$$z(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{senh}\left(\sqrt{\Delta}\,t\right), & \Delta>0\\ t, & \Delta=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{-\Delta}\,t\right), & \Delta<0\end{cases}$$

Solución analítica a un sistema acoplado de Orden Dos

Jorge I. Castaño
Jairo A. Villegas

RESUMEN

El estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales conlleva a problemas cuya solución no es fácil de obtener si no se tiene una sólida formación en álgebra lineal. Sin embargo es posible con un mínimo de teoría de matrices resolver ciertos problemas elementales de sistemas acoplados, los cuales aparecen en la formulación de modelos en sistemas mecánicos, problemas de mezclas, circuitos y en otras áreas de las ciencias.

1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, surgen varias dificultades para quienes carecen de un dominio apropiado del álgebra lineal. Sin embargo, con algunas ideas y técnicas de la teoría de matrices se pueden resolver ciertos problemas de interés para ciencia y tecnología. En particular, sistemas acoplados de la forma[1]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=ax(t)+by(t)\\ \dot{y}(t)&=cx(t)+dy(t)\end{aligned}\qquad(1)$$

donde a, b, c, d son constantes reales y x, y son funciones reales tales que

$$\begin{aligned}x(0)&=x_0\\ y(0)&=y_0\end{aligned}$$

con $x_0, y_0 \in \mathrm{IR}$. Acá $\dot{x}(t)=\dfrac{dx}{dt}$.

El objetivo con estas líneas es mostrar una solución analítica del sistema (1), con unos conocimientos simples de la teoría de matrices. Como la labor es más pedagógica que un desarrollo científico, no pretendemos en ningún momento que las ideas aquí plasmadas sean originales.

2. EL PROBLEMA

Con el fin de facilitar el trabajo se escribe el sistema (1) en forma matricial:

$$\begin{aligned}\dot{u}&=Au\\ u(0)&=u_0\end{aligned}\qquad(2)$$

donde

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad u_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}.$$

El objetivo con estas líneas es mostrar una solución analítica del sistema, con unos conocimientos simples de la teoría de matrices. Como la labor es más pedagógica que un desarrollo científico, no pretendemos en ningún momento que las ideas aquí plasmadas sean originales.

En general, para resolver un sistema como (2) se presentan los siguientes casos:

1. La matriz A es diagonal: $b=c=0$, en este caso el sistema es no acoplado, es decir, consiste de dos ecuaciones independientes

1 Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se llama no acoplado, si cada ecuación del sistema se puede resolver independientemente de las otras. De lo contrario, se llama acoplado.

JORGE I. CASTAÑO B. Docente, Dpto. de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.
E-mail: icastano@sigma.eafit.edu.co

JAIRO A. VILLEGAS G. Docente, Dpto. de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.
E-mail: javille@sigma.eafit.edu.co

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$
$$\dot{y}(t) = dy(t)$$

y su solución es fácil de obtener, ver (Boyce , 1992).

2. Si la matriz A no es diagonal entonces la transformación $u = Tz$, donde T es una matriz invertible, cambia la ecuación original a la forma $\dot{z} = T^{-1}ATz$.

   En efecto, si $u = Tz$ entonces

$$\begin{aligned} \dot{u} &= T\dot{z} \\ Au &= T\dot{z} \\ T^{-1}Au &= \dot{z} \\ T^{-1}ATz &= \dot{z} \\ \dot{z} &= Bz \end{aligned}$$

donde $B = T^{-1}AT$. Si la matriz B es diagonal, la solución del sistema (2) es nuevamente obvia y decimos que la matriz A es diagonalizable.

Cuando no existe la matriz T tal que $B = T^{-1}AT$, A es no diagonalizable, (Grossman, 1996), en este caso el sistema (2) no se resuelve fácilmente y se debe recurrir a estrategias diferentes que permitan obtener la solución.

Para empezar, se recuerda que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces la traza de A está dada por $tra(A) = a + b$, y el determinante de A por $\Delta = \det A = ad - bc$.

El siguiente lema se utiliza en el transcurso del desarrollo.

Lema. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene traza cero, entonces $A^2 = -\det AI$, donde I es la matriz identidad de orden 2 x 2.

Prueba. Si $tra(A) = a + d = 0$, entonces $d = -a$, así que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ y $\Delta = \det A = -a^2 - bc = -(a^2 + bc)$, de modo que

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$$
$$= \left(a^2 + bc\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det AI$$

Bajo esta consideración, se supone que u es solución del problema (2), entonces

$$\ddot{u} = A\dot{u} = A(Au) = A^2u = -\Delta Iu.$$

De otro lado, sea z solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \Delta z \\ z(0) = 0, &\quad \dot{z}(0) = 1. \end{aligned} \qquad (3)$$

Observe que $\dot{z}$ satisface la ecuación $\ddot{z} = \Delta z$, pero no las condiciones iniciales.

De esta forma $\dot{z}$ no es proporcional a z, y así, la pareja $(z, \dot{z})$ constituye una base para la solución del problema $\ddot{z} = \Delta z$.

Si u es una solución del problema $\ddot{u} = \Delta Iu$, entonces u se puede escribir como

$$u = \dot{z}v + zw, \qquad (4)$$

donde $v, w \in IR^2$.

También se sabe que u es solución de $\dot{u} = Au$ con la condición $u(0) = u_0$, entonces

$$\dot{u} = \ddot{z}v + \dot{z}w = Au = \dot{z}Av + zAw.$$

De esta manera se puede concluir que

$$\dot{z}w + z\Delta v = \dot{z}Av + zAw.$$

Al evaluar en $t = 0$ se tiene $w = Av$ de manera que

$$u = \dot{z}v + zAv = (\dot{z}I + zA)v,$$

de donde

$$u_0 = u(0) = (1I + 0A)v = v.$$

Entonces la solución del problema

$$\dot{u} = Au$$
$$u(0) = u_0$$

es de la forma

$$u = (\dot{z}I + zA)u_0 .$$

Se verifica esto último,

$$\dot{u} = (\ddot{z}I + \dot{z}A)\, u_0 = (z\Delta I + \dot{z}A)\, u_0$$

mientras que

$$Au = A\,(\dot{z}I + zA)\, u_0 = (\dot{z}AI + zA^2)u_0 = (\dot{z}A + z\Delta I)u_0$$

3. GENERALIZACIÓN

Cuando a la matriz A no se le exige ninguna condición, entonces el problema

$$\dot{u} = Au$$
$$u(0) = u_0$$

se puede transformar en otro donde la traza de la matriz de coeficientes sea cero.

En efecto, sea λ una constante real arbitraria y θ solución del problema de condición inicial

$$\dot{\theta} = \lambda\theta, \qquad \theta(0) = 1,$$

es decir,

$$\theta(t) = e^{\lambda t}.$$

Se considera la transformación

$$u = \theta\xi$$

entonces

$$u_0 = u(0) = \theta(0)\xi(0) = \xi(0).$$

Como $\dot{u} = Au$ se tiene entonces

$$\dot{u} = \theta\dot{\xi} + \dot{\theta}\xi = Au = \theta A\xi$$

es decir,

$$\theta\dot{\xi} + \lambda\theta\xi = \theta A\xi .$$

Como $\theta \neq 0$ puede dividirse por θ para obtener

$$\dot{\xi} = (A - \lambda I)\xi .$$

Debido a que la constante λ es arbitraria, se puede definir como la mitad de la traza de A, esto es

$$\lambda = \frac{a+d}{2}.$$

de esta manera se obtiene el nuevo sistema cuya matriz de coeficientes tiene traza cero:

$\dot{\xi} = B\xi$, donde

$$B = (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$$

De este modo, ξ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= B\xi \\ \xi(0) &= u_0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Es de notar que

$$u = (\dot{z}I + zA)u_0$$

es una solución del problema (5), donde z es solución de (3) con

$$\Delta = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc$$

el determinante de la matriz B.

4. CONCLUSIÓN

En el desarrollo dado, el propósito buscado era encontrar soluciones del problema

$$\dot{u} = Au$$
$$u(0) = u_0$$

para ello se consideró que

$$\lambda = \frac{a+d}{2} \quad \text{y} \quad \Delta = \left(\frac{a-d}{2}\right) + bc,$$

además se supuso que θ y z son soluciones de los problemas de valor inicial

$$\dot{\theta} = \lambda\theta, \quad \theta(0) = 1$$
$$\ddot{z} = \Delta z, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 1,$$

respectivamente.

Lo cual permite concluir que:

$$u = \theta\,[\dot{z}I + z(A - \lambda I)]u_0$$

es la solución de

$$\dot{u} = Au$$
$$u(0) = u_0$$

En términos de coordenadas se puede ver que

$$x = \theta\left[x_0\dot{z} + \left(\frac{a-d}{2}x_0 + by_0\right)z\right]$$
$$y = \theta\left[y_0\dot{z} + \left(\frac{d-a}{2}y_0 + cx_0\right)z\right], \qquad (6)$$

donde las funciones θ y z están dadas por

$$\theta(t) = e^{\lambda t} = \exp\left(\frac{a+d}{2}\right)t \qquad (7)$$

$$z(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{senh}\left(\sqrt{\Delta}t\right), & \Delta > 0 \\ t, & \Delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{-\Delta}t\right), & \Delta < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Claramente, la última expresión resulta como consecuencia de resolver la ecuación diferencial

$$\ddot{z} = \left[\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc\right]z$$

que tiene coeficientes constantes.

Para terminar, se ilustra el método descrito con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Considere el problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = x + 9y, \qquad x(0) = 1$$
$$\dot{y}(t) = -x - 5y, \qquad y(0) = -1$$

en forma matricial

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}u, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

En este caso

$$\lambda = \frac{1-5}{2} = -2, \quad \Delta = \left(\frac{1+5}{2}\right)^2 + (9)(-1) = 9 - 9 = 0\,.$$

Por (7) y (8) se obtienen respectivamente

$$\theta(t) = e^{-2t} \quad \text{y} \quad z(t) = t,$$

luego por (6) se tiene

$$x(t) = e^{-2t}\left[(1)\,(1) + ((3)\,(1) + (9)\,(-1))t\right]$$
$$= e^{-2t}(1-6t)$$
$$y(t) = e^{-2t}\left[(-1)\,(1) + ((-3)\,(-1) + (-1)\,(1))t\right]$$
$$= e^{-2t}(-1+2t).$$

BIBLIOGRAFÍA

Boyce, W. R. C Di Prima. (1992). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4a. ed., México: Editorial Limusa.

Grossman, S.I. (1996). Álgebra lineal, 5a. ed., México: Mc Graw Hill.