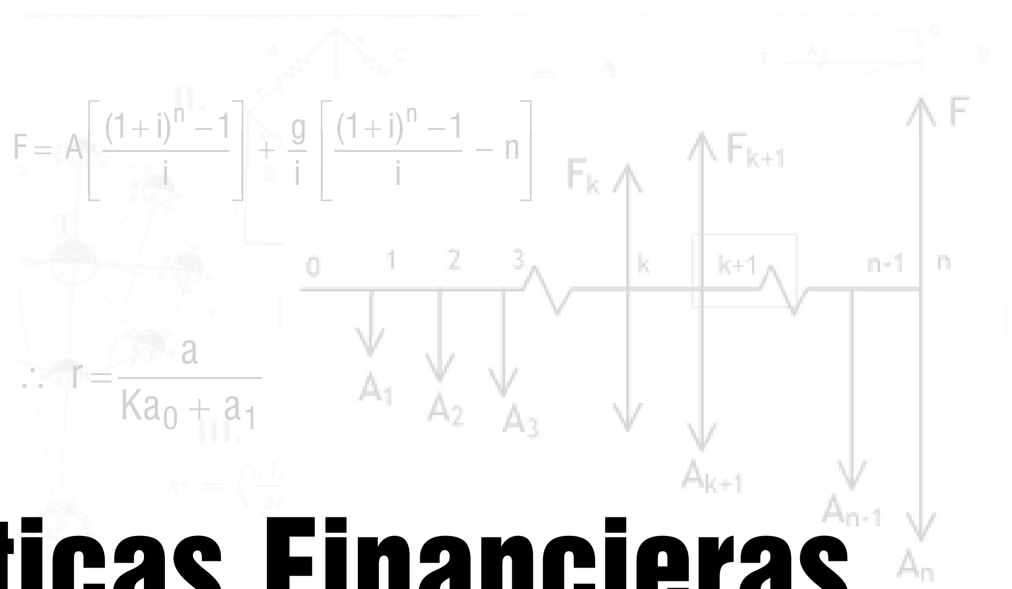



# Matemáticas Financieras

## con ecuaciones de diferencias finitas

### Otra aproximación al cálculo del valor del dinero en el tiempo

Oscar Robledo

Tradicionalmente se han desarrollado las ecuaciones necesarias para calcular el valor del dinero en el tiempo con base en el resultado obtenido del desarrollo de las series generadas por los flujos de efectivo en el tiempo. Ahora bien, a pesar de que los principios básicos se desarrollaron hace muchos años, se presenta una manera novedosa de aproximarse al cálculo del valor del dinero en el tiempo, ya que en nuestro medio dicha metodología no es conocida por el común de las personas que trajina estos temas y sólo hasta hace pocos años se ha iniciado su enseñanza en cursos de posgrado y pregrado de la universidad.

Para el desarrollo del calculo del valor del dinero en el tiempo se han planteado las siguientes premisas, que se respetan:

**Tasa de interés:** Expresa el valor del dinero en el tiempo e indica la cantidad de dinero que genera un capital por unidad de tiempo. Se considera constante durante el periodo de análisis.

**Interés compuesto:** Los intereses generados por un capital en un período de tiempo generaran nuevos intereses en períodos de tiempo subsecuentes; es decir, los intereses se capitalizan, generando más intereses.

**Capitalización discreta:** Los montos de dinero se presentan en momentos del tiempo claramente definidos, esto es, el tiempo se mide en forma discreta en unidades como meses, años.

Al darse el desarrollo de las matemáticas a través del tiempo y tocando más en detalle el tema del cálculo diferencial, se ve que inicialmente se desarrolla el manejo de variables discretas, en donde los valores que toman éstas pueden asociarse con los números naturales y se desarrollan los modelos para manejar ecuaciones con incrementos o diferenciales. Al hacer estos incrementos cada vez menores, aparece el cálculo infinitesimal: cuando ese incremento o delta tiende a cero. Es así como aparecen las ecuaciones diferenciales como herramienta para solucionar muchas problemas del calculo y la física, entre otras situaciones.

Y que pasa cuando esos incrementos no se hacen muy pequeños sino que continúan siendo apreciables y de consideración?

Para este caso se han desarrollado las ecuaciones de diferencias finitas, que funcionan de manera similar a las ecuaciones diferenciales, con la excepción de que en este caso las diferencias entre los valores que pueda tomar la variable en estudio sí son apreciables.

Para el caso del valor del dinero en el tiempo, se encuentra que se puede hacer que la unidad de tiempo en el cual se define ingresos o beneficios monetarios y egresos o salidas de efectivo, asimismo como los momentos en que se capitalicen los intereses correspondientes, se comporte como una variable discreta, siendo posible aplicar los desarrollos logrados para ecuaciones de diferencias finitas.

---

OSCAR ROBLEDO. Profesor, departamento de Proyectos, Universidad EAFIT.
Email: orobledo@eafit.edu.co

Se da el caso más sencillo: se va a analizar el comportamiento de una cantidad única de dinero a través del tiempo.

Como unidad de tiempo se toman meses y se asume una tasa de interés i%, como el costo del dinero, definida para un período igual.

Si se tiene hoy esa cantidad de dinero, que se llama P, dentro de un mes se tiene:

$$F_1 = P + Pi = P(1+i)$$

Y dentro de dos meses:

$$F_2 = F_1 + F_1 i = F_1(1+i) = P(1+i)^2$$

Y un mes mas adelante:

$$F_3 = F_2 + F_2 i = P(1+i)^3$$

Lo cual puede ser presentado de otra manera:

Sea $F_0 = P$

$F_1 = P_1$

$F_2 = P_2$

Entonces

$$F_1 = F_0 + \Delta = P + \Delta$$

$$F_2 = F_1 + \Delta$$

Para este caso $\Delta_K = F_{k-1}\, i$ , quedando:

$$F_1 = P + Pi = P(1+i)$$

$$F_2 = F_1 + F_1 i = F_1(1+i) = P(1+i)^2$$

Que es similar a lo planteado inicialmente.

Esto se puede generalizar a que si F es el valor futuro, en cualquier período n de esa cantidad de dinero P, con la tasa de interés i, entonces:

$$F = P(1+i)^n$$

Fórmula bien conocida por aquellos que han estudiado matemáticas financieras y que es la base de todo el cálculo del dinero en el tiempo.

¿Cómo se puede relacionar esta situación con los postulados de las ecuaciones de diferencias?

Antes de responder esta pregunta se profundiza un poco en este tipo de ecuaciones.

Una función de la forma:

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2} \ldots y_{n+k-1}) \quad \text{con } n, k \in \mathbb{N} \text{ y } y_n, y_{n+1}, y_{n+2} \ldots y_{n+k-1} \in \mathbb{R}$$

se llama ecuación de diferencias de orden k

La anterior función también puede presentarse en la forma:

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_k y_{n-k} = g(n)$$

Donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ son coeficientes cualquiera, que pueden ser constantes o variables.

Si se limita a n dentro de un rango de valores, en nuestro caso los enteros positivos, la ecuación toma el nombre de ecuación de diferencias finitas.

Para el análisis del valor del dinero en el tiempo, es suficiente con tomar de la ecuación general de diferencias finitas presentada, sólo una diferencia. Para esto se puede simplificar esta ecuación y quedar con:

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} = g(n)$$

Esta ecuación de diferencias finitas, por tener solo una diferencia, se dice que es de primer orden. Por facilidad para el desarrollo que se pretende lograr, se re-escribe esta ecuación colocando primero el valor de n que sigue en la sucesión, que es n+1 y luego el valor de n, lo cual se puede expresar:

$$a_0 y_{n+1} + a_1 y_n = g(n)$$

Si $a_0$ y $a_1$ son constantes arbitrarias diferentes de cero con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, se dice que la ecuación de diferencias es lineal (y de primer orden).

Entonces $a_0 y_{n+1} + a_1 y_n = g(n)$, con las condiciones expresadas, es una ecuación de diferencias finitas lineal de primer grado, que por facilidad simplemente llamaremos ecuación de diferencias finitas.

De manera similar como a las ecuaciones algébricas es posible encontrar una solución, en donde se calcule un valor (o valores) que al asignárselo a la variable (o variables) haga verdadera, o satisfaga la igualdad planteada por la ecuación.

Por ejemplo si establecemos la ecuación:

$3x - 4 = 2$ encontramos que al reemplazar x por 2 se satisface la igualdad.

Es decir si $x = 2$ entonces $3 \times 2 - 4 = 2$ , o sea que $2 = 2$

Otro ecuación puede ser:

$4x^2 - 6x + 10 = 0$

En esta caso encontramos que existen dos valores de x que satisfacen la ecuación:

$x_1 = 0.750$

$x_2 = 1.392$

De manera similar, se puede encontrar solución a las ecuaciones de diferencias, que en esta situación la solución será otra ecuación.

Sea $y_n = f(n)$, se dice que $y_n$ es una solución de una ecuación de diferencias si:

- $y_n$ está definida para el conjunto de valores de n, con $n \in \mathbb{N}$
- Al reemplazar $y_n$ y sus respectivas diferencias en la ecuación dada, la satisfacen.

Si se tiene la ecuación $y_n = 3^n$, se ve si es una solución de la ecuación de diferencias $y_{n+1} = 3y_n$.

$y_{n+1} = 3y_n \qquad y_{n+1} - 3y_n = 0$

comprobemos si $y_n$ es solución:

Como $y_n = 3^n$ entonces $y_{n+1} = 3^{n+1}$ y en la ecuación:

$3^{n+1} - 3 \times 3^n = 0 \quad 3^{n+1} - 3^{n+1} = 0$ lo cual es verdadero, con $n = 0, 1, 2, \ldots$

Se puede observar que $y_n$ es una de las muchas soluciones que la ecuación $y_{n+1} = 3y_n$ pueda tener.

Si se establece $y_n = c3^n$, con c una constante cualquiera, podemos verificar si esta ecuación es una solución de la ecuación de diferencias:

$y_n = c3^n \qquad y_{n+1} = c3^{n+1}$ Al reemplazar tenemos:

$c3^{n+1} - 3xc3^n = 0 \quad c3^{n+1} - c3^{n+1} = 0$ lo cual es cierto.

Como hemos visto, una ecuación de diferencias tiene como solución otra ecuación, y de manera similar a como sucede con las ecuaciones diferenciales, esta ecuación solución corresponde a una familia de ecuaciones.

Cuando se tiene una ecuación de diferencias finitas lineal de primer orden tendremos dos situaciones:

**a. $g(n) = 0$**

En este caso $a_0y_{n+1} + a_1y_n = 0$ se llamará una ecuación homogénea o reducida.

Se va a denotar como $y_{hn}$ a la solución de la ecuación homogénea la cual se llamará la solución homogénea.

**b. $g(n) \neq 0$**

Para este caso $a_0y_{n+1} + a_1y_n = g(n)$ se llama la ecuación completa.

Se denota como $y_{pn}$ una solución de la ecuación completa, la cual se llama una solución particular.

Ahora bien, se puede demostrar que la solución general de la ecuación de diferencias $a_0y_{n+1} + a_1y_n = g(n)$ con $g(n) \neq 0$ tendrá la forma:

$$y_n = y_{hn} + y_{pn}$$

y que $y_{pn}$ será del mismo tipo que g(n).

Es decir, la solución de una ecuación de diferencias finitas lineal de primer orden se obtiene de la combinación lineal de la solución homogénea y de una solución particular, la cual será similar a g(n).

Si por ejemplo, $g(n) = 3n^2 + 4$, la solución particular, $y_{pn}$, será un polinomio de segundo grado.

Ahora bien, se pueden presentar dos situaciones con g(n):

1. g(n) sea una constante.
2. g(n) sea una función de n.

Las soluciones para cada caso son:

**1. Cuando g(n) es una constante:**

Sea $g(n) = M$ con M una constante arbitraria, $M \in \mathbb{R}$

La ecuación $a_0y_{n+1} + a_1y_n = g(n) = M$ se puede escribir:

$$y_{n+1} + \frac{a_1}{a_0} y_n = \frac{M}{a_1}$$

Hagamos: $A = \frac{a_1}{a_0}$ y $B = \frac{g(n)}{a_0}$

Reemplazando en la ecuación de diferencias se tiene que:

$$y_{n+1} = Ay_n + B$$

Para poder establecer una solución se necesita definir una condición de borde, en este caso se puede asumir que se conoce el primer valor, cuando n = 0.

Sea $y_0$ el valor dado cuando n = 0, así tendremos:

$n = 0 \qquad y_1 = Ay_0 + B$

$n = 1 \qquad y_2 = Ay_1 + B = A^2y_0 + B(1 + A)$

$n = 2 \qquad y_3 = Ay_2 + B = A^3y_0 + B(1 + A + A^2)$

•

•

•

$n = k\text{-}1 \qquad y_k = A^ky_0 + B(1 + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})$

$k=1, 2, 3, \ldots$

De series se sabe que:

$$1 + A + A^2 + \ldots + A^{k-1} = \frac{1-A^k}{1-A} \quad \text{con} \quad A \neq 1$$

Así,

$$y_k = A^ky_0 + B\frac{1-A^k}{1-A}$$

Lo cual se puede generalizar:

$$y_n = A^ny_0 + B\frac{1-A^n}{1-A}$$

Ahora, si $A = 1$ se tiene que:

$$1 + A + A^2 + \ldots + A^{k+1} = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{k \text{ veces}} = k$$

Entonces,

$$y_k = y_0 + Bk$$

Que generalizando queda:

$$Y_n = y_0 + Bn$$

En resumen, con $y_0$ conocido, se tiene que la solución de la ecuación de diferencias finitas es:

$$y_n = \begin{cases} A^n y_0 + B\left[\dfrac{1-A^n}{1-A}\right] & \text{si } A \neq 1 \\ y^0 + Bn & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

Se puede presentar el caso en donde no se conozca el primer valor, $y_0$, pero si se conoce cualquier otra condición de borde, que para el caso se asume que será $y_k$. Es así como podemos resolver la ecuación de diferencias finitas con base en la condición de borde conocida:

Sea $y_k = S$ $(S \in |R)$, el valor dado cuando $n = k$.

En este caso se puede considerar que $y_0 = C$, donde C es una constante arbitraria, así se tiene que la solución será similar a la ya establecida:

$$y_n = A^nC + B\left[\frac{1-A^n}{1-A}\right] \qquad \text{si } A \neq 1$$

En esta ecuación, al conocer k, $y_k$ y los demás componentes, se puede calcular C:

Ahora, se puede generalizar: si $y_k$ es conocido y $y_k \neq 0$:

$$y_n = \begin{cases} A^n C + B\left[\dfrac{1-A^n}{1-A}\right] & \text{si } A \neq 1 \\ C + Bn & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

**2. Cuando g(n) es una función.**

En este caso y en vista que se utilizan las ecuaciones de diferencias finitas en el cáculo del valor del dinero en el tiempo, se plantean sólo dos tipos de funciones:

**a. g(n) es un polinomio de primer grado.**

Se tiene entonces que:

$a_0y_{n+1} + a_1y = tn + u$ con t, u constantes arbitrarias

Se sabe que la solución será: $y_n = y_{hn} + y_{pn}$ con $y_{pn}$ una función de la forma de g(n).

**Solución homogénea**

Se trabaja con la ecuación homogénea $a_0y_{n+1} + a_1y_n = 0$

Para este caso: $A = \dfrac{a_1}{a_0}$ y $B = 0$

$$y_{hn} = A^nC + B\left[\frac{1-A^n}{1-A}\right] = A^nC = -\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n C$$

$$y_{hn} = A^nC$$

**Solución particular**

La solución será de la forma bn + d, entonces:

$y_{pn} = bn + d$ con b y d constantes cualquiera

Así, $y_{pn+1} = b(n+1) + d$ Llevando $y_{pn}$ y $y_{pn+1}$ a la ecuación original:

$a_0 y_{n+1} + a_1 y_n = tn + u$ tenemos que:

$a_0(b(n+1) + d) + a_1(bn + d) = tn + u$

$a_0bn + a_0b + a_0d + a_1bn + a_1d = tn + u$

$n(a_0b + a_1b) + a_0b + a_0d + a_1d = tn + u$

Se pueden encontrar los valores de b y d en función de $a_0$, $a_1$, t y u, aplicando el principio de los coeficientes indeterminados, por el cual los coeficientes de las variables de una ecuación, para que ésta se cumpla, son iguales.

Coeficiente de n:

$a_0b + a_1b = tn \qquad \therefore b = \dfrac{t}{a_0 + a_1}$

Términos independientes

$a_0b + a_0d + a_1d = u \qquad \therefore d = \dfrac{u(a_0 + a_1) - t(a_0 + a_1)}{(a_0 + a_1)^2}$

Con b y d ya conocidos, se puede escribir la solución a la ecuación de diferencias finitas:

$y_n = A^nC + bn + d$

Un ejemplo:

Encontrar la solución a la ecuación de diferencias

$y_{n+1} - 4y_n = 3n + 2$ con $y_2 = 6$

En este caso tenemos que:

$a_0 = 1, \qquad a_1 = -4$

$t = 3, \qquad u = 2, \qquad g(n) = 3n + 2$

Entonces: $A = -\dfrac{1}{4} = 4$

$b = \dfrac{3}{1-4} = -1 \qquad d = \dfrac{5(1-4) - 3(1-4)}{(1-4)^2} = \dfrac{2}{3}$

Así: $y_{hn} = 4^n \times C$

$y_{pn} = -n + \dfrac{2}{3}$

Entonces $y_n = y_{hn} + y_{pn} = 4^n x C - n + \dfrac{2}{3}$ con $y_2 = 6$

$Y_2 = 6 = 4^2 \times C - 2 + \dfrac{2}{3} \quad \therefore \ C = \dfrac{1}{3}$

La solución es:

$$y_n = \frac{1}{3}4^n - n + \frac{2}{3}$$

**b. g(n) es una función exponencial.**

La ecuación de diferencias finitas será del tipo:

$a_0 y_{n+1} + a_1 y_n = ak^n$ con a, k constantes arbitrarias.

Así $g(n) = ak^n$

Cómo lograr la solución:

**Solución homogénea:**

Se trabaja con la ecuación homogénea $a_0 y_{n+1} + a_1 y_n = 0$

$A = \dfrac{a_1}{a_0}$ y $B = 0$

$$y_{hn} = A^nC + B\left[\frac{1-A^n}{1-A}\right] = A^nC = -\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^n C$$

$$y_{hn} = A^nC$$

**Solución particular:**

Se tiene que la solución será de la forma $rk^n$, entonces:

$y_{pn} = rk^n$

$y_{pn+1} = rk^{n+1}$

reemplazando en la ecuación original:

$a_0rk^{n+1} + a_1rk^n = ak^n \qquad ka_0rk^n + a_1rk^n = ak^n$

$k^n r(ka_0 + a_1) = ak^n$

Por coeficientes indeterminados:

$r(ka_0 + a_1) = a \qquad \therefore \quad r = \dfrac{a}{ka_0 + a_1}$

Así, la solución será:

$y_n = y_{hn} + y_{pn} = A^nC + rk^n$

Se calcula C reemplazando en la ecuación las condiciones iniciales dadas (o de borde).

Ejemplo:

1. Buscar la solución de:
   $y_{n+1} = 8y_n + 4x3^n \qquad$ con $y_0 = -2$

**Solución homogénea:**

$y_{n+1} - 8y_n = 0 \qquad A = 8 \qquad B = 0$

Entonces $\quad y_{hn} = 8^nxC$

**Solución particular:**

La podemos encontrar por dos caminos:

**a. La solución particular es una función exponencial**

$y_{n+1} - 8y_n = 4x3^n \qquad g(n) = 4x3^n$ con $k = 3$

Así,

$y_{pn} = rk^n = r3^n$

$y_{pn+1} = r3^{n+1}$ reemplazando en la ecuación original:

$r3^{n+1} - 8xr3^n = 4x3^n \qquad 3xrx3^n - 8xr3^n = 4x3^n$

$3^n(3r - 8r) = 4x3^n$

Por coeficientes indeterminados:

$(3r - 8r) = 4 \qquad \therefore \; r = -4/5$

**b. Aplicando la formula, se tiene que:**

$a = 4 \qquad k = 3$

$a_0 = 1 \qquad a_1 = 8$

$r = \dfrac{a}{ka_0} = \dfrac{4}{3x1-8} = -4/5$

Así, la solución particular será:

$y_{pn} = -(4/5)\,x3^n$

Encontramos el valor de C:

$y_n = y_{hn} + y_{pn} = 8^nxC - (4/5)\,x3^n \qquad$ con $y_0 = -2$

$y_0 = -2 = 8^0xC - (4/5)\,x3^0 \quad \therefore \quad C = -2 + 4/5 = -6/5$

La solución será:

$y_n = -(6/5)x8^n - (4/5)x3^n$

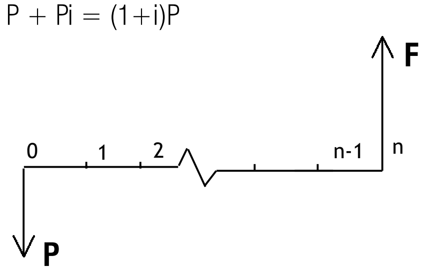
Se puede aplicar ahora lo desarrollado con las ecuaciones de diferencias finitas a las matemáticas financieras.

Se toma un pago único y se ve cómo se pueden aplicar las ecuaciones de diferencias finitas para calcular su valor en el futuro:

Si se tiene un valor P en el momento inicial,

en el período siguiente será, como ya hemos visto,

$F_1 = P + Pi = (1+i)P$




Sea $F_k$ el valor de una cantidad de dinero P en

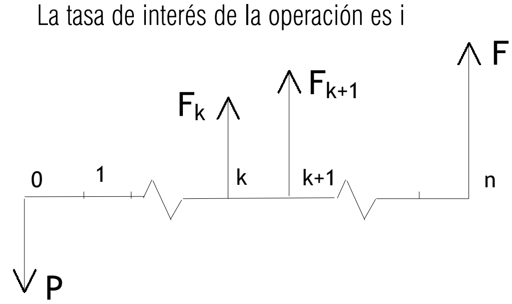
el período k

$F_{k+1}$ será el valor en el período k+1

El valor presente, P, es $F_0$

El valor futuro, F, es $F_n$

La tasa de interés de la operación es i



Podemos establecer:

$$F_{k+1} = F_k + i\,F_k = (1+i)F_k$$

Que es una ecuación de diferencias finitas.

$$F_{k+1} - (1+i)F_k = 0 \qquad \text{Con } F_0 = P$$

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1+I \qquad A = 1+i$$
$$B = 0$$

$$F_k = A^k F_0 + B\left[\frac{1-A^k}{1-A}\right] = (1+i)^k F_0$$

$$F_k = (1+i)^k F_0$$

Y como $F_0 = P$

Se puede hacer $k = n$

$F_k = F_n = F$

Entonces: $F = P(1+i)^n$

Que es la ecuación desarrollada para calcular el valor futuro, en n períodos y a una tasa de interés i, de una cantidad de dinero de hoy.

Se pueden calcular las demás fórmulas utilizadas en matemáticas financieras:

**Serie uniforme**

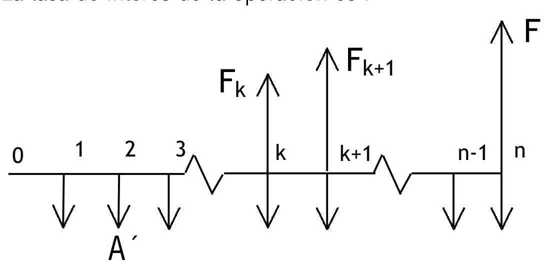
Sea $F_k$ el valor de una serie uniforme A' en el período k

$F_{k+1}$ será el valor en el período k+1

El valor del primer período, $F_0$ es 0

El valor futuro, F, es $F_n$

La tasa de interés de la operación es i




Para este caso podemos plantear la ecuación de diferencias:

$$F_{k+1} = F_k + i\,F_k + A = (1+i)F_k + A$$

así: $a_0 = 1$
$a_1 = -(1+i)$
$g(k) = A'$

$A = 1+i$
$B = A'$

$$F_k = A^k F_0 + B\left[\frac{1-A^k}{1-A}\right] = A'\left[\frac{1-(1+i)^k}{1-(1+i)}\right] = A'\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right]$$

Entonces al final del proceso, $k = n$ así:

$$F = A'\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

En el caso de series uniformes se acostumbra utilizar A para denominar el valor igual que aparece periódicamente en el tiempo, es así como la ecuación que hemos logrado se puede escribir:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

**Serie gradiente aritmética**

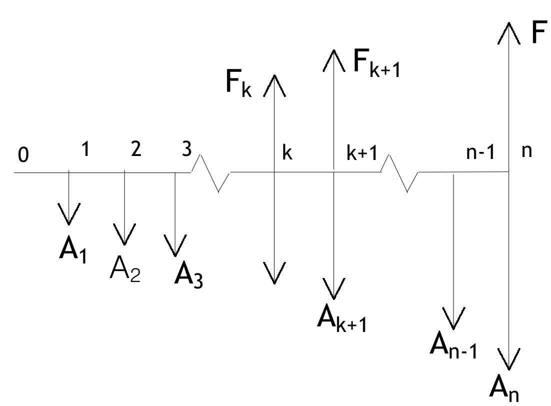
Sea $F_k$ el valor acumulado en el período k

$F_{k+1}$ será el valor en el período k+1

El valor del primer período, $F_0$ es 0

El valor futuro, F, es $F_n$

La constante de crecimiento es g,




REVISTA Universidad EAFIT No. 124 | octubre.noviembre.diciembre | 2001

así se tiene:

$A_2 = A_1 + g$

$A_3 = A_1 + 2g$

$A_{k+1} = A_1 + kg$

$A_n = A_1 + (n-1)g$

La tasa de interés de la operación es i.

Se puede plantear la ecuación de diferencias:

$F_{k+1} = F_k + i F_k + A_1 + kg = (1+i)F_k + A_1 + kg$

$F_{k+1} - (1+i)F_k = A_1 + kg$

La cual es una ecuación de diferencias finitas con g(k) una función polinomial, así

$a_0 = 1$

$a_1 = 1+ i$

$g(k) = A_1 + kn$

**Solución homogénea:**

$F_{k+1} - (1+i)F_k = 0 \qquad F_{hk} = (1+i)^k . C$

**Solución particular:**

$F_{pk} = ek + h$

$F_{pk+1} = e(k+1) + h$ en la ecuación original

$e(k+1) + h - (1+i)(ek + h) = A_1 + kg$

$e(k+1) + h - (1+i)(ek + h) = A_1 + kg$

$ek+e + h - ek - h - eki - hi = A_1 + kg$

$-eki + e - hi = A_1 + kg$

Se logra que:

$- ei = g \qquad \therefore e = -\frac{g}{i}$

$e - ih = A \qquad \therefore h = -\frac{A_1}{i} - \frac{g}{i^2}$

$$F_{pk} = -\frac{g}{i}k - \frac{A_1}{i} - \frac{g}{i^2} = -\frac{g}{i}\left(k+\frac{1}{i}\right) - \frac{A_1}{i}$$

Entonces:

$$F_k = (1+i)^k . C - \frac{g}{i}\left(k+\frac{1}{i}\right) - \frac{A_1}{i} \quad \text{y con } F_0 = 0$$

$$F_0 = 0 = (1+i)^0 . C - \frac{g}{i}\left(0+\frac{1}{i}\right) - \frac{A_1}{i} \quad \therefore \quad C = \frac{g}{i^2} + \frac{A_1}{i}$$

La solución es:

$$F_k = (1+i)^k\left(\frac{g}{i^2} + \frac{A_1}{i}\right) - \frac{g}{i}\left(k+\frac{1}{i}\right) - \frac{A_1}{i}$$

$$= -\frac{A_1}{i}\left[(1+i)^k - 1\right] + \frac{g}{i}\left[\frac{(i+1)^k - 1}{i} - k\right]$$

$$F_k = A_1\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right] + \frac{g}{i}\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i} - k\right]$$

Cuando $k = n, \quad F_k = F_n = F$

$$F = A_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{g}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

Que es lo mismo que :

$F = F_a + F_g$

con $F_a$: Valor futuro de la serie uniforme $A_1$

$F_g$: Valor futuro del gradiente convencional g

$F = A(F/A, i\%, n) + g(F/g, i\%,n)$.

**Ejemplos:**

1. Se colocan $60,000 en una cuenta de ahorros. Cada mes se sacan los 2/3 de lo que se tiene en la cuenta. Si se reconocen intereses del 1.2% mensual, establecer una ecuación que permita calcular el saldo en la cuenta en cualquier momento. ¿Con cuánto se contará al cabo de 8 meses?

   Sea $S_n$ el saldo en la cuenta luego del retiro. Se puede establecer la ecuación de diferencias:

$$S_{n+1} = S_n + i S_n - \frac{2}{3}S_n \qquad \text{con } S_0 = 60{,}000$$

$$S_{n+1} = S_n\left(1+i-\frac{2}{3}\right) = S_n\left(\frac{1}{3}+i\right) \qquad S_{n+1} - S_n\left(\frac{1}{3}+i\right) = 0$$

La solución es:

$$S_n\left(\frac{1}{3}+i\right)^n \text{ x } S_0=\left(\frac{1}{3}+i\right)^n \text{ x } 60{,}000 \quad \text{como} \quad i = 1.2\% = 0.012$$

$S_n = 60{,}000 \text{ x } 0.3453^n$ Con esta fórmula se puede calcular el saldo de la cuenta en cualquier momento.

Al cabo de 8 meses, $n = 8$

$$S_8 = 60{,}000 \text{ x } 0.3453^8 = 12.14 \approx 12$$

En 8 meses se contará con \$12.

2. Se cuenta con \$300,000 los cuales se invierten en una cuenta de ahorros. El primer mes se retiran \$15,000, el segundo mes se retiran \$ 17,000 el tercero \$19,000 y así sucesivamente. Si la cuenta reconoce intereses del 1.5% mensual, ¿cuánto tiempo se podrá retirar dinero de la cuenta?

Se puede escribir la ecuación de diferencias:

$$S_{n+1} = S_n + iS_n -15{,}000 -2{,}000n = (1+i)S_n -(15{,}000 + 2{,}000n)$$

$$S_{n+1} - (1+i)S_n = - (5{,}000 + 2{,}000n) \qquad a_0 = 1$$

$$a_1 = 1+i$$

$$g(n) = -15{,}000 -2{,}000n$$

**Solución homogénea:**

$$S_{n+1} - (1+i)S_n = 0 \qquad S_{hn} = (1+i)^n.C$$

**Solución particular:**

Será un polinomio de primer grado.

$$S_{pn} = an + b$$

$S_{pn+1} = a(n+1) +b$ y en la ecuación original

$$a(n+1) +b - (1+i)(an + b) = -15{,}000 - 2{,}000n$$

$$an +a +b -an -b -ain -ib = -15{,}000 -2{,}000n$$

$$-ain +a -ib = -15{,}000 -2{,}000n$$

$$-ai=2{,}000 \qquad \therefore a=\frac{2{,}000}{i}=\frac{2{,}000}{0.015}=133{,}333$$

$$a-ib=15{,}000 \qquad \therefore b=9´888{,}889$$

Entonces: $S_n = (1+i)^n.C + 133{,}333n + 9'888{,}889$ con $S_0 = 300{,}000$

$$S_o = 300{,}000 = (1+i)^0C + 133{,}333\text{x}0 + 9'888{,}889 \qquad \therefore C = -9'588{,}889$$

$$S_n = -9'588{,}889\,(1+i)^n + 133{,}333n + 9'888{,}889$$

$$= -9'588{,}889\text{x}1.015^n + 133{,}333n + 9'888{,}889$$

Se podrá retirar dinero hasta que este se acabe, en cuyo caso $S_n = 0$

Así,

$S_n = 0 = -9'588,889 \text{ x } 1.015^n + 133,333n + 9'888,889$
despejamos n y se obtiene que:

$n = 12.63 \approx 12$
El dinero dura 12 meses, quedando un pequeño saldo disponible.

## CONCLUSIÓN

Se puede concluir que al utilizar las ecuaciones de diferencias finitas en el cálculo del valor del dinero en el tiempo se llega a las mismas formulas desarrolladas tradicionalmente para éstos cálculos. Ahora bien, con esta metodología se tiene la facilidad que para la solución de una situación cualquiera no es necesario tener que aplicar la fórmula pertinente pues con plantear la ecuación de diferencias que se infiera de la situación en cuestión y al solucionarla como se ha mostrado, se encuentra el resultado buscado.

## BIBLIOGRAFÍA

García, Jaime A. (2000). Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencias finitas. 4a. Ed. Bogotá: Pearson.

Goldberg, Samuel. (1958). Introduction to difference equations. New York: John Wiley.

Levy, H. y F. Lessman. (1992). Finite difference equations. New York: Dover Publications.

Sydsaeter, Knut y Peter J. Hammond. (1996). Matemáticas para el análisis económico. Madrid: Prentice Hall.