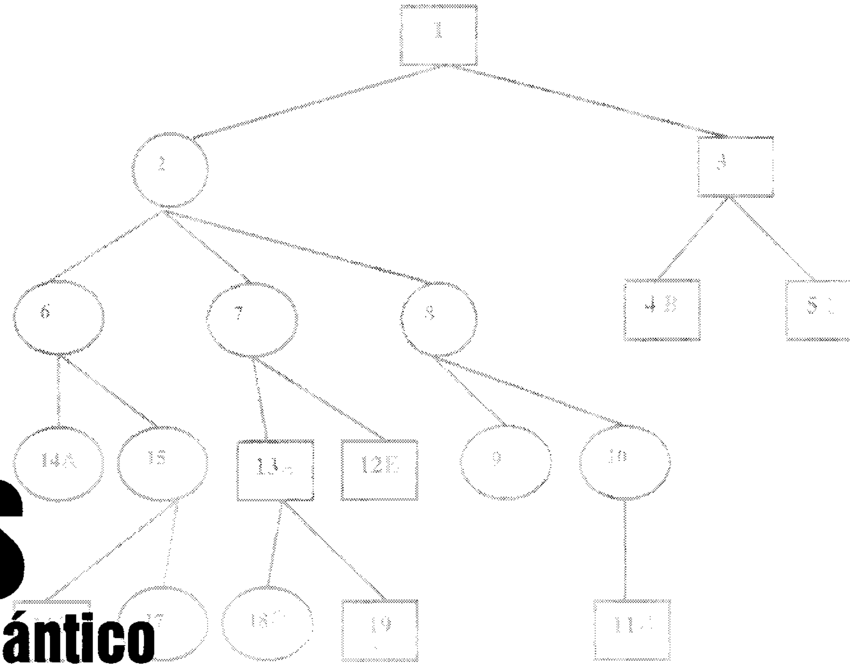


Árboles de Forzamiento Semántico

Manuel Sierra

RESUMEN

En este trabajo se presenta por primera vez el sistema de reglas de inferencia gráficas, árboles de forzamiento semántico, el cual proporciona de manera natural un método efectivo de decisión para el cálculo proposicional clásico y para el cálculo clásico de predicados monádicos de primer orden.

1. CALCULO PROPOSICIONAL CLASICO

1.1 Construcción de Enunciados

Enunciados atómicos: A, B, C, ...

Enunciados compuestos: generados a partir de los atómicos utilizando los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y el conectivo unario $\neg$.

1.2 Árboles de Construcción de Enunciados

El árbol de construcción del enunciado α lo representamos α^* y lo construimos utilizando las siguientes reglas:

Sean A enunciado atómico, α y β enunciados

$$A^* = A$$

$$(\neg\alpha)^* = \begin{array}{c} \neg \\ | \\ \alpha^* \end{array}$$

$$(\alpha\vee\beta)^* = \begin{array}{c} \vee \\ \diagup \;\; \diagdown \\ \alpha^* \quad \beta^* \end{array}$$

$$(\alpha\wedge\beta)^* = \begin{array}{c} \wedge \\ \diagup \;\; \diagdown \\ \alpha^* \quad \beta^* \end{array}$$

$$(\alpha\rightarrow\beta)^* = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \diagup \;\; \diagdown \\ \alpha^* \quad \beta^* \end{array}$$

$$(\alpha\leftrightarrow\beta)^* = \begin{array}{c} \leftrightarrow \\ \diagup \;\; \diagdown \\ \alpha^* \quad \beta^* \end{array}$$

Definimos el árbol de construcción de un argumento $\alpha 1, \ldots, \alpha n \vdash \beta$ como: $((\alpha 1\wedge \ldots \wedge\alpha n)\rightarrow\beta)^*$, el árbol del condicional asociado al argumento.

El nodo superior de un árbol lo llamamos la **raíz** del árbol y corresponde al conectivo principal del enunciado, los nodos inferiores, es decir aquellos de los cuales no salen ramas, los llamamos **hojas** y corresponden a los enunciados atómicos.

EJEMPLO

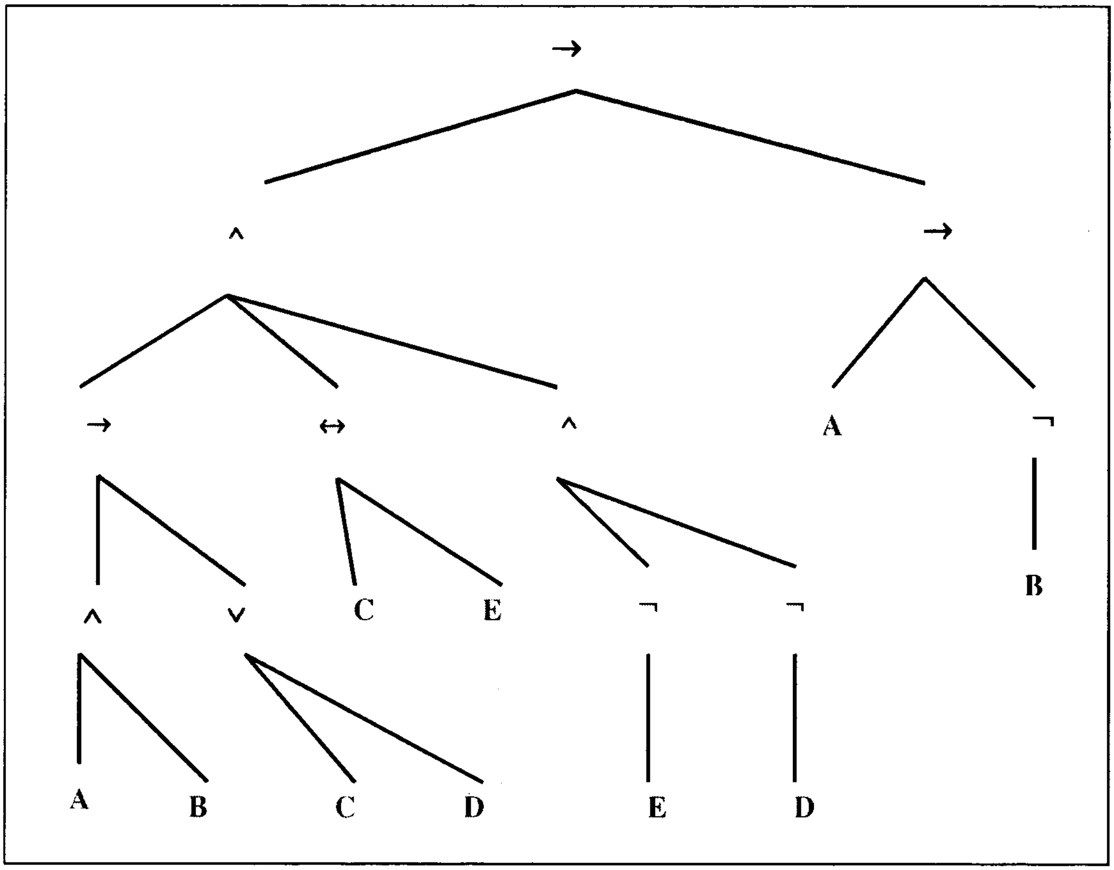
Argumento: $(A\wedge B)\rightarrow(C\vee D)$, $C\leftrightarrow E$, $\neg E\wedge\neg D \vdash A\rightarrow\neg B$

Condicional asociado:

$([(A\wedge B)\rightarrow(C\vee D)] \wedge [C\leftrightarrow E] \wedge [\neg E\wedge\neg D]) \rightarrow [A\rightarrow\neg B]$

MANUEL SIERRA ARISTIZÁBAL. Magister en Matemáticas. Profesor, Departamento de Humanidades, Universidad EAFIT. E-mail: msierra@eafit.edu.co

REVISTA Universidad EAFIT No. 123 | julio.agosto.septiembre | 2001



1.3 Árboles de Forzamiento

Los árboles de forzamiento semántico se construyen a partir de los árboles de construcción de enunciados utilizando las siguientes **reglas de inferencia para el forzamiento semántico:** Intuitivamente un nodo marcado con un círculo afirma el enunciado asociado al nodo, un nodo marcado con un cuadro niega el enunciado asociado al nodo.

1.3.1 Regla Básica

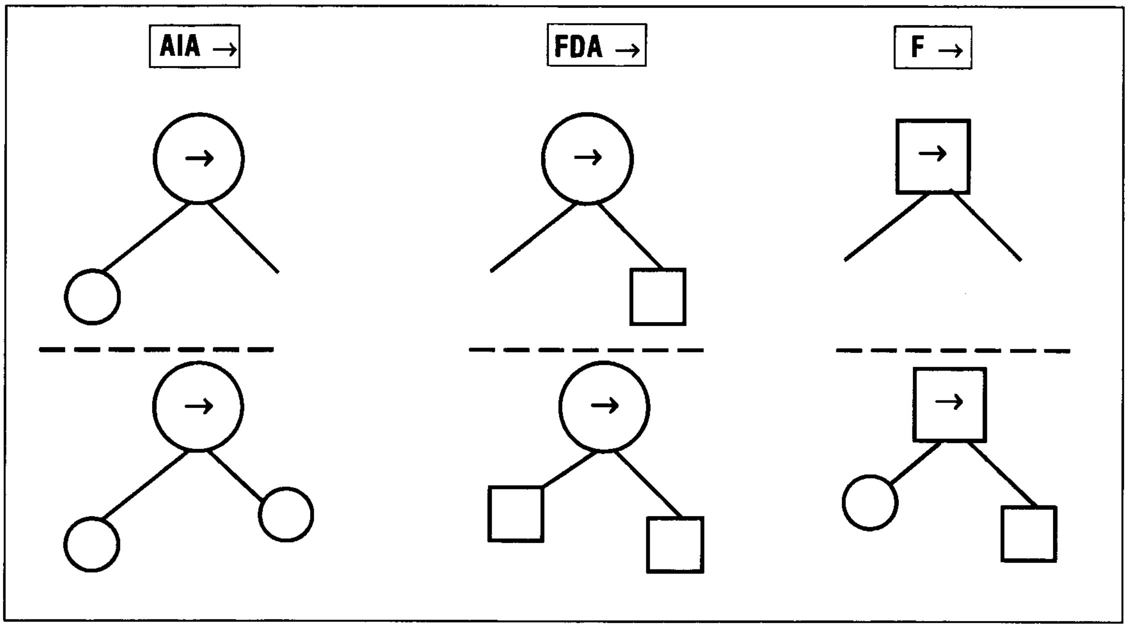
$\boxed{\text{FR}}$

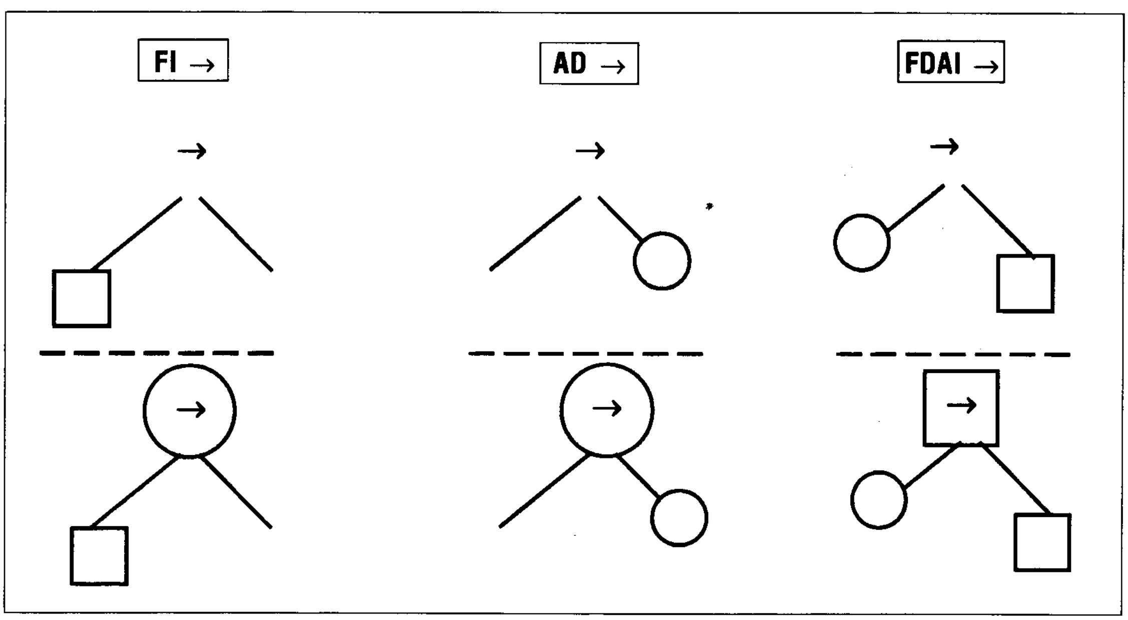
R

$\boxed{\text{R}}$

FR (Falsedad de la Raíz): El nodo raíz siempre está marcado con cuadro, es decir, siempre está negado. Con esta regla se está suponiendo que el enunciado (o argumento) asociado al árbol no es válido.

1.3.2 Reglas para →





AIA→ (Afirmación a la Izquierda, Afirmación del Condicional). Cuando se tiene marcado con círculo a la izquierda de un condicional marcado con círculo, se infiere marcado con círculo a la derecha. Cuando se tiene un condicional verdadero y el antecedente es verdadero, se infiere que el consecuente es verdadero.

FDA→ (Falsedad a la Derecha, Afirmación de Condicional). Cuando se tiene marcado con cuadro a la derecha de un condicional marcado con círculo, se infiere marcado con cuadro a la izquierda. Cuando se tiene un condicional verdadero y el consecuente es falso, se infiere que el antecedente es falso.

F→ (Falsedad del Condicional): De un condicional marcado con cuadro se infiere marcado con círculo a la izquierda y marcado con cuadro a la derecha. De un condicional es falso, se infiere que el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

FI→ (Falsedad a la Izquierda en un Condicional): De la marca cuadro a la izquierda de un condicional se infiere la marca círculo del condicional. Un condicional es verdadero cuando su antecedente es falso.

AD→ (Afirmación a la Derecha en un Condicional): De la marca círculo a la derecha de un condicional se infiere la marca círculo del condicional. Un condicional es verdadero cuando su consecuente es verdadero.

FDAI→ (Falsedad a la Derecha, Afirmación a la Izquierda en un Condicional): De las marcas círculo a la izquierda y cuadro a la derecha de un condicional se infiere el condicional marcado con cuadro. Un condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

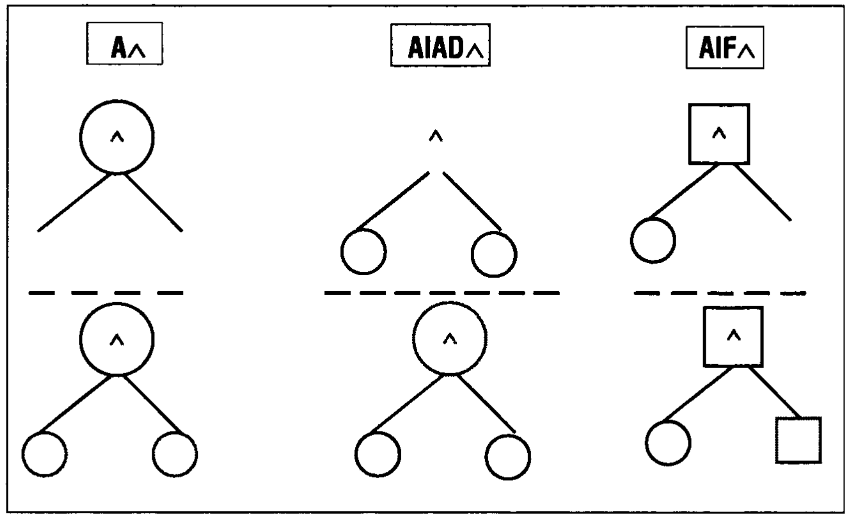
Basta tomar como **primitivas** las reglas **FI→, AD→ y FDAI→**, ya que las otras 3 reglas son derivadas de estas:

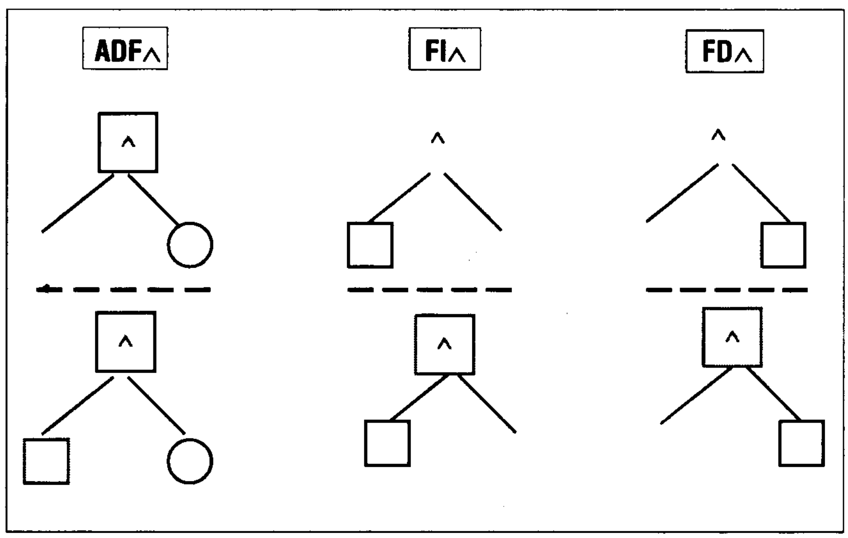
En AIA→ no puede inferirse marca cuadro a la derecha, ya que por FDAI→ se tendría el condicional marcado con cuadro y este no es el caso.

En FDA→ no puede inferirse marca círculo izquierda, ya que por FDAI→ se tendría el condicional marcado con cuadro y este no es el caso.

En F→ no puede inferirse cuadro a la izquierda, ya que por FI→ se tendría el condicional marcado con círculo y este no es el caso, tampoco puede inferirse círculo a la derecha, ya que por AD→ se tendría el condicional marcado con círculo y este no es el caso.

1.3.3 Reglas para ∧





A∧ (Afirmación de la Conjunción): De la conjunción marcada con círculo se infieren marcas de círculo a la izquierda y a la derecha. Ambos componentes de una conjunción son verdaderos cuando la conjunción lo es.

AIAD∧ (Afirmación a la Izquierda, Afirmación a la Derecha en la Conjunción): De las marcas círculo a la izquierda y a la derecha de una conjunción se infiere la marca círculo en la conjunción. Si ambos componentes de una conjunción son verdaderos, se infiere que la conjunción es verdadera.

AIF∧ (Afirmación Izquierda, Falsedad de la Conjunción): De la marca círculo a la izquierda de una conjunción marcada con cuadro se infiere marca cuadro a la derecha. De una conjunción falsa con uno de sus componentes verdadero, se infiere que el otro componente es falso.

ADF∧ (Afirmación Derecha, Falsedad de la Conjunción): De la marca círculo a la derecha de una conjunción marcada con cuadro se infiere marca cuadro a la izquierda. De una conjunción falsa con uno de sus componentes verdadero, se infiere que el otro componente es falso.

FI∧ (Falsedad a la Izquierda en la Conjunción): De la marca cuadro a la izquierda de una conjunción se infiere la marca cuadro en la conjunción. Una conjunción es falsa cuando uno de sus componentes lo es.

FD∧ (Falsedad a la Derecha en la Conjunción): De la marca cuadro a la derecha de una conjunción se infiere la marca cuadro en la conjunción. Una conjunción es falsa cuando uno de sus componentes lo es.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **A∧** y **AIAD∧**, ya que las otras 4 reglas son derivadas de éstas:

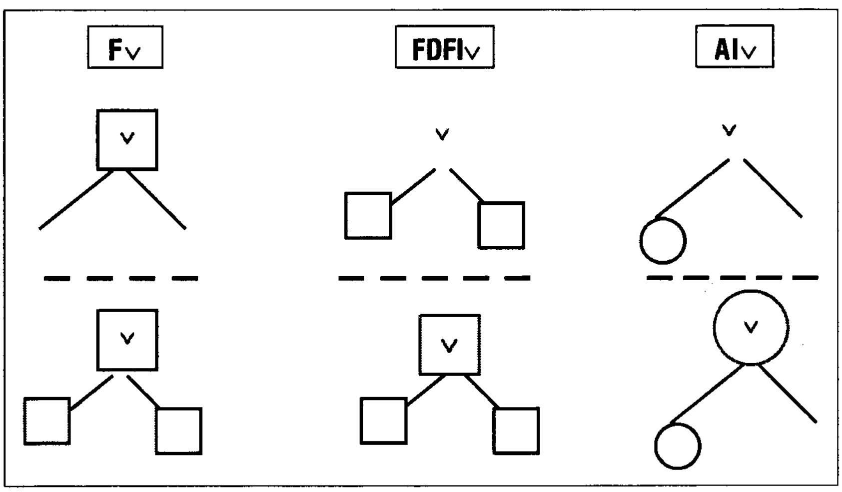
En AIF∧ no puede inferirse marca círculo a la derecha, ya que por AIAD∧ se tendría la conjunción marcada con círculo y éste no es el caso.

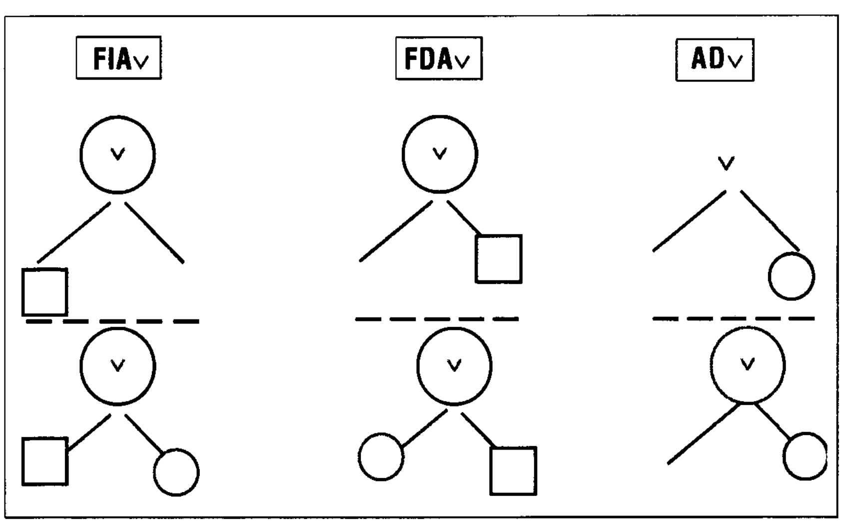
En ADF∧ no puede inferirse marca círculo a la izquierda, ya que por AIAD∧ se tendría la conjunción marcada con círculo y éste no es el caso.

En FI∧ no puede inferirse círculo en la conjunción, ya que por A∧ se tendría marcado con círculo a la izquierda y éste no es el caso.

En FD∧ no puede inferirse círculo en la conjunción, ya que por A∧ se tendría marcado con círculo a la derecha y éste no es el caso.

1.3.4 Reglas para ∨





F∨ (Falsedad de la Disyunción): De la marca cuadro en una disyunción se infieren las marcas cuadro a la izquierda y a la derecha de la disyunción. Se infiere que ambos componentes de una disyunción son falsos cuando la disyunción es falsa.

FDFI∨ (Falsedad a la Derecha, Falsedad a la Izquierda de una Disyunción): De las marcas cuadro a la derecha y a la izquierda de una disyunción se infiere la marca cuadro en la disyunción. Una disyunción es falsa cuando sus componentes son falsos.

AD∨ (Afirmación a la Derecha de una Disyunción): De la marca círculo a la derecha de una disyunción se infiere la marca círculo en la disyunción. Una disyunción es verdadera cuando uno de sus componentes lo es.

AI∨ (Afirmación a la Izquierda de una Disyunción): De la marca círculo a la izquierda de una disyunción se infiere la marca círculo en la disyunción. Una disyunción es verdadera cuando uno de sus componentes lo es.

FIA∨ (Falsedad a la izquierda, Afirmación de la Disyunción): De la marca cuadro a la izquierda de una disyunción marcada con círculo se infiere la marca círculo a la derecha. Cuando una disyunción es verdadera y uno de sus componentes es falso, se infiere que el otro componente es verdadero.

FDA∨ (Falsedad a la Derecha, Afirmación de la Disyunción): De la marca cuadro a la derecha de una disyunción marcada con círculo se infiere la marca círculo a la izquierda. Cuando una disyunción es verdadera y uno de sus componentes es falso, se infiere que el otro componente es verdadero.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **F∨** y **FDFI∨**, ya que las otras 4 reglas son derivadas de estas:

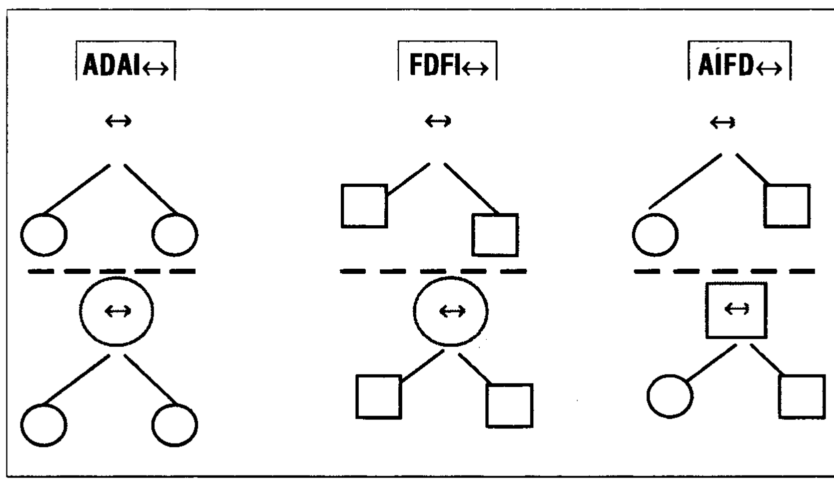
En AD∨ no puede inferirse marca cuadro en la disyunción, ya que por F∨ se tendría la marca cuadro a la derecha y este no es el caso.

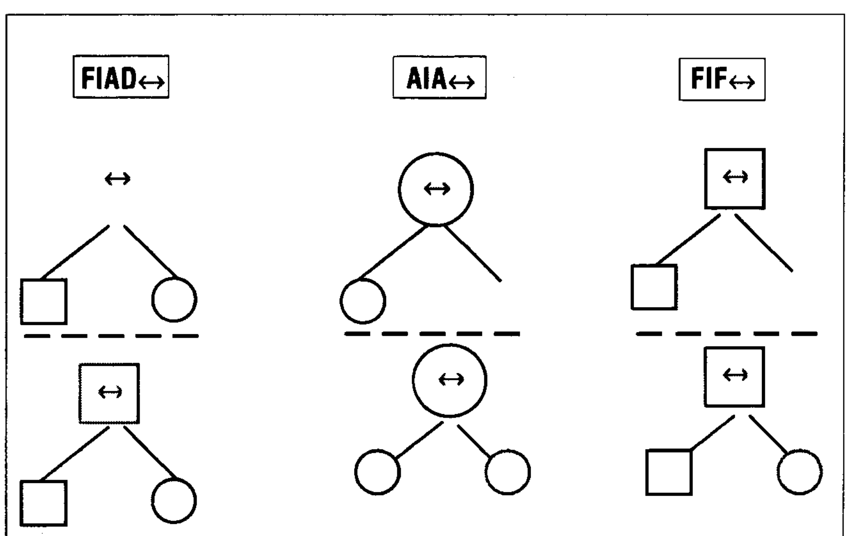
En AI∨ no puede inferirse marca cuadro en la disyunción, ya que por F∨ se tendría la marca cuadro a la izquierda y este no es el caso.

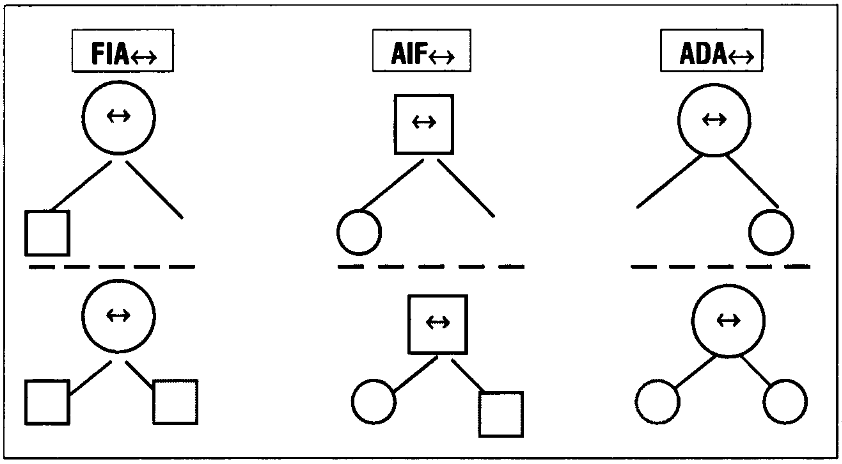
En FIA∨ no puede inferirse marca cuadro a la derecha, ya que por FDFI∨ se tendría la disyunción marcada con cuadro y este no es el caso.

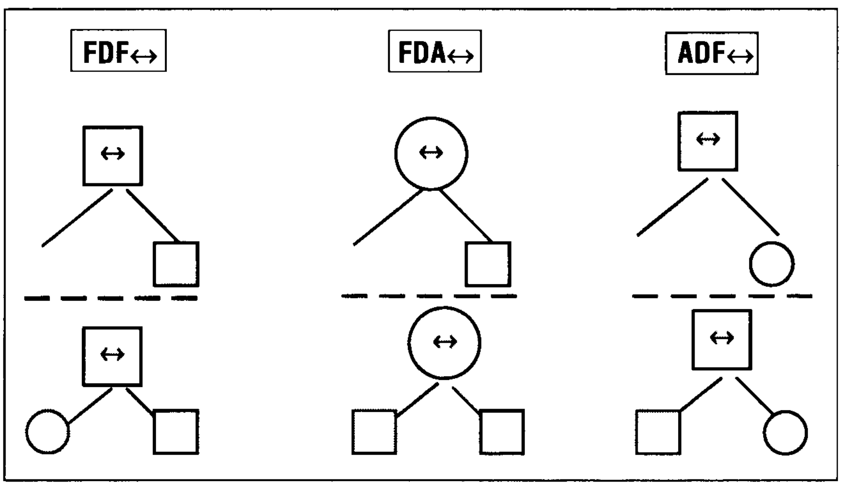
En FDA∨ no puede inferirse marca cuadro a la izquierda, ya que por FDFI∨ se tendría la disyunción marcada con cuadro y este no es el caso.

1.3.5 Reglas para ↔









ADAI↔ (Afirmación a la Derecha, Afirmación a la Izquierda en un Bicondicional): De las marcas círculo a la derecha y a la izquierda de un bicondicional se infiere la marca círculo en el bicondicional. Un bicondicional es verdadero cuando sus dos componentes son verdaderos.

FDFI↔(Falsedad a la Derecha, Falsedad a la Izquierda en un Bicondicional): De las marcas cuadro a la derecha y a la izquierda de un bicondicional se infiere la marca círculo en el bicondicional. Un bicondicional es verdadero cuando sus dos componentes son falsos.

AIFD↔(Afirmación a la Izquierda, Falsedad a la Derecha en un Bicondicional): De las marcas cuadro a la derecha y círculo a la izquierda de un bicondicional se infiere la marca cuadro en el bicondicional. Un bicondicional es falso cuando uno de sus componentes es falso y el otro es verdadero.

FIAD↔(Falsedad a la Izquierda, Afirmación a la Derecha en un Bicondicional): De las marcas cuadro a la izquierda y círculo a la derecha de un bicondicional se infiere la marca cuadro en el bicondicional. Un bicondicional es falso cuando uno de sus componentes es falso y el otro es verdadero.

AIA↔(Afirmación a la Izquierda, Afirmación del Bicondicional): De las marcas círculo a la izquierda y en el bicondicional se infiere la marca círculo a la derecha. Un componente de un bicondicional es verdadero cuando el bicondicional y el otro componente son verdaderos.

FIF↔(Falsedad a la Izquierda, Falsedad del Bicondicional): De las marcas cuadro a la izquierda y en el bicondicional se infiere la marca círculo a la derecha. Un componente de un bicondicional es verdadero cuando el bicondicional y el otro componente son falsos.

FIA↔(Falsedad a la Izquierda, Afirmación del Bicondicional): De las marcas cuadro a la izquierda y círculo en el bicondicional se infiere la marca cuadro a la derecha. Un componente de un bicondicional es falso cuando el bicondicional es verdadero y el otro componente es falso.

AIF↔(Afirmación a la Izquierda, Falsedad del Bicondicional): De las marcas círculo a la izquierda y cuadro en el bicondicional se infiere la marca cuadro a la derecha. Un componente de un bicondicional es falso cuando el bicondicional es falso y el otro componente es verdadero.

ADA↔(Afirmación a la Derecha, Afirmación del Bicondicional): De las marcas círculo a la derecha y en el bicondicional se infiere la marca círculo a la izquierda. Un componente de un bicondicional es verdadero cuando el bicondicional y el otro componente son verdaderos.

FDF↔(Falsedad a la Derecha, Falsedad del Bicondicional): De las marcas cuadro a la derecha y en el bicondicional se infiere la marca círculo a la izquierda.

Un componente de un bicondicional es verdadero cuando el bicondicional y el otro componente son falsos.

FDA↔(Falsedad a la Derecha, Afirmación del Bicondicional): De las marcas cuadro a la derecha y círculo en el bicondicional se infiere la marca cuadro a la izquierda. Un componente de un bicondicional es falso cuando el bicondicional es verdadero y el otro componente es falso.

ADF↔(Afirmación a la Derecha, Falsedad del Bicondicional): De las marcas círculo a la derecha y cuadro en el bicondicional se infiere la marca cuadro a la izquierda. Un componente de un bicondicional es falso cuando el bicondicional es falso y el otro componente es verdadero.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **ADAI↔, FDFI↔, AIFD↔ y FIAD↔**, ya que las otras 8 reglas son derivadas de éstas:

En AIA↔ no puede inferirse marca cuadro a la derecha, ya que por AIFD↔ se tendría la marca cuadro en el bicondicional y este no es el caso.

En FIF↔ no puede inferirse marca cuadro en la derecha, ya que por FDFI↔ se tendría la marca círculo en la equivalencia y este no es el caso.

En FIA↔ no puede inferirse marca círculo a la derecha, ya que por AIFD↔ se tendría la equivalencia marcada con cuadro y este no es el caso.

En AIF↔ no puede inferirse marca círculo a la derecha, ya que por ADAI↔ se tendría la equivalencia marcada con círculo y este no es el caso.

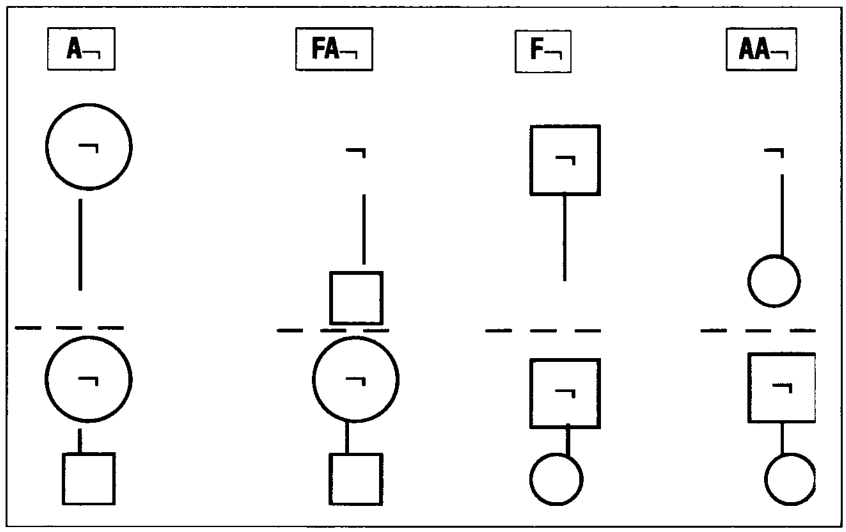
En ADA↔ no puede inferirse marca cuadro a la izquierda, ya que por FIAD↔ se tendría la equivalencia marcada con cuadro y este no es el caso.

En FDF↔ no puede inferirse marca cuadro a la izquierda, ya que por FDFI↔ se tendría la equivalencia marcada con círculo y este no es el caso.

En FDA↔ no puede inferirse marca círculo a la izquierda, ya que por AIFD↔ se tendría la equivalencia marcada con cuadro y este no es el caso.

En ADF↔ no puede inferirse marca círculo a la izquierda, ya que por ADAI↔ se tendría la equivalencia marcada con círculo y este no es el caso.

1.3.6 Reglas para ¬



A¬ **(Afirmación de la Negación)**: De la negación marcada con círculo, se infiere la marca cuadro en su alcance. El alcance de una negación es falso cuando la negación es verdadera.

FA¬ **(Falsedad del Alcance de la Negación)**: De la marca cuadro en el alcance de una negación se infiere la marca círculo en la negación. Una negación es verdadera cuando su alcance es falso.

F¬ **(Falsedad de la Negación)**: De la marca cuadro en una negación se infiere la marca círculo en el alcance de la negación. El alcance de una negación es verdadero cuando la negación es falsa.

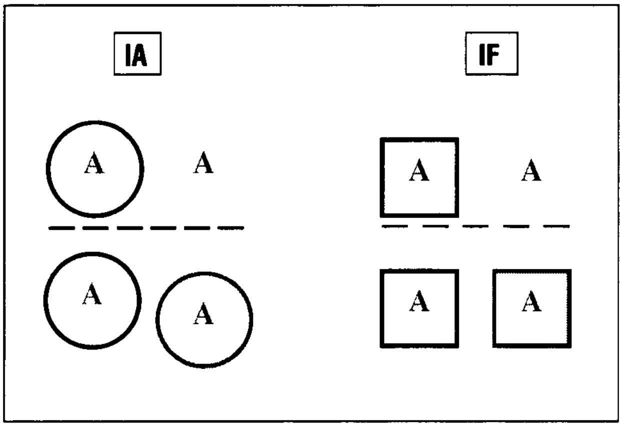
AA¬ **(Afirmación del Alcance de la Negación)**: De la marca círculo en el alcance de una negación se infiere la marca cuadro en la negación. Una negación es falsa cuando su alcance es verdadero.

Basta tomar como **primitivas** las reglas A¬ y FA¬, ya que las otras 2 reglas son derivadas de estas:

En F¬ no puede inferirse marca cuadro en el alcance de la negación, ya que por FA¬ se tendría la marca círculo en la negación y este no es el caso.

En AA¬ no puede inferirse marca círculo en la negación, ya que por A¬ se tendría la marca cuadro en el alcance de la negación y este no es el caso.

1.3.7 Reglas para las Marcas



IA (Iteración de la Afirmación): De un nodo marcado con círculo se infiere la marca círculo en los nodos asociados al mismo enunciado. Cuando un enunciado es verdadero, lo seguirá siendo siempre.

IF (Iteración de la Falsedad): De un nodo marcado con cuadro se infiere la marca cuadro en los nodos asociados al mismo enunciado. Cuando un enunciado es falso, lo seguirá siendo siempre.

1.4 Tipos de Árboles

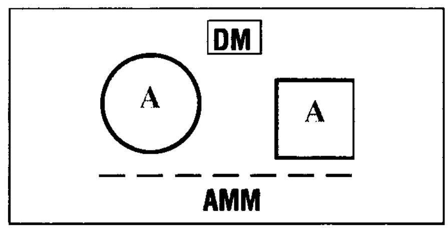
1.4.1 Árboles bien marcados

Un árbol de forzamiento semántico está **bien marcado** (ABM) si todos sus nodos están marcados y no existe doble marca (no existen nodos asociados a un mismo enunciado y con distinta marca).

1.4.2 Árboles mal ubicados

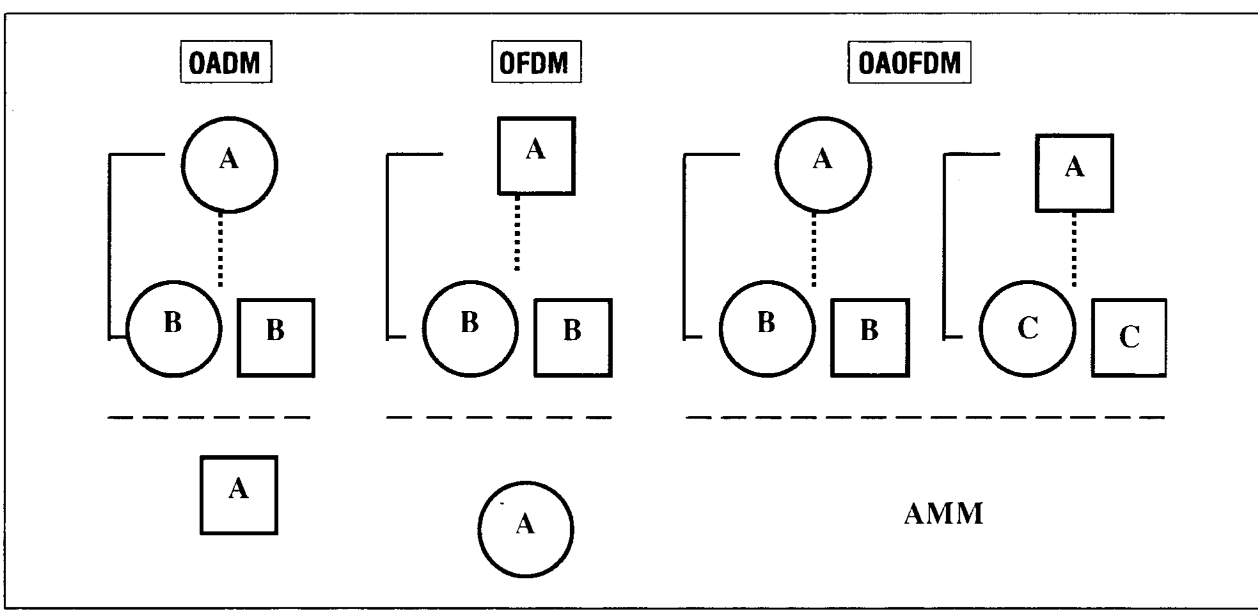
Un árbol de forzamiento semántico está **mal marcado** (AMM) si no está bien marcado, es decir, si existe un nodo con doble marca (existen nodos asociados a un mismo enunciado y con distinta marca).

1.4.3 Doble marca



DM (Doble Marca): Si dos nodos asociados a un mismo enunciado tienen marcas distintas entonces el árbol está mal marcado.

1.5 Teorema de Opciones en el Forzamiento



Sea A un hoja sin marcar:

1.5.1 OADM (Opción afirmativa con doble marca). Si se toma la opción de marcar un nodo con círculo y se obtiene un árbol mal marcado entonces dicho nodo está marcado con cuadro. Si se supone que un enunciado es verdadero y se obtiene una contradicción entonces dicho enunciado es falso.

1.5.2 OFDM (Opción falsa con doble marca). Si se toma la opción de marcar un nodo con cuadro y se obtiene un árbol mal marcado entonces dicho nodo está marcado con círculo. Si se supone que un enunciado es falso y se obtiene una contradicción entonces dicho enunciado es verdadero.

1.5.3 OAOFDM (Opción afirmativa y Opción falsa con doble marca). Si se toma la opción de marcar un nodo con cuadro y se obtiene un árbol mal marcado, y además, si se toma la opción de marcar un nodo con círculo y se obtiene un árbol mal marcado entonces el árbol esta mal marcado. Si suponemos que un enunciado es falso y se obtiene una contradicción, y además, si se supone que el enunciado es verdadero y se obtiene una contradicción entonces la contradicción no depende de dicho enunciado.

1.5.4 Si marcando A con círculo no se obtiene árbol mal marcado entonces A está marcado con círculo.

1.5.5 Si marcando A con cuadro no se obtiene árbol mal marcado entonces A está marcado con cuadro.

Este teorema nos permite tomar opciones cuando es imposible aplicar las reglas de inferencia para el forzamiento semántico y el árbol está incompleto (opción 1: A marcado con círculo, opción 2: A marcado con cuadro).

Este procedimiento se generaliza de manera natural si es necesario tomar opciones sobre hojas asociadas a enunciados diferentes.

1.6 Teorema de Completitud

Si interpretamos un enunciado marcado con círculo como verdadero y un enunciado marcado con cuadro como falso, podemos verificar que las reglas de forzamiento solo generan enunciados que se siguen lógicamente de las premisas, también podemos verificar que dado un sistema de deducción natural los árboles de forzamiento de todas sus reglas de inferencia están mal marcados, podemos así concluir que:

Un enunciado (o argumento) es válido (no existe una asignación de valores de verdad que lo refute) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado (o al argumento) está mal marcado.

Es decir,

Un enunciado (o argumento) es inválido (existe una asignación de valores de verdad que lo refuta) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado (o al argumento) está bien marcado.

Si un árbol de forzamiento semántico asociado a un enunciado (o argumento) está bien marcado, la interpretación de las marcas de sus hojas nos proporciona una asignación de valores de verdad que refuta el enunciado (o argumento).

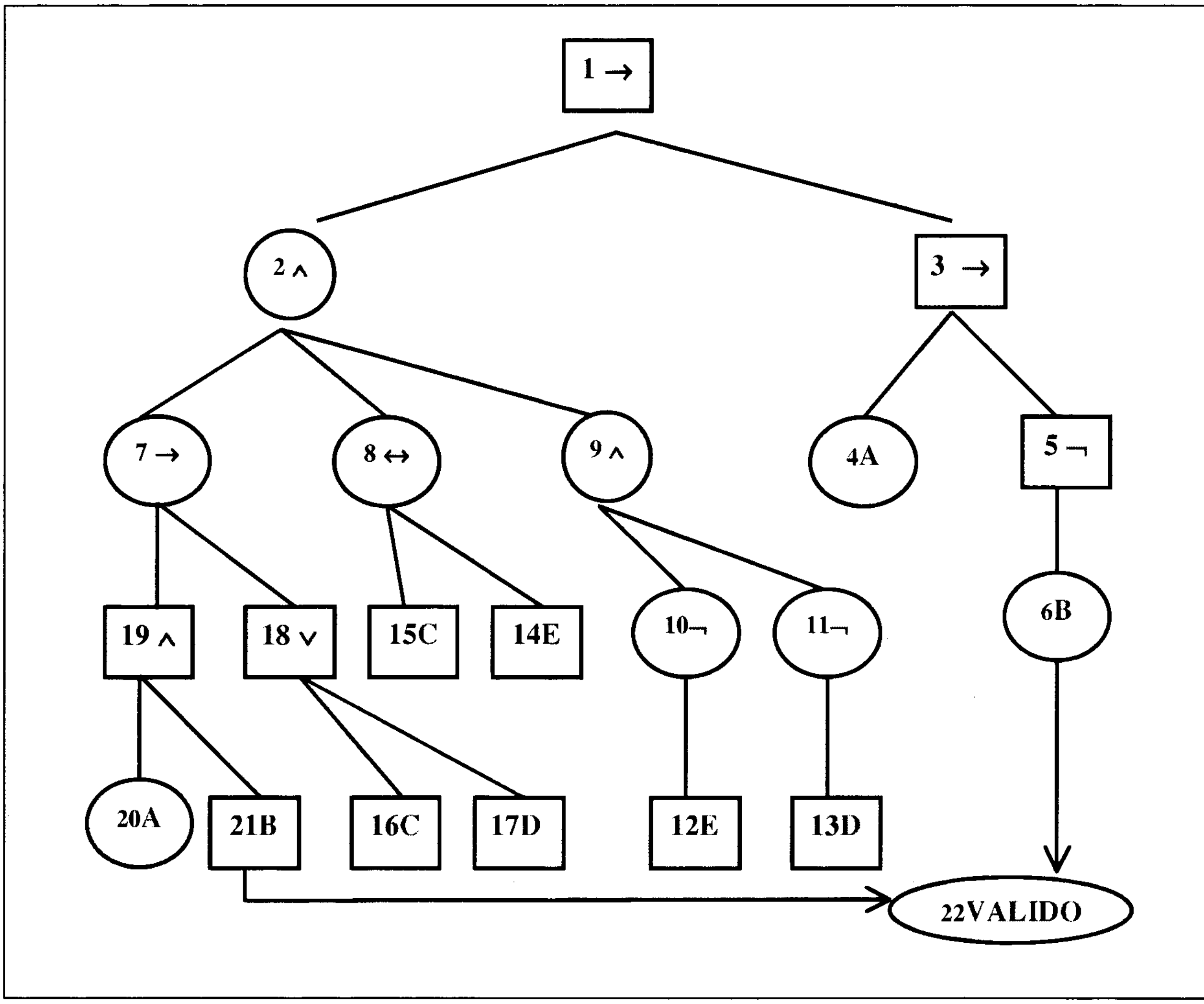
Podemos concluir que

Los árboles de forzamiento semántico nos proporcionan un método de decisión para el cálculo proposicional clásico.

1.7 Ilustraciones

1.7.1 Un argumento válido: $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D),\ C \leftrightarrow E,\ \neg E \wedge \neg D \vdash\ A \rightarrow \neg B$

Condicional asociado: $(\ [(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge [C \leftrightarrow E] \wedge [\neg E \wedge \neg D]\ ) \rightarrow [A \rightarrow \neg B]$

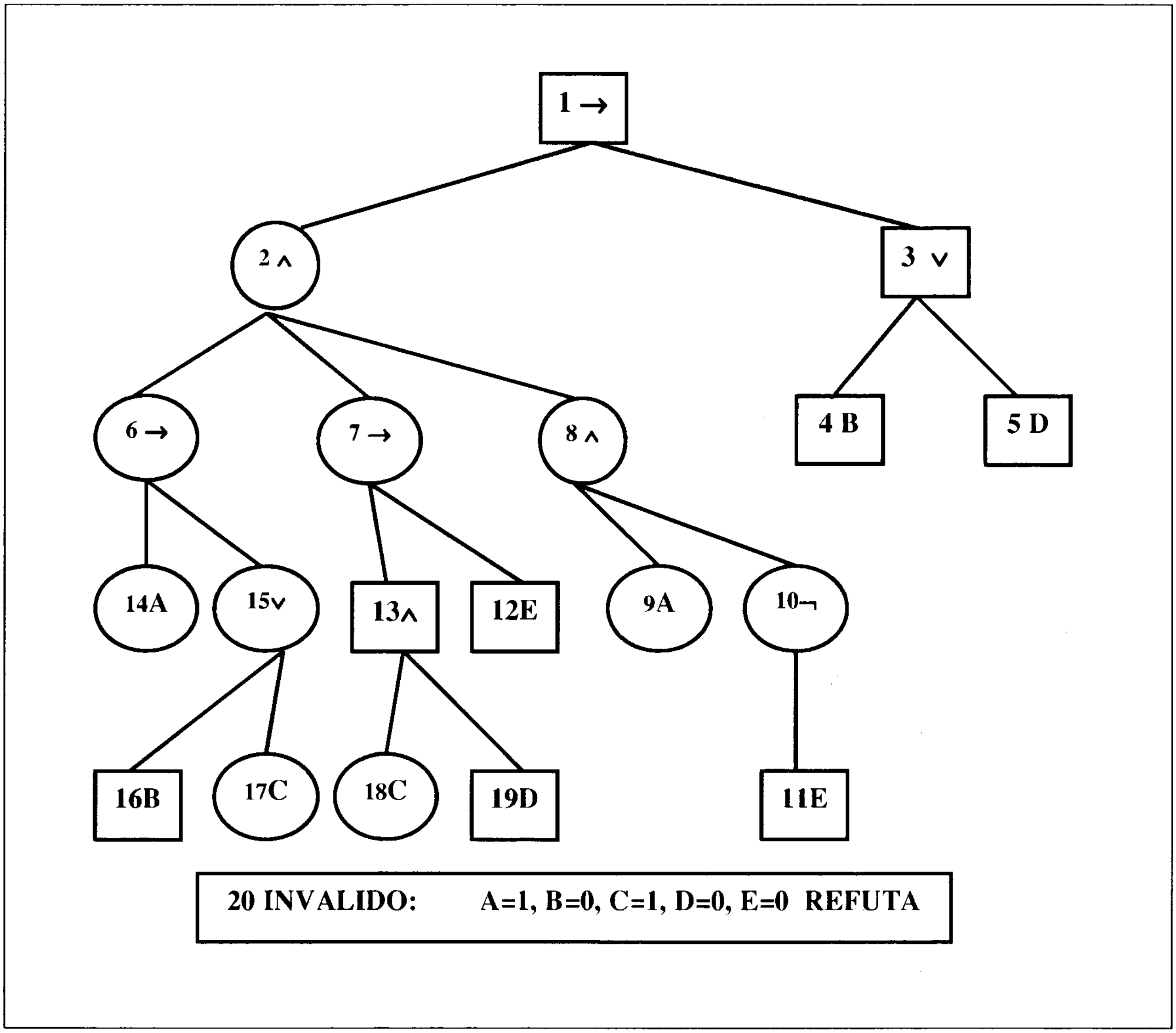


JUSTIFICACIONES

1.	FR	2, 3.	F→ en 1	4, 5.	F→ en 3
6.	F¬ en 5	7, 8, 9.	A∧ en 2	10, 11.	A∧ en 9
12.	A¬ en 10	13.	A¬ en 11	14.	IF en 12
15.	FDA↔ en 8 y 14	16.	IF en 15.	17.	IF en 13
18.	FIFD∨ en 16 y 17	19.	FDA→ en 7 y 18	20.	IA en 4
21.	AIF∧ en 19 y 20	22.	DM en 6 y 21		

1.7.2 Un argumento inválido: $A \rightarrow (B \vee C), (C \wedge D) \rightarrow E, A \wedge \neg E \vdash B \vee D$

Condicional asociado: $([A \rightarrow (B \vee C)] \wedge [(C \wedge D) \rightarrow E] \wedge [A \wedge \neg E]) \rightarrow [B \vee D]$

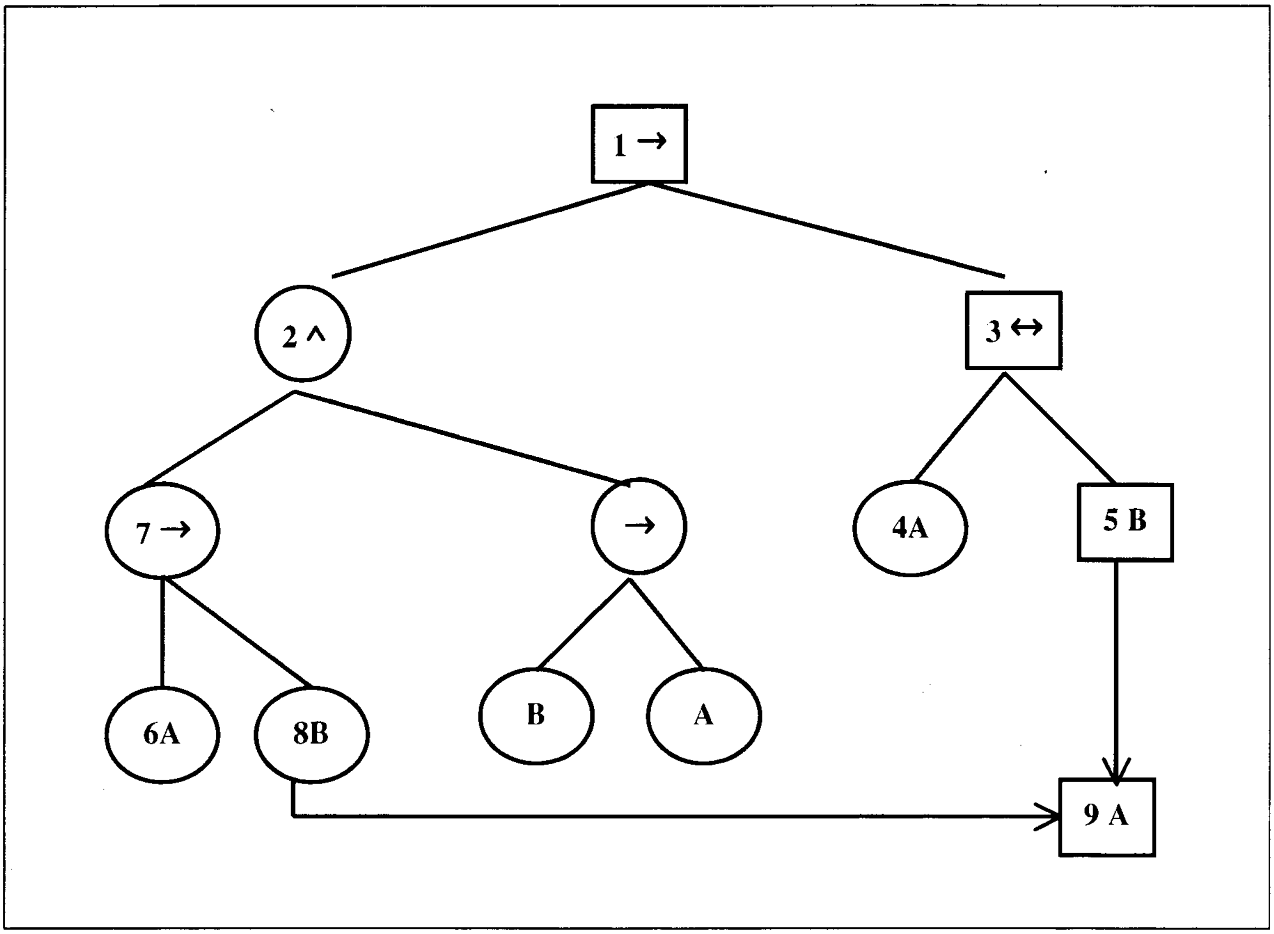


JUSTIFICACIONES

1. FR	2, 3. F→ en 1	4, 5. F∨ en 3
6, 7, 8. A∧ en 2.	9, 10. A∧ en 8.	11. A¬ en 10.
12. IF en 11.	13. FDA→ en 7 y 12.	14. IA en 9.
15. AIA→ en 6 y 14.	16. IF en 4.	17. FIA∨ en 15 y 16.
18. IA en 17.	19. AIF∧ en 13 y 18.	
20. Árbol bien marcado de 4, 5, 9, 11, 17.		

1.7.2 Un argumento con opciones: A→B, B→A ⊢ A↔B

Condicional asociado: [(A→B) ∧ (B→A)] → [A↔B]



JUSTIFICACIONES

1. FR

2, 3. F→ en 1

4. Opción A=1

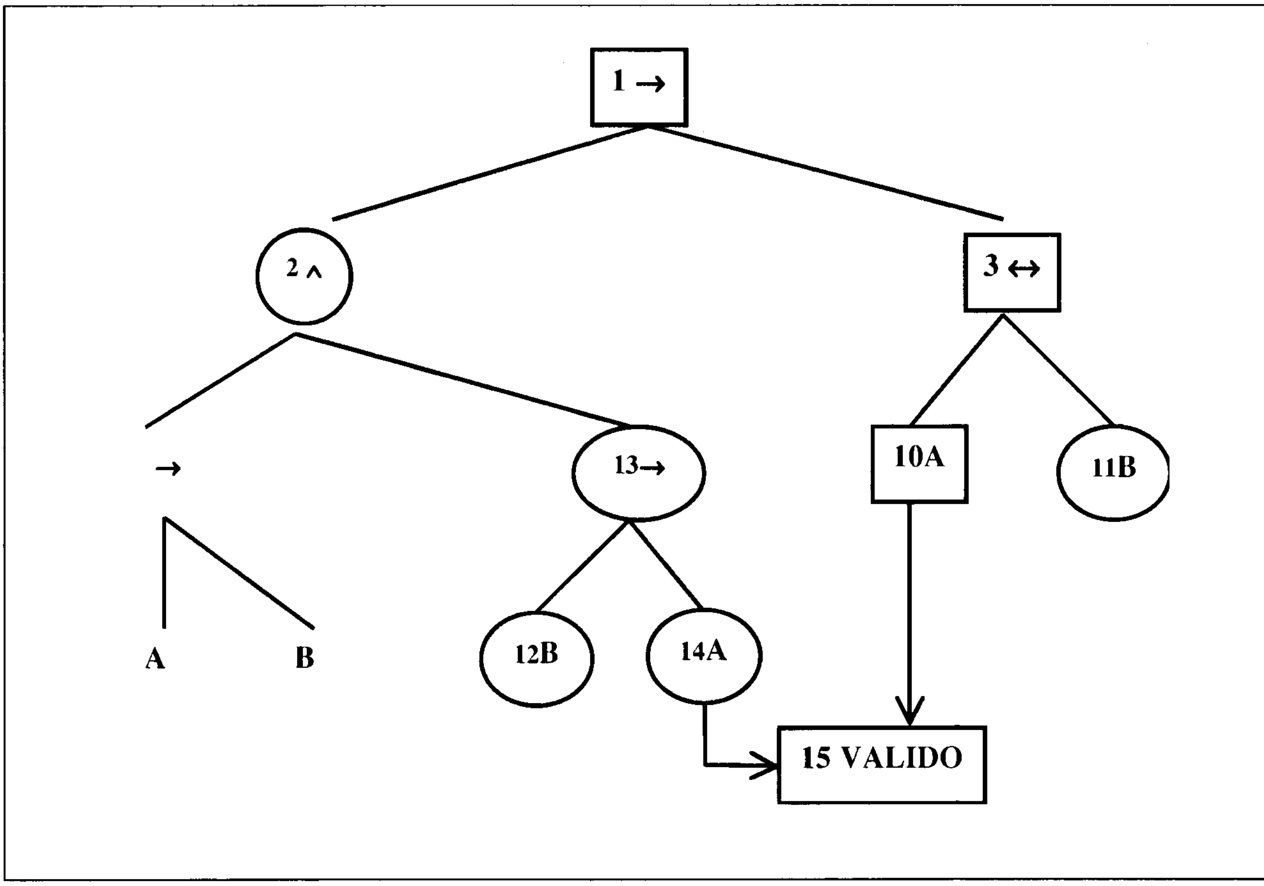
5. AIF↔ en 3 y 4.

6. IA en 4.

7. A∧ en 2.

8. AIA→ en 6 y 7.

9. OADM en 4, 5 y 8.



JUSTIFICACIONES

10. IF en 9.
11. FIF↔ en 3 y 10.
12. IA en 11.
13. A∧ en 2.
14. AIA→ en 12 y 13.
15. OAOFDM en 5, 8 y 10, 14.

2. CÁLCULO CLÁSICO DE PREDICADOS

2.1 Construcción de Enunciados

Alfabeto:

Constantes, variables, símbolos de predicados monádicos y símbolos de relaciones n-adicas con $n \geq 2$.

Enunciados atómicos:

Pc, Px donde P es un símbolo de predicado monadico, x variable y c constante. Rx1...xn donde R es un símbolo de predicado n-adico, xi variable o constante.

Enunciados compuestos:

Generados a partir de los atómicos utilizando los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, el conectivo unario $\neg$ y los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

2.2 Árboles de Construcción de Enunciados

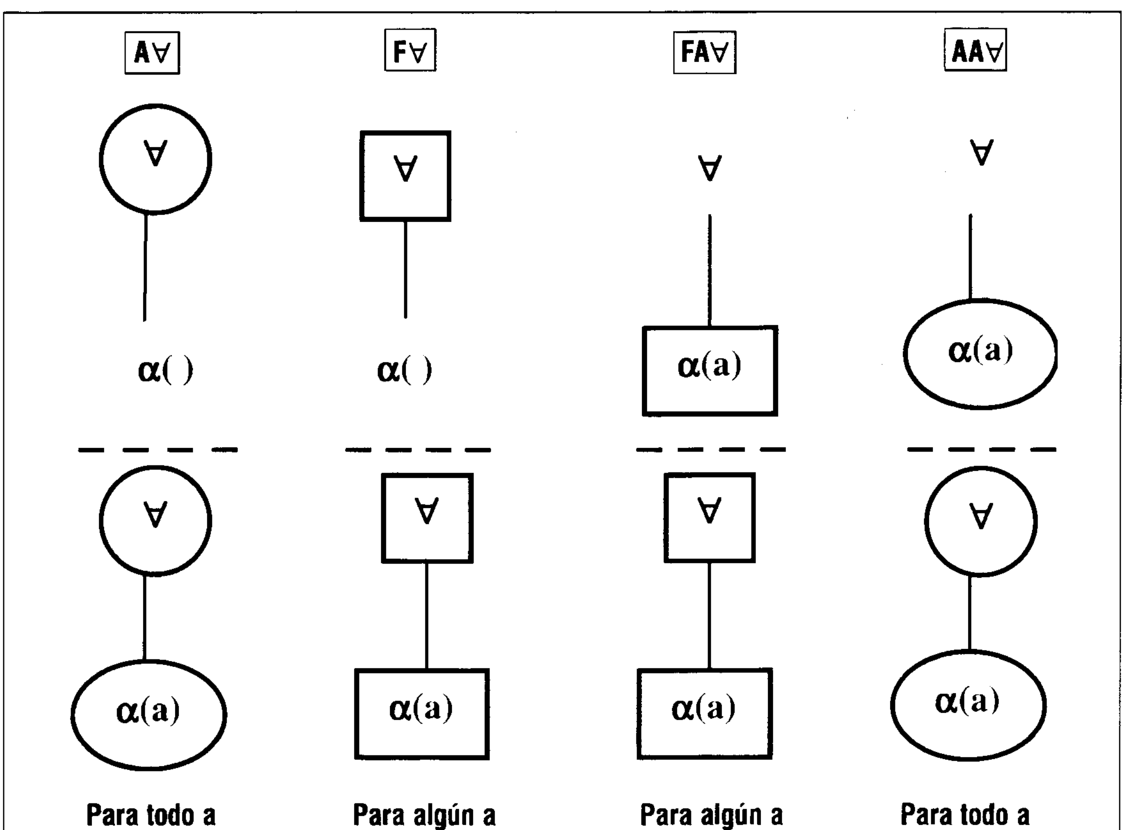
El árbol de construcción del enunciado a lo representamos α^* y lo construimos utilizando las mismas reglas del cálculo proposicional para los conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$ y las siguientes reglas para los cuantificadores:
Sea α (x) un enunciado

$$(\exists x \alpha(x))^* = \begin{array}{c} \exists \\ | \\ \alpha(\ )^* \end{array} \qquad (\forall x \alpha(x))^* = \begin{array}{c} \forall \\ | \\ \alpha(\ )^* \end{array}$$

2.3 Árboles de Forzamiento

Los árboles de forzamiento semántico se construyen a partir de los árboles de construcción de enunciados utilizando además de las reglas dadas en la sección anterior, las siguientes reglas de inferencia para los cuantificadores:

2.3.1 Reglas para $\forall$



A∀ (afirmación Del Universal): De la marca círculo de un universal se infiere la marca círculo de su alcance para todo individuo. Cuando un enunciado universal es verdadero, su alcance es verdadero para todos los individuos en el contexto especifico que se este considerando.

F∀ (Falsedad del Universal): De la marca cuadro de un universal se infiere la marca cuadro de su alcance para algún individuo. Si un enunciado universal es falso entonces existe por lo menos un individuo que haga falso su alcance.

FA∀ (Falsedad del Alcance del Universal): De la marca cuadro del alcance de un universal para algún individuo se infiere la marca cuadro del universal. Si el alcance de un universal es falso para algún individuo entonces el universal es falso.

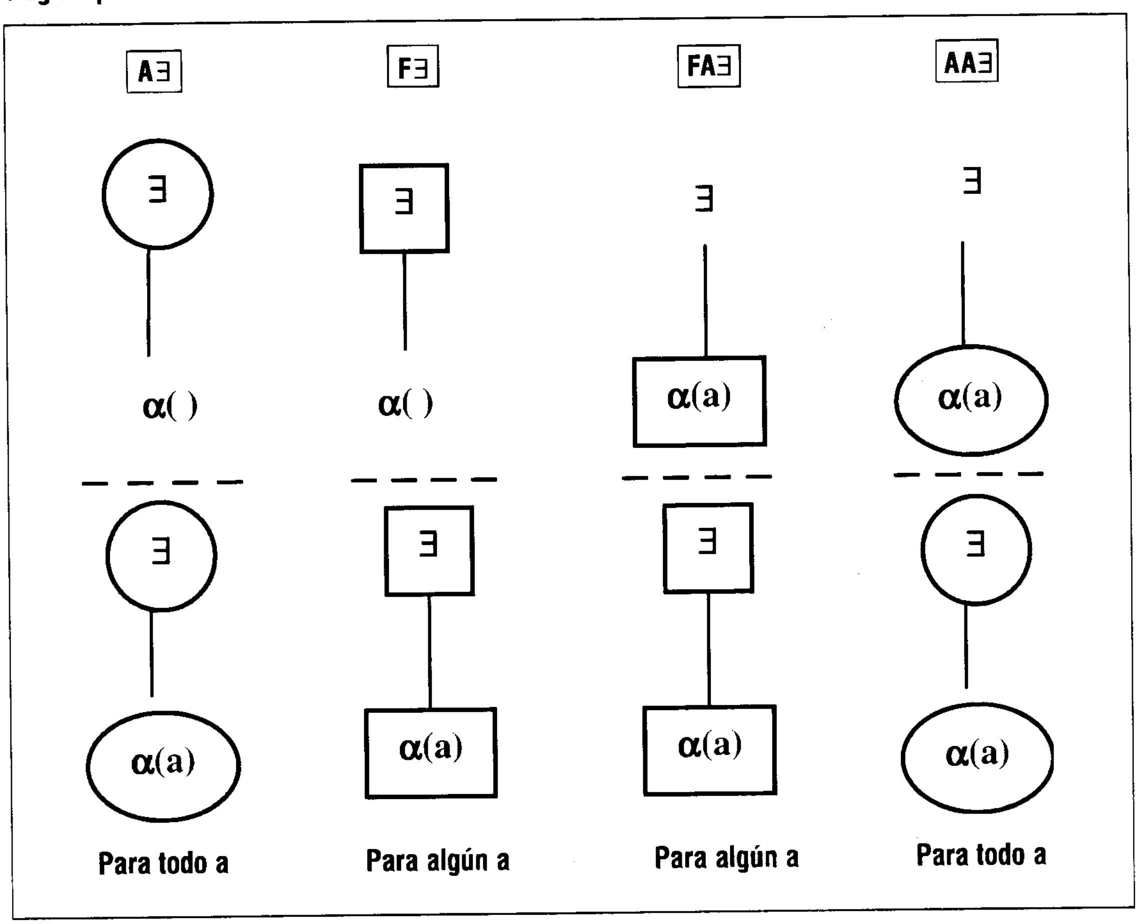
AA∀ (Afirmación del Alcance del Universal): De la marca círculo del alcance de un universal para todo individuo se infiere la marca círculo del universal.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **A∀** y **AA∀**, ya que las otras 2 reglas son derivadas de estas:

En F∀ no puede inferirse marca círculo en el alcance del universal para todo individuo, ya que por AA∀ se tendría la marca círculo en el universal y este no es el caso.

En FA∀ no puede inferirse marca círculo en el universal, ya que por A∀ se tendría la marca círculo en el alcance del universal para todo individuo y este no es el caso.

2.3.2 Reglas para ∃



A∃ (Afirmación del Existencial): De la marca círculo de un existencial se infiere la marca círculo de su alcance para algún individuo. Si un enunciado existencial es verdadero entonces su alcance es verdadero para algún individuo.

F∃ (Falsedad del Existencial): De la marca cuadro de un existencial se infiere la marca cuadro de su alcance para todos lo individuos. Si un enunciado existencial es falso entonces su alcance es falso para todos individuos del contexto especifico que se este considerando.

FA∃ (Falsedad del Alcance del Existencial): De la marca cuadro del alcance de un existencial para todo individuo se infiere la marca cuadro del existencial. Si el alcance de un enunciado existencial es falso para todos los individuos del contexto especifico que se este considerando entonces el enunciado existencial es falso.

AA∃ (Afirmación del Alcance del Existencial): De la marca círculo del alcance de un existencial para algún individuo se infiere la marca círculo del existencial. Si el alcance de un enunciado existencial es verdadero para algún individuo entonces el enunciado existencial es verdadero.

Basta tomar como **primitivas** las reglas **A∃** y **AA∃**, ya que las otras 2 reglas son derivadas de estas:

En F∃ no puede inferirse marca círculo en el alcance del universal para algún individuo, ya que por AA∃ se tendría la marca círculo en el existencial y este no es el caso.

En FA∃ no puede inferirse marca cuadro en el existencial, ya que por A∃ se tendría la marca círculo en el alcance del existencial para algún individuo y este no es el caso.

2.2 Teorema de Completitud

No disponemos de un teorema de completitud para los árboles de forzamiento semántico en el caso general puesto que el cálculo de predicados no es decidible, además, algunos enunciados inválidos sólo pueden ser refutados por modelos infinitos y esto implicaría árboles con un número infinito de hojas.

Sabemos que el cálculo de predicados monádicos es decidible: si un enunciado (en el cual solo figuran símbolos de predicados monádicos) no puede ser refutado por un modelo con 2^n individuos, (donde n es el número de predicados monádicos diferentes que figuran en el enunciado) entonces no puede ser refutado por ningún modelo, gracias a este hecho, tenemos un teorema de completitud para los árboles de forzamiento semántico en el caso predicados monádicos:

Sea α un enunciado de la lógica de predicados de primer orden en el cual solo figuran símbolos de predicados monádicos, a es válido (no existe un modelo que lo refute) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado a a está mal marcado,

es decir,

α es inválido (existe un modelo que lo refuta) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado a a está bien marcado.

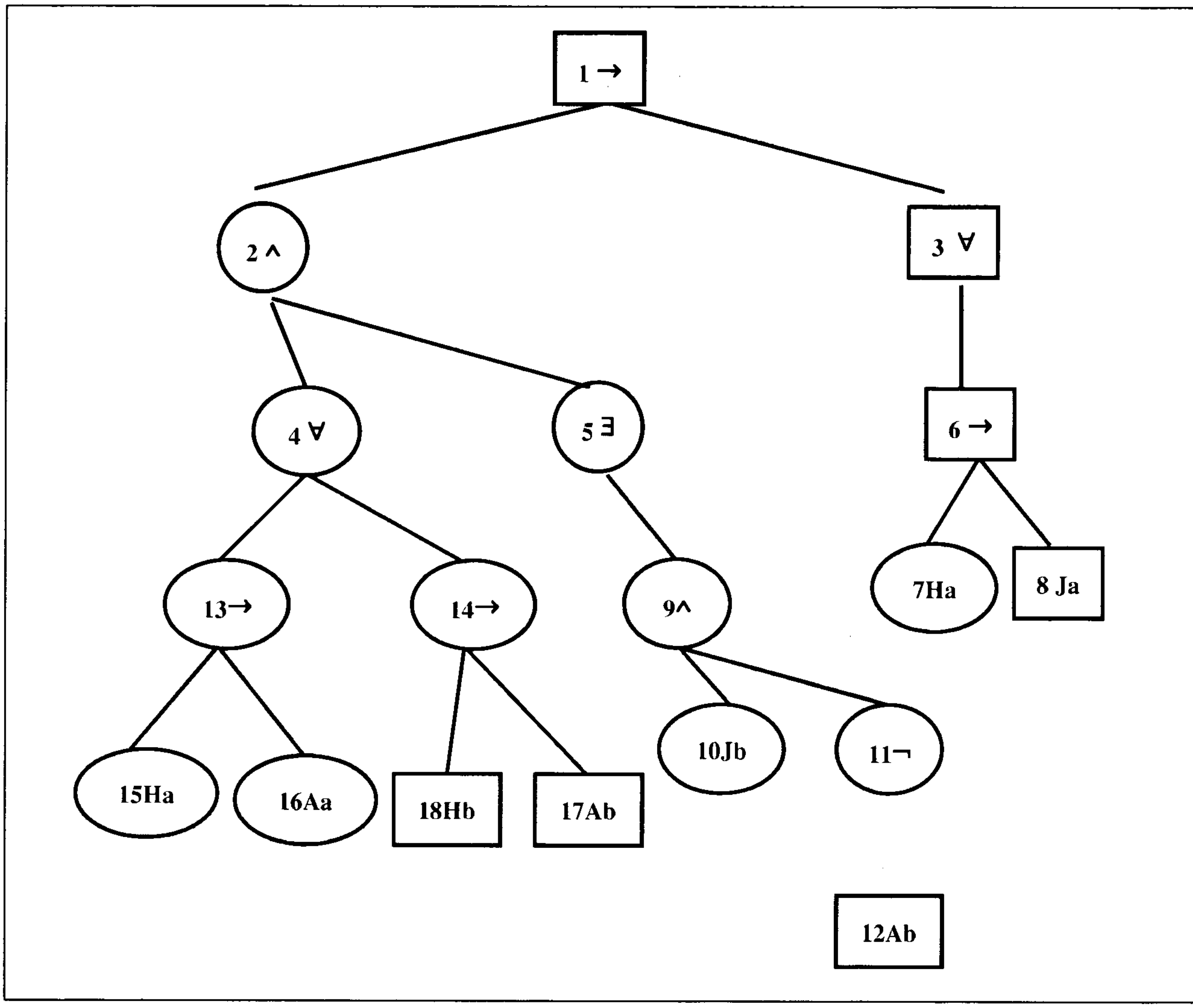
Cuando tenemos el árbol de forzamiento bien marcado, podemos encontrar un modelo que refuta el enunciado de la siguiente manera: los individuos del modelo son los individuos generados por el árbol, la interpretación de un símbolo de predicado monádico P, que es un conjunto, consta de los individuos c tales que Pc está marcado con círculo en el árbol, la interpretación de un símbolo de predicado binario R, que es un conjunto de parejas ordenadas, consta de las parejas de individuos (a, b) tales que Rab está marcado con círculo en el árbol y así sucesivamente.

2.5 Ilustraciones

2.5.1 Argumento inválido: $\forall x(Hx \rightarrow Ax),\ \exists x(Jx \wedge \neg Ax) \vdash \forall x(Hx \rightarrow Jx)$

Condicional asociado:

$$\{\forall x(Hx \rightarrow Ax) \wedge \exists x(Jx \wedge \neg Ax)\} \rightarrow \forall x(Hx \rightarrow Jx)$$

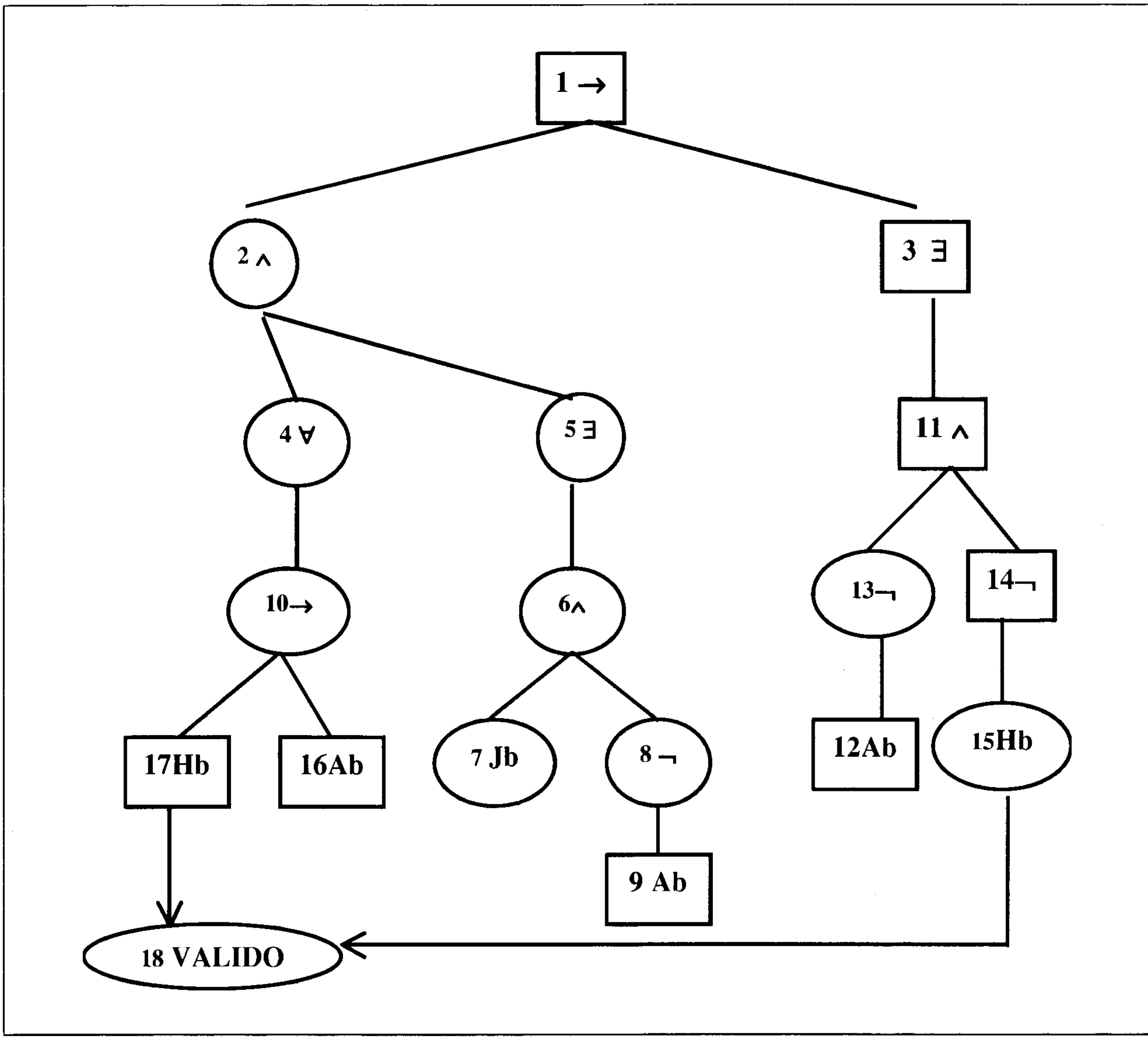


JUSTIFICACIONES

1.	FR	2, 3.	F→ en 1	4, 5.	A∧ en 2.
6.	F∀ en 3.	7, 8.	F→ en 6.	9.	A∃ en 5.
10, 11.	A∧ en 9.	12.	A¬ en 11.	13, 14.	A∀ en 4.
15.	IA en 7.	16.	AIA→ en 13 y 15.	17.	IF en 12.
18.	FDA→ en 14 y 17.	19.	Árbol bien marcado de 7, 8, 10, 12, 16 y 18		

2.5.2 Argumento válido: $\forall x(Hx \to Ax), \exists x(Jx \wedge \neg Ax) \vdash \forall x(Hx \to Jx)$

Condicional asociado: $\{\forall x(Hx \to Ax) \wedge \exists x(Jx \wedge \neg Ax)\} \to \forall x(Hx \to Jx)$



JUSTIFICACIONES

1.	FR	2, 3.	F→ en 1	4, 5.	A∧ en 2.
6.	A∃ en 5.	7, 8.	A∧ en 6.	9.	A¬ en 8.
10.	A∀en 4.	11.	F∃ en 3.	12.	IF en 9.
13.	FA¬ en 12.	14.	AIF∧ en 11 y 13.	15.	F¬ en 14.
16.	IF en 9.	17.	FDA→ en 10 y 16.	18.	DM en 15 y 17.

BIBLIOGRAFÍA

Caicedo, X. (1990). Elementos de lógica y calculabilidad. Bogotá: Una empresa docente.

Copi, I. (1981). Lógica Simbólica, México: C.E.C.S.A.

Garrido, M. (1997). Lógica Simbólica, Madrid: Tecnos.

Gómez, R. y López, L. (1993). Matemáticas básicas para la informática, vol II., Medellín: Universidad EAFIT.