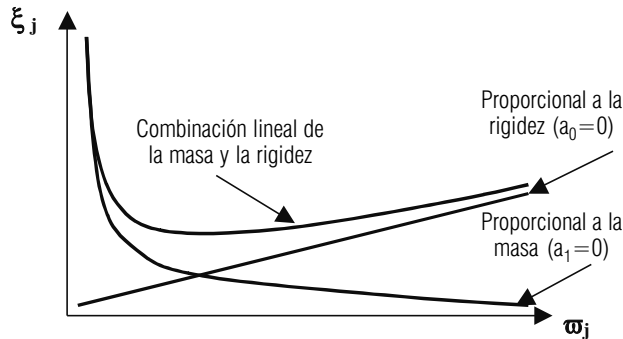
Asumiendo que la matriz de amortiguamiento queda definida mediante la ec. 6, es posible afirmar que las ecuaciones dinámicas quedan totalmente desacopladas. Al normalizar las ecuaciones del movimiento respecto a la masa de la estructura, se obtiene la matriz  $[c]$ , en donde los términos de la diagonal son iguales a  $2\xi_j \omega_j$ . Los valores de  $\xi_j$  y de  $\omega_j$ , son la fracción de amortiguamiento crítico y la frecuencia circular de vibración del modo "j", respectivamente. Con base en lo anterior y con la ec. 6, es posible obtener:

$$\xi_j = \frac{a_0}{2\omega_j} + \frac{a_1 \omega_j}{2} \quad (7)$$

La ec. 7 es representada en la figura 1, en donde se muestra la relación existente entre el amortiguamiento y la frecuencia, de

cada modo "j", y la forma como varía  $\xi_j$  cuando es proporcional sólo a la masa o a la rigidez, o cuando es una combinación lineal de ambos.

**FIGURA 1**  
Relación entre  $\xi_j$  y  $\omega_j$  para el amortiguamiento de Rayleigh



Si la matriz de amortiguamiento no cumple la condición de proporcionalidad definida anteriormente, el producto  $[\varphi_n]^T [c] [\varphi]$  no será una matriz diagonal y el sistema de ecuaciones no se podrá desacoplar; esto implica que los valores y vectores propios deben ser complejos. Este tipo de problemas es conocido como "amortiguamiento no clásico".

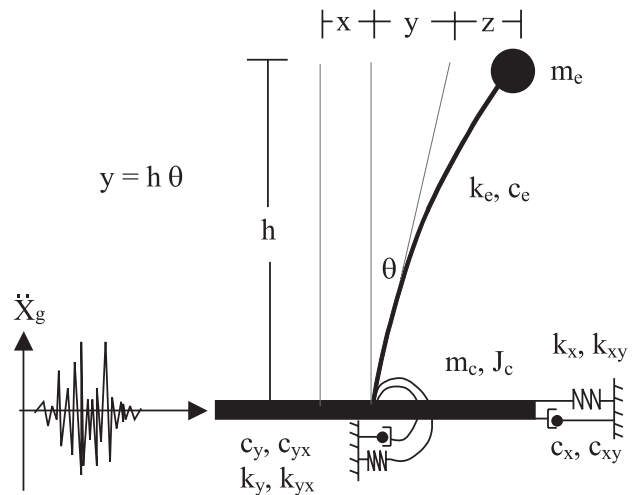
Asumir un amortiguamiento clásico en sistemas que presenten dos o más partes con diferentes niveles de amortiguamiento no es apropiado, ya que se pueden generar errores significativos en su respuesta (Chopra, 1995). Este es el caso de sistemas ISE, donde se hace presente el amortiguamiento no clásico (Rosenblueth y Newmark, 1971), ya que los valores de amortiguamiento crítico del suelo asociados a cada modo de vibración, (valores entre el 10 y 20 por ciento), podrían ser muy diferentes a los de la estructura, que oscilan entre el 1 y el 20 por ciento (Novak y Hifnawy, 1983; Murià-Vila y Toro, 1998; Celebi, 1998).

Por simplicidad, en los casos en que el amortiguamiento no clásico se presenta, se supone que en el rango lineal, el sistema posee modos clásicos, de tal forma que se pueden obtener los modos de vibración suprimiendo temporalmente los amortiguadores del sistema suelo-estructura y el amortiguamiento interno de la estructura, introduciendo después el grado de amortiguamiento de cada modo y finalmente combinando sus respuestas (Rosenblueth y Reséndiz, 1988). Esta simplificación no siempre resulta ser apropiada.

Con base en lo anterior, resulta necesario demostrar porque un sistema suelo-estructura no posee modos clásicos de vibración.

Para esto se considera un oscilador simple apoyado en resortes y amortiguadores en sustitución del suelo (figura 2), con el objeto de simular, de una forma relativamente sencilla, los efectos ISE debidos a la flexibilidad del suelo.

**FIGURA 2**  
Sistema equivalente suelo-estructura



En la figura 2,  $m_e$  es la masa efectiva de la superestructura asociada con el modo fundamental de vibración,  $k_e$  y  $c_e$  representan la rigidez y la constante de amortiguamiento de la estructura, respectivamente,  $m_c$  y  $J_c$  es la masa y el momento de inercia de la cimentación, respectivamente,  $h$  es la altura del centro de gravedad de la primera forma modal,  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_{xy} = k_{yx}$ , son las rigideces de los resortes del suelo asociados a los movimientos de translación, cabeceo y acoplamiento, respectivamente. De igual forma se definen los valores de los amortiguadores  $c_x$ ,  $c_y$  y  $c_{xy} = c_{yx}$ . La configuración deformada del sistema queda definida por el desplazamiento de translación,  $x$ , el ángulo de giro de la cimentación por efectos de cabeceo,  $\theta$ , y la deformación de entrepiso,  $z$ .  $\ddot{X}_g$  es la aceleración horizontal del terreno.

**Asumir un amortiguamiento clásico en sistemas que presenten dos o más partes con diferentes niveles de amortiguamiento, no es apropiado, ya que se pueden generar errores significativos en su respuesta.**

Luego de realizar el equilibrio dinámico del sistema, se obtienen las ecuaciones que rigen el movimiento del oscilador de la figura 2, las cuales se pueden escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_e & m_e & m_e h \\ m_e & m_e + m_c & m_e h \\ m_e h & m_e h & m_e h^2 + J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_x & c_{xy} \\ 0 & c_{yx} & c_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & 0 & 0 \\ 0 & k_x & k_{xy} \\ 0 & k_{yx} & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ x \\ \theta \end{Bmatrix} = -\ddot{X}_g \begin{Bmatrix} m_e \\ m_e + m_c \\ m_e h \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Como se mencionó anteriormente, para que un sistema tenga modos clásicos de vibración, la matriz de amortiguamiento debe ser proporcional a la matriz de masa o a la de rigidez, o a una combinación lineal de ambas (ec.6). Esto implica que cada término "ij" del sistema debe satisfacer la siguiente condición:

$$c_{ij} = a_0 m_{ij} + a_1 k_{ij} \quad (9)$$

Por la simetría del sistema, se pueden establecer seis ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} (a) \Rightarrow c_e = a_0 (m_e) + a_1 (k_e) \\ (b) \Rightarrow 0 = a_0 (m_e) + a_1 (0) \\ (c) \Rightarrow 0 = a_0 (m_e h) + a_1 (0) \\ (d) \Rightarrow c_x = a_0 (m_e + m_c) + a_1 (k_x) \\ (e) \Rightarrow c_{xy} = a_0 (m_e h) + a_1 (k_{xy}) \\ (f) \Rightarrow c_y = a_0 (m_e h^2 + J_c) + a_1 (k_y) \end{array} \right\} \quad (10)$$

En las ecuaciones 10(b) y 10(c) se puede ver que el valor de  $a_0$  es cero ya que, ni la masa de la estructura, ni su altura, son nulas. Si el amortiguamiento de la estructura es nulo ( $c_e=0$ ), se puede deducir mediante al ec.10(a) que el valor de  $a_1$  es igual a cero, ya que la estructura si presenta rigidez. De esta forma, si  $a_0$  y  $a_1$  son iguales a cero, significa que todos los términos de la matriz de amortiguamiento ( $c_{ij}$ ) también lo serán, lo cual no corresponde al caso de un sistema amortiguado. Con base en el anterior razonamiento, se puede asegurar que si  $c_e$  es diferente de cero, es posible obtener sistemas con amortiguamiento clásico o con amortiguamiento no clásico, dependiendo de las condiciones del suelo.

En el caso de que el amortiguamiento de la estructura,  $c_e$ , sea diferente de cero, se obtiene de la ec.10(a) el valor de  $a_1$ , teniendo en cuenta que la constante  $c_e$  ( $c_e=2\xi_e\omega_e m_e$ ) es proporcional a la fracción de amortiguamiento crítico de la estructura,  $\xi_e$ , a su masa,  $m_e$ , y a la frecuencia circular de vibración de la estructura con base empotrada,  $\omega_e$ :

$$a_1 = \frac{c_e}{k_e} = \frac{2\xi_e}{\omega_e} \quad (11)$$

Al sustituir la ecuación 11 en las ecuaciones 10(d), 10(e) y 10(f), se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} (a) \Rightarrow c_x = \frac{2\xi_e k_x}{\omega_e} \\ (b) \Rightarrow c_{xy} = \frac{2\xi_e k_{xy}}{\omega_e} \\ (c) \Rightarrow c_y = \frac{2\xi_e k_y}{\omega_e} \end{array} \right\} \quad (12)$$

Si se tiene en cuenta que los amortiguamientos ISE son únicamente función de las propiedades de los resortes y amortiguadores que sustituyen al suelo, ubicados en la dirección de análisis (Avilés y Pérez-Rocha, 1996), y que los valores obtenidos en la ec.12 resultan ser proporcionales a las propiedades de la estructura ( $\xi_e, \omega_e$ ), es posible concluir que la matriz de amortiguamiento no es proporcional a la de masa y de rigidez, por lo que el sistema no posee modos clásicos de vibración.

Si los valores del amortiguamiento ISE fueran iguales a los de la estructura, se obtendría la ec.13 (Avilés y Pérez-Rocha, 1996) a partir de la ec. 12, la cual define las constantes de amortiguamiento del sistema. Es importante mencionar que la ec. 13 fue obtenida bajo la condición de resonancia, donde  $\omega_e$  es igual a la frecuencia circular de excitación,  $\omega$ . Sólo de esta forma la matriz de amortiguamiento sí sería proporcional y el sistema tendría modos clásicos de vibración. Sin embargo, los amortiguamientos típicos del suelo asociados a cada modo de vibración (10 a 20 por ciento) pueden ser diferentes a los de la estructura (1 a 20 por ciento) y de esta forma la matriz de amortiguamiento no será proporcional (Chopra, 1995).

$$\left. \begin{array}{l} (a) \Rightarrow c_x = \frac{2\xi_x k_x}{\omega} \\ (b) \Rightarrow c_{xy} = \frac{2\xi_{xy} k_{xy}}{\omega} \\ (c) \Rightarrow c_y = \frac{2\xi_y k_y}{\omega} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Utilizando el mismo procedimiento es posible ampliar la demostración a sistema de varios grados de libertad en la estructura, ya que se debe reemplazar la masa, el amortiguamiento y la rigidez del oscilador simple por submatrices que incluyan los valores de los diferentes niveles. Esto no cambiaría los resultados obtenidos anteriormente, debido a que

la submatriz que define los efectos ISE sigue siendo igual y por lo tanto se obtendrán las mismas incongruencias del caso anterior.

Con lo anterior se pudo demostrar que un sistema suelo-estructura no siempre presenta modos clásicos de vibración, y que las constantes de los amortiguadores que sustituyen al suelo, son las responsables de que el sistema presente modos de vibración no clásico.

## VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS DE SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO NO CLÁSICO

Para la obtención de valores y vectores característicos de sistemas dinámicos con amortiguamiento no clásico, se utiliza un procedimiento planteado por Rayleigh (1945). Cuando se incluye el amortiguamiento en un sistema de varios grados de libertad, las ecuaciones del movimiento quedan definidas en forma matricial de la siguiente forma:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\} \quad (14)$$

La solución a la ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes, está dada por el vector  $\{u\}$ :

$$\{u\} = e^{\omega t} \{r\} \quad (15)$$

Donde  $\{r\}$  es un vector de constantes complejas,  $\omega$  es la frecuencia circular compleja. Al emplear la ec.15 en la solución de la ecuación homogénea, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left[ \omega^2 [m] + \omega [c] + [k] \right] \{r\} = \{0\} \quad (16)$$

Estas ecuaciones son homogéneas, donde los valores de  $\omega$  constituyen la solución de valores característicos complejos del sistema. Para la obtención de la solución no trivial, se requiere que:

$$\det \left[ \omega^2 [m] + \omega [c] + [k] \right] = 0 \quad (17)$$

Al evaluar el determinante de la ec.17, se debe encontrar un polinomio característico de orden 2N y sus raíces corresponden a las frecuencias modales del sistema. De esta forma es posible encontrar los valores y vectores característicos del sistema dinámico estudiado. Sin embargo, este método sólo es útil cuando se tiene un sistema dinámico con pocos grados de libertad.

Otra forma de obtener los valores y vectores característicos, consiste en aplicar otra metodología más sencilla, la cual fue definida inicialmente por Frazer et al., (1946) y adaptada por Foss (1957), y consiste en realizar varias operaciones algebraicas de la ecuación dinámica del movimiento (ec. 14) para encontrar una matriz  $[T]$ , de orden 2N, donde N es el número de grados de libertad:

$$[T] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [-[k]^{-1}[m]] & [-[k]^{-1}[c]] \end{bmatrix} \quad (18)$$

Donde  $[I]$  es la matriz de identidad y  $[0]$  es una matriz de ceros, de orden N. Una vez definida la matriz  $[T]$  es posible obtener, mediante algún método convencional de cálculo, el vector  $\{\omega_j^*\}$  con 2N valores característicos, el cual es igual al recíproco del vector  $\{\omega_j\}$  de valores característicos del sistema (Foss, 1957), y tendrá la siguiente forma (Argyris y Mlejnek, 1991):

$$\{\omega_j\} = \frac{1}{\{\omega_j^*\}} = \{-\xi_j \omega_j \pm i \omega_{Dj}\} \quad (19)$$

Donde  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_j$ ,  $\omega_{Dj}$  y  $\xi_j$ , son la frecuencia circular, la frecuencia circular amortiguada y la fracción de amortiguamiento crítico, para cada modo  $j$ , respectivamente. Es importante comentar que la solución obtenida corresponde a pares conjugados, donde la parte real siempre es negativa. Para la obtención de la respuesta de cada modo, se debe verificar qué tipo de amortiguamiento se presenta, ya que es posible que se generen modos sobreamortiguados. Este método es útil cuando se tienen sistemas dinámicos con varios grados de libertad.

Tanto los valores como los vectores característicos, son cantidades complejas. Esto implica que no existen nudos estacionarios en los modos de vibración debidos al desfase que genera la parte imaginaria de dichos valores, y los valores máximos y mínimos de la respuesta no ocurren en el mismo instante de tiempo (Novak y Hifnawy, 1983). Esto ocurre cuando la matriz de amortiguamiento no es proporcional a la de masa o a la de rigidez o a una combinación lineal de ambas. En el caso de que la matriz de amortiguamiento sí sea proporcional, los modos de vibración amortiguada son reales e idénticos a los modos clásicos de vibración no amortiguada.

Continuando con el análisis, se tiene que a cada una de las frecuencias  $\omega_j$  le corresponde una respuesta  $u_j$ , donde  $A_j$  y  $B_j$  son constantes de integración que se obtienen a partir de las condiciones iniciales:

$$\{u_j(t)\} = e^{-\xi_j \omega_j t} \{ \{A_j\} \text{Cos}(\omega_{Dj} t) + \{B_j\} \text{Sen}(\omega_{Dj} t) \} \quad (20)$$

La respuesta total del sistema se puede obtener mediante la suma de las contribuciones de cada modo, la cual se define:

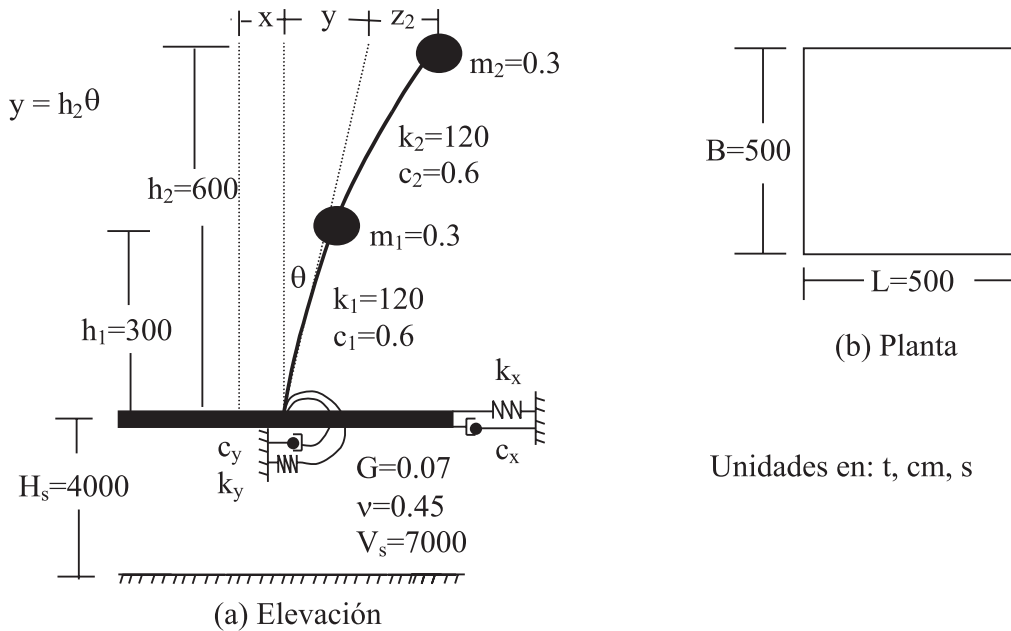
$$\{u(t)\} = \sum_{j=1}^N C_j \{\phi_j\} e^{\omega_j t} + \sum_{j=1}^N e^{-\xi_j \omega_j t} \left\{ \{A_j\} \cos(\omega_{Dj} t) + \{B_j\} \sin(\omega_{Dj} t) \right\} \quad (21)$$

Con el procedimiento descrito anteriormente se pueden obtener los valores y vectores modales complejos, así como la respuesta de la estructura.

## EJEMPLO DE APLICACIÓN

**Descripción de la estructura.** La figura 3 muestra una estructura de dos niveles con cimentación superficial cuadrada, la cual está ubicada en un depósito de suelo apoyado en suelo firme, donde  $H_s$  es la profundidad del estrato de suelo,  $V_s$  es la velocidad equivalente del depósito, obtenido mediante el recíproco de la lentitud media de los estratos que lo conforman (Rosenblueth y Reséndiz, 1988),  $\nu$  es el coeficiente de Poisson y  $G$  es el módulo de cortante.

**FIGURA 3**  
**Estructura hipotética de análisis**



Por hipótesis, se asume que la masa de la cimentación, y las rigideces y amortiguamientos de acoplamiento entre el movimiento horizontal y el de cabeceo, son despreciables. Las fracciones de amortiguamiento crítico de la estructura y del suelo por comportamiento histerético se asumen iguales al 5 por ciento.

**Definición de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez.** Las matrices de masa  $[m]$ , amortiguamiento  $[c]$  y rigidez  $[k]$  se definen así, en donde los valores de  $h_i$  corresponden a la altura de la masa "i" al nivel de desplante:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & & & \\ 0 & m_1 & & & \\ \hline m_2 & m_1 & & & \\ m_2 & m_1 h_1/h_2 & (m_1 h_1 + m_2 h_2)/h_2 & (m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2)/h_2^2 & \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 & 0 & 0 & \\ -c_2 & c_2 + c_1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & c_x & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & c_y/h_2^2 & \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \\ -k_2 & k_2 + k_1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & k_x & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & k_y/h_2^2 & \end{bmatrix}$$

Las filas de las anteriores matrices están relacionadas directamente con el vector transpuesto de desplazamientos que define la configuración deformada del sistema:

$$\{u\}^T = \{z_2, z_1, x, y\}$$

**Tipos de análisis a realizar.** Con el objeto de evaluar y comparar los valores y vectores característicos de la estructura mostrada en la figura 3, se estudiará los casos con y sin interacción, y con y sin amortiguamiento.

**Caso 1: Estructura sin interacción y sin amortiguamiento.** La ecuación modal que permite definir los valores y vectores característicos de un sistema no amortiguado es:

$$\det [k] - \omega^2 [m] = \det \begin{bmatrix} 120 - 0.3\omega^2 & -120 \\ -120 & 240 - 0.3\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

La ecuación característica que se obtiene es:

$$\omega^4 - 1200\omega^2 + 160000 = 0$$

Resolviendo la anterior ecuación se tiene que:

$$\omega_1^2 = 152.79 \Rightarrow \omega_1 = \varpi_1 = 12.36 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2^2 = 1047.21 \Rightarrow \omega_2 = \varpi_2 = 32.36 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo los anteriores valores en la ecuación modal se obtienen las formas modales:

$$[\varphi] = [\{\varphi_1\} \{\varphi_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.618 & -1.618 \end{bmatrix}$$

**Caso 2: Estructura sin interacción y con amortiguamiento.** La ecuación modal que permite definir el problema de valores y vectores característicos de un sistema amortiguado es:

$$\det \left| \omega^2 [M] + \omega [C] + [K] \right| =$$

$$\det \begin{bmatrix} 0.3\omega^2 + 0.6\omega + 120 & -0.6\omega - 120 \\ -0.6\omega - 120 & 0.3\omega^2 + 1.2\omega + 240 \end{bmatrix} = 0$$

La ecuación característica que se obtiene es:

$$\omega^4 + 6\omega^3 + 1204\omega^2 + 1600\omega + 160000 = 0$$

Como todos los coeficientes del polinomio anterior son positivos, sus raíces están formadas por una parte real y otra imaginaria. Al resolver la ecuación anterior, se obtienen los valores de  $\omega_j$ , y a partir de la ec. 19, se pueden encontrar las frecuencias  $\varpi_j$  y los amortiguamientos  $\xi_j$ , para cada modo:

$$\omega_1 = -0.38 \mp 12.35i \Rightarrow \varpi_1 = 12.54 \text{ rad/s} \Rightarrow \xi_1 = 0.03$$

$$\omega_2 = -2.62 \pm 32.25i \Rightarrow \varpi_2 = 33.59 \text{ rad/s} \Rightarrow \xi_2 = 0.08$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación modal se obtienen las formas modales:

$$[\varphi] = [\{\varphi_1\} \{\varphi_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.618 \mp 0i & -1.618 \mp 0i \end{bmatrix}$$

Se puede ver que la parte imaginaria de los modos obtenidos es nula, por lo que el sistema resulta ser un caso de amortiguamiento clásico. Esto se debe a que la matriz de

amortiguamiento de la estructura es una combinación lineal de la masa y la rigidez, y sus vectores característicos son iguales a los de un sistema no amortiguado. Como verificación se puede ver que la matriz  $[\varphi]^T [c] [\varphi]$  si es diagonal:

$$[\varphi]^T [c] [\varphi] = \begin{bmatrix} 1 & 0.618 \\ 1 & -1.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 \\ -0.6 & 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.618 & -1.618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 5.68 \end{bmatrix}$$

**Caso 3: Estructura con interacción y sin amortiguamiento.** Para la solución de este caso se deben evaluar los valores de las rigideces dinámicas del sistema suelo-estructura (Kausel et al., 1978), para lo cual es necesario iniciar los cálculos con la transformación de la cimentación cuadrada en una fundación circular que presente igual área para el movimiento traslación con radio  $R_x$  y la misma inercia para el de rotación con radio  $R_y$  (Wolf, 1994):

$$R_x = \left( \frac{A}{\pi} \right)^{0.5} = \left( \frac{500^2}{\pi} \right)^{0.5} = 282.09 \text{ cm}$$

$$R_y = \left( \frac{4I}{\pi} \right)^{0.25} = \left( \frac{4 * 500^4 / 12}{\pi} \right)^{0.25} = 285.37 \text{ cm}$$

Para el cálculo de las rigideces estáticas de traslación  $k_x^e$  y de cabeceo  $k_y^e$ , (Kausel et al., 1978) se tiene:

$$k_x^e = \frac{8GR_x}{2-\nu} \left( 1 + \frac{R_x}{H_s} \right) = \frac{8 * 0.07 * 282.09}{2-0.45} \left( 1 + \frac{282.09}{4000} \right) = 109.10 \text{ t/cm}$$

$$k_y^e = \frac{8GR_y^3}{3(1-\nu)} \left( 1 + \frac{R_y}{6H_s} \right) = \frac{8 * 0.07 * 285.37^3}{3(1-0.45)} \left( 1 + \frac{285.37}{6 * 4000} \right) = 7981095.57 \text{ t-cm/rad}$$

Las rigideces dinámicas ISE son expresiones que dependen de la frecuencia de excitación (Wolf, 1985), y se obtienen como el producto de las rigideces estáticas y su función de impedancia,

la cual se define como la relación en estado estacionario entre la fuerza (momento) aplicada y el desplazamiento (rotación) resultante en dirección de la fuerza, para una cimentación rígida carente de masa y excitada armónicamente.

Para el cálculo del período y de las rigideces dinámicas del sistema suelo-estructura, es necesario realizar un proceso iterativo (Kausel et al., 1978), que considera las funciones de impedancia y su contribución en las rigideces ISE. Luego de realizar este proceso se tiene que la rigidez de traslación horizontal,  $k_x$ , y la de cabeceo,  $k_y$ , son iguales a 107.15 t/cm y a 7494568 t-cm/rad, respectivamente. Adicionalmente, el período ISE es igual a 1.08 s.

Para la evaluación de las frecuencias modales recurriremos al planteamiento definido Frazer et al., (1946) y adaptado por Foss (1957):

$$[T] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[k]^{-1}[m] & -[k]^{-1}[c] \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0050 & -0.0025 & -0.0075 & -0.0063 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0025 & -0.0050 & -0.0038 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0028 & -0.0028 & -0.0056 & -0.0042 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0144 & -0.0072 & -0.0216 & -0.0180 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de frecuencias modales fue obtenido mediante un programa de cómputo que permite obtener los valores característicos de una matriz dada, donde el vector  $\{\omega^*\}$  contiene los valores de las frecuencias reciprocas de los dos primeros modos de vibración:

$$\{\omega^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \pm 0.1725i \\ 0 \pm 0.0371i \end{Bmatrix}$$

El vector de las frecuencias de los dos primeros modos,  $\{\omega\}$ , se pueden obtener utilizando la ec.19, la cual indica que las frecuencias del sistema corresponden a los valores inversos del vector  $\{\omega^*\}$ :



$$\{\omega\} = \frac{1}{\{\omega^*\}} = \begin{Bmatrix} 0 \mp 5.80i \\ 0 \mp 26.81i \end{Bmatrix}$$

La ec. 19 permite interpretar el resultado, en el cual el amortiguamiento de cada modo es nulo, lo que resulta ser evidente. La parte imaginaria corresponde entonces a la frecuencia circular de cada modo.

Se puede ver que la frecuencia fundamental ( $\omega_1=5.80$  rad/s) es similar a la del sistema ( $\omega_{SE}=5.82$  rad/s), debido a que esta última se obtiene utilizando valores equivalentes de masa, rigidez y altura, correspondientes al primer modo de vibración. Teniendo en cuenta que nos interesa analizar los dos primeros modos de vibración los cuales corresponden a las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , sólo se obtendrán dichos modos utilizando la ecuación modal:

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}\{\phi_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.651 & -1.984 \end{bmatrix}$$

El primer modo de vibración resulta ser similar al obtenido cuando no se consideran los efectos de interacción. Sin embargo el segundo modo, presenta una variación cercana al 20 por ciento.

**Caso 4: Estructura con interacción y con amortiguamiento.** Para este caso es necesario evaluar los coeficientes de amortiguamiento dinámico del sistema suelo-estructura (Kausel et al., 1978). Las constantes de amortiguamiento por translación horizontal,  $c_x$ , y por cabeceo,  $c_y$ , son iguales a 5.22 t-s/cm y a 142069 t-cm-s/rad, respectivamente. Adicionalmente, las fracciones de amortiguamiento crítico por translación,  $\xi_x$  y por cabeceo,  $\xi_y$ , son iguales a 0.14 y a 0.06, respectivamente.

Con valores anteriores se puede deducir que el sistema no presenta modos

clásicos de vibración, ya que los valores de los amortiguamientos, horizontal y de cabeceo, no son iguales a los de la estructura. Por lo tanto, la ecuación modal que define el problema de valores y vectores característicos de un sistema amortiguado es:

$$[\omega^2[m] + \omega[c] + [k]]\{\phi\} = \{0\}$$

Al igual que en el caso anterior, construimos la matriz [T]:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -0.0050 & -0.0025 & -0.0075 & -0.0063 & -0.005 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0025 & -0.0050 & -0.0038 & 0 & -0.005 & 0 & 0 \\ -0.0028 & -0.0028 & -0.0056 & -0.0042 & 0 & 0 & -0.0487 & 0 \\ -0.0144 & -0.0072 & -0.0216 & -0.0180 & 0 & 0 & 0 & -0.019 \end{bmatrix}$$

El vector de frecuencias modales reciprocas obtenido mediante un programa de cómputo resulta ser:

$$\{\omega^*\} = \begin{Bmatrix} -0.0105 \pm 0.1715i \\ -0.0056 \pm 0.0341i \end{Bmatrix}$$

El vector de las frecuencias de los dos primeros modos,  $\{\omega\}$ , se pueden obtener utilizando la ec.19, la cual indica que las frecuencias del sistema corresponden a los valores inversos del vector  $\{\omega^*\}$ :

$$\{\omega\} = \frac{1}{\{\omega^*\}} = \begin{Bmatrix} -0.354 \mp 5.81i \\ -4.702 \mp 28.541i \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= 5.99 \text{ rad/s} \Rightarrow \xi_1 = 0.06 \\ \omega_2 &= 30.99 \text{ rad/s} \Rightarrow \xi_2 = 0.15 \end{aligned}$$

La ec. 19 muestra que la parte imaginaria corresponde a la frecuencia circular amortiguada. Al sustituir los anteriores valores en la ecuación característica se obtienen las formas modales (sólo se colocan los valores de los dos primeros modos):

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}\{\phi_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.651 + 0.168i & -1.665 + 1.132i \end{bmatrix}$$

Se puede ver que la parte imaginaria de los modos obtenidos no es nula, por lo que el sistema resulta ser un caso de amortiguamiento no clásico. Esto se debe a que la matriz de amortiguamiento de la estructura no es una combinación lineal de la masa y la rigidez. La parte real es similar a la obtenida en el caso anterior, sin embargo, el hecho de que las formas modales presenten parte imaginaria, significa que la respuesta del sistema está desfasada cierta cantidad, respecto a la que presentaría un análisis modal sin amortiguamiento.

En la tabla 1 se presenta el resumen de los resultados obtenidos en los cuatro casos estudiados, en donde se pueden ver las variaciones de las frecuencias y los amortiguamientos modales, así como los cambios en los vectores propios. Las principales diferencias se aprecian al comparar los sistemas considerando y despreciando los efectos de interacción suelo-estructura, en los cuales se hace evidente una reducción importante en las frecuencias modales, producto de la flexibilidad del suelo. Los amortiguamientos modales aumentan debido a la disipación de energía que induce el efecto ISE. Se puede ver que las formas modales del sistema con interacción resultan ser cantidades complejas.

**TABLA 1**  
**Resultados obtenidos para los casos estudiados**

Casos		$\omega_1$	$\omega_2$	$\varphi_{21}$	$\varphi_{22}$	$\xi_1$	$\xi_2$
<b>Sin interacción</b>	Sin amortiguamiento	12.36	32.36	0.618	-1.618	0.00	0.00
	Con amortiguamiento	12.54	33.59	0.618	-1.618	0.03	0.08
<b>Con interacción</b>	Sin amortiguamiento	5.80	26.81	0.615	-1.984	0.00	0.00
	Con amortiguamiento	5.99	30.99	0.651 + 0.168i	-1.665 + 1.132i	0.06	0.15

## COMENTARIOS FINALES

Se demostró que sistema suelo-estructura no siempre presenta modos clásicos de vibración, debido a las diferencias que se tienen entre las fracciones de amortiguamiento crítico de la estructura, respecto a las del sistema suelo-estructura, por lo que se considera que los amortiguadores que sustituyen al suelo son los responsables de que el sistema presente modos de amortiguamiento no clásico.

Se presentó un método propuesto en la literatura para determinar los valores y vectores característicos de un sistema que presenta amortiguamiento no clásico y se realizó una aplicación mediante un ejemplo práctico, en el cual se pueden comparar los parámetros modales cuando se incluyen los efectos ISE con o sin amortiguamiento.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al instituto de ingeniería de la UNAM, a la DGAPA y a la Universidad EAFIT su apoyo para la realización de este artículo. También agradece en forma muy especial a los Drs. David Murià-Vila, Javier Avilés López y Juan Diego Jaramillo Fernández, su apoyo y sus valiosos comentarios.

## BIBLIOGRAFÍA

Argyris J. y Mlejnek H-P. (1991). Dynamics of structures. Netherlands: Elsevier Science Publishers.

Avilés J. y Pérez-Rocha L. E., (1996), "Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth". En: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 15, pp. 11-27.

Caughey T. K., (1960), "Classical normal modes in damped linear dynamics systems". En: *Journal of Applied Mechanics*, No. 59-A-62.

Celebi M. (1998). "Radiation damping observed from recorded seismic responses of buildings". En: 11<sup>th</sup> *European Conference on Earthquake Engineering*, Paris.

Chopra A.K., (1995). Dynamics of structures. USA: Prentice-Hall.

Clough R. W. y Penzien J. (1993). Dynamics of structures. 2<sup>a</sup> edición. Singapur: McGraw-Hill.

Foss K.A. (1957). "Co-ordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamics systems". En: *Journal of Applied Mechanics*, No. 57-A-86.

Frazer R. A., Duncan W. J. y Collar A. R., (1946). Elementary matrices. England: Cambridge University Press, pp. 327.

Kausel E., Whitman R., Morray J. y Elsabee F. (1978). "The spring method for embedded foundations". En: *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 48.

- Novak M. y Hifnawy E., (1983). "Effect of soil-structure interaction on damping of structures". En: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **Vol. 11**, pp. 595-621.
- Murià-Vila D. y Toro A. M. (1998). "Effects of several events recorded at a building founded on soft soil". En: 11th European Conference on Earthquake Engineering, París.
- Rayleigh Lord., (1945). *The theory of sound*. 2ª ed., Nueva York: Dover Publications. (Original editado en 1877).
- Rosenblueth E. y Newmark N. M., (1971). *Fundamentals of earthquake engineering*. USA: Prentice-Hall.
- Rosenblueth E. y Reséndiz D. (1988). "Disposiciones reglamentarias de 1987 para tener en cuenta interacción suelo-estructura". En: *Series del Instituto de Ingeniería (UNAM)*, **No. 509**.
- Wolf J. P., (1985). *Dynamic soil-structure interaction*. USA: Prentice-Hall.
- Wolf J. P., (1994). *Foundation vibration analysis using simple physical models*. USA: Prentice-Hall.

