

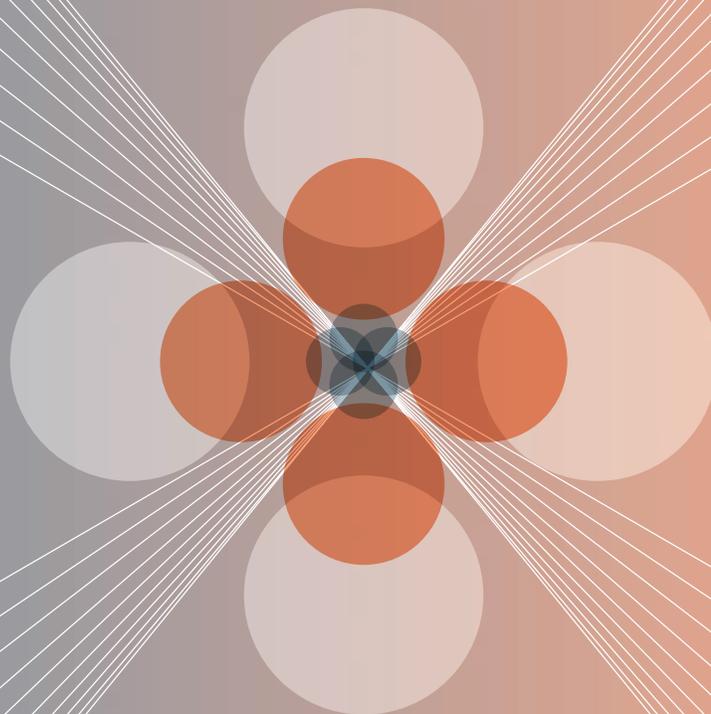
# INTRODUCCIÓN A LA ACÚSTICA DE LA BANDOLA ANDINA COLOMBIANA

Sara Elena Rodríguez, Nicolás Guarín - Zapata

Contacto: srodri13@eafit.edu.co, nguarinz@eafit.edu.co

Grupo de Mecánica Aplicada  
Universidad EAFIT

DOI: 10.17230/ricercare.2014.1.7



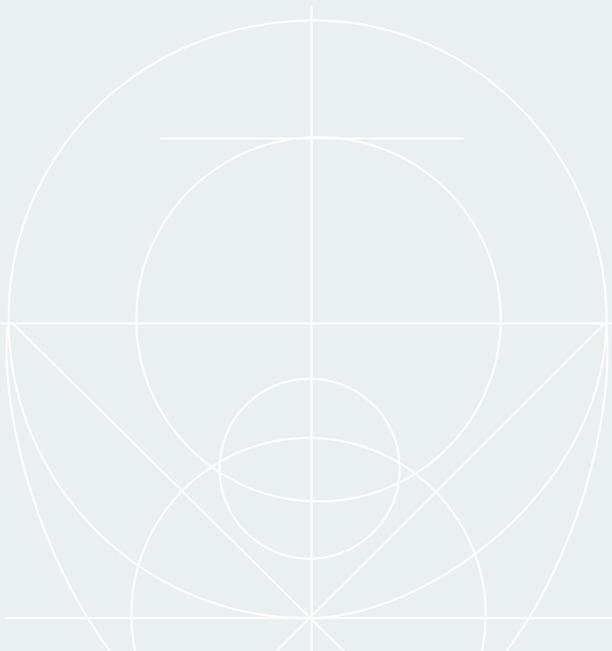
**RESUMEN:** En este artículo, presentamos la bandola andina colombiana dentro del contexto de la acústica musical. Mencionamos algunos de los fenómenos físicos involucrados en la generación del sonido y la relación con la construcción del instrumento. Aprovechando el parecido con la guitarra — en origen y construcción — utilizamos un modelo mecánico simplificado para el estudio de las resonancias acopladas, el cual se alimentó de los resultados obtenidos por simulaciones con el método de los elementos finitos.

**PALABRAS CLAVES:** Bandola andina colombiana, Acústica musical, Análisis modal, Acople modal, FEM.

#### INTRODUCTION TO THE ACOUSTICS OF THE COLOMBIAN ANDEAN BANDOLA.

**ABSTRACT:** In this article we present the Colombian Andean bandola in the context of musical acoustics. We mention some physics phenomena involved with the generation of sound and its relation with the instrument building. Taking advantage of the similarities with guitar —from origin and construction— we use a simplified mechanical model in order to study the coupling between resonances; this model was fed with results obtained with the finite elements method.

**KEYWORDS:** Colombian Andean bandola, musical Acoustics, modal analysis, modal coupling, FEM.



## INTRODUCCIÓN

Al referirnos a la acústica, nos ubicamos en una ciencia interdisciplinaria que abarca, no sólo el sonido dentro del intervalo audible por el humano, sino también aquel que yace fuera de los límites de la escucha: infrasonido y ultrasonido, las vibraciones en objetos y las denominadas ondas sonoras de alta intensidad y de choque (Kinsler et al., 2000) (Beranek, 1986). Podríamos entender la acústica como el estudio de las perturbaciones que se propagan o viajan en diferentes medios como líquidos, gases o sólidos, considerando una perturbación como una variación del estado inicial de un medio en equilibrio global, por ejemplo una oscilación de las partículas que conforman un medio, inicialmente en reposo.

Para ilustrar lo anterior, pensemos en el sonido que percibimos: Al introducir una fuente sonora, supongamos la vibración de la membrana de un parlante, las partículas de aire en frente de dicha membrana son aceleradas y la porción de aire más cercana es comprimida cuando ésta se desplaza hacia adelante (inicio de la perturbación); esto genera una acumulación local de partículas y una variación también local sobre el valor global de la presión (presión atmosférica). El movimiento ocasionado por la perturbación es transmitido desde las primeras partículas afectadas a sus vecinas a través de choques; zonas adyacentes de mayor y menor presión empiezan a formarse. A esta perturbación que se propaga se la llama onda sonora.

Se considera que el estudio científico del sonido nace con los filósofos griegos, quienes mantenían la idea de que el origen del sonido se encontraba en el movimiento de las partes de los cuerpos. Sin embargo, fue el trabajo de Pitágoras, quien introdujo una cultura matemática durante el siglo VI A.C., el primer paso en la construcción teórica del fenómeno sonoro. Al parecer, Pitágoras estaba impresionado por la relación que existía entre la longitud y la frecuencia de los sonidos producidos por cuerdas tensadas: la cuerda más corta sonaría con un tono más agudo e incluso, si una tiene el doble de la longitud que la otra, la más corta sonaría una octava por encima de la más larga (Lindsay, 1966). Lo anterior representó para la doctrina pitagórica un soporte en su idea de que el mundo no sólo podría ser descrito matemáticamente, sino que era realmente matemático pues cada cosa conocida tendría un número (Cohen et al., 1948).

Parece razonable pensar que los pitagóricos hayan tenido sospechas de que la altura de un sonido dependiera de la frecuencia con la que vibra el objeto que produce dicho sonido. Sin embargo, fue Galileo Galilei (1564-1642) quien desarrolló seriamente la idea de esta relación y quien también abordó temas como la consonancia y la disonancia entre sonidos, según la razón entre las frecuencias correspondientes a intervalos musicales y la resonancia. Estas situaciones descritas anteriormente son quizás de las más reconocidas en el inicio de la ciencia del sonido, y podríamos decir que apuntan a un tema en especial: el estudio de las vibraciones en una cuerda. En este sentido y siguiendo los primeros pasos del desarrollo de la acústica, se observa que el estudio de la producción sonora y de las vibraciones en diferentes cuerpos constituyó la base para la construcción teórica de esta ciencia (ASA, 2013).

El estudio de las vibraciones en una cuerda concentró, durante casi dos siglos, a científicos como Giovanni Battista Benedetti (1530-1590), Isaac Beeckman (1588-1637), Marin Mersenne (1588-1648), Joseph Sauveur (1653-1716), Brook Taylor (1685-1731), Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) y Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), fuera de los ya mencionados. Casi paralelamente, el tema de la propagación del sonido en el aire era tratado por Pierre Gassendi (1592-1655), Marin Mersenne, Athanasius Kircher (1602-1680), Otto von Guericke (1602-1686), Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679), Vincenzo Viviani (1622-1703), Robert Boyle (1627-1691) y Sir Isaac Newton (1642-1727). Sauveur, Euler y Lagrange también estuvieron interesados por el sonido de los tubos de órgano y de instrumentos de viento en general. Los estudios que siguieron fueron los de vibraciones en vigas tratados por Euler, Bernoulli, Lord Rayleigh (1842-1919) y Stephen Timoshenko (1878-1972); vibraciones en membranas, abordadas por Euler y Siméon Denis Poisson (1781-1842); vibraciones en placas, que fueron tratadas por Ernst Chladni (1756-1827), Sophie Germain (1776-1831), Lagrange, Claude-Louis H. Navier (1785-1836), Gustav Kirchhoff (1824-1887), Augustus Edward H. Love (1863-1940), August Föppl (1854-1924), Theodore von Kármán (1881-1963), Timoshenko, Raymond Mindlin (1906-1987) y Eric Reissner (1913-1996); y el estudio

acerca de resonadores hecho por Hermann von Helmholtz (1821-1894). Estos antecedentes son los fundamentos actuales para el estudio de instrumentos de cuerda, viento, percusión, entre otros.

Resulta un poco extraño que con todos estos referentes teóricos, no sea sino en el siglo XIX cuando la acústica musical aparezca como un campo específico para estudiar la producción del sonido musical, su transmisión al oyente y su percepción (Rossing, 2007). Fueron los instrumentos de cuerda frotada, en especial el violín, el primer centro de atención para la investigación del comportamiento acústico de los instrumentos. En el siglo XVIII, Antonio Stradivari y Giuseppe Guarneri fueron los responsables de la brillante construcción de una gama de violines que, desde entonces, marcaron el punto de referencia para los constructores. Este pico en la calidad sonora de los violines fue alcanzado empíricamente y los detalles de su construcción aún hoy son un mito que ha sido tratado de aclarar a través del estudio acústico del instrumento por constructores profesionales y científicos. En 1817, Félix Savart (1791-1841), a quien Carleen M. Hutchins llama el “abuelo” de la investigación en el violín (Hutchins, 1983), se interesa por la acústica de este instrumento y empieza a construir violines tratando de basar su forma en los principios matemáticos ya desarrollados. Para 1819, Savart publica su trabajo “Mémoire des instruments à cordes et à archet” en la Academia de Ciencias de París. Estas memorias contenían un diseño de un violín trapezoidal del cual Savart afirmaba un desempeño acústico superior al violín tradicional, basado en resultados experimentales que alcanzó con técnicas similares a las de Chladni (ver Figura 1). Savart, con ayuda del famoso constructor de violines Jean Baptiste Vuillaume (1798-1875), estudió algunas propiedades de los violines de Antonio Stradivari y Joseph Guarneri (Rossing, 2010) (Buen, 2006).

Este interés en la acústica del violín también estuvo presente en Helmholtz, Lord Rayleigh, C.V. Raman (1888-1970), Frederick Saunders (1875-1963), y Lothar Cremer (1905-1990), trabajo que ha sido retomado por Hutchins y que actualmente utiliza herramientas modernas de análisis como la mecánica computacional, interferometría holográfica y analizadores de espectro, entre otros.



Figura 1. Violín trapezoidal de Savart.

El desarrollo de la acústica musical ha permitido el uso de métodos cuantitativos de investigación en el análisis de las propiedades sonoras, no sólo de violines, sino también de la guitarra clásica, el piano, la mandolina, instrumentos de viento (a partir de las décadas de los 30s y 40s) y de percusión (60s y 80s) (Ruiz-Boullosa, 1997). Los resultados encontrados en este campo, no sólo han aportado elementos en la construcción de los instrumentos sino también en la exploración y extensión de técnicas interpretativas, métodos de acople de elementos electroacústicos como los involucrados en los procesos de amplificación eléctrica, entre otros.

## ACÚSTICA DE LA BANDOLA

La bandola andina colombiana es un instrumento que ha experimentado varias adaptaciones en su diseño a lo largo de su historia y en diferentes regiones colombianas y que actualmente presenta varios prototipos, a pesar del trabajo investigativo que han realizado en las últimas tres décadas Manuel Bernal y Alberto Paredes para el desarrollo optimizado del instrumento (Bernal, 2003) (Cortés et al., 2002). No es posible identificar un diseño estándar de la bandola o una única afinación; sus dos ejemplares más comunes tienen por afinación: Si bemol y Do. Las diferencias se encuentran esencialmente en las maneras en que los constructores regionales fabrican sus instrumentos; este hecho, junto con las reformas planteadas recientemente por Bernal y Paredes, músico y constructor -respectivamente- de la sabana bogotana, han llevado a una discusión acerca de la identidad del instrumento con respecto a su sonoridad y a su función ligada a la música tradicional nacional.

La acústica musical ha buscado relacionar parámetros físicos con las características sonoras de un instrumento (Jansson, 1971) (Firth, 1977) (Jansson, 1977) (Ross et al., 1979) (Christensen et al., 1980) (Caldersmith, 1981) (Dickens, 1981) (Hutchins, 1981) (Christensen, 1982) (Marshall, 1985) (Rossing et al., 1985) (Knott et al., 1989) (Elejabarrieta et al., 2002) (Fletcher et al., 2010) y en ese sentido, teniendo como referencia los trabajos en acústica de instrumentos de cuerda, es posible estudiar las cualidades sonoras de la bandola a través de diferentes parámetros que gobiernan su comportamiento acústico. Dado que la bandola es un instrumento de cuerda que se ejecuta con plectro, producto de la transculturización y proveniente de la familia de la guitarra (Bernal, 2003), una base para el entendimiento de su comportamiento acústico es la amplia bibliografía dedicada a la acústica de la guitarra clásica (Jansson, 1971) (Firth, 1977) (Jansson, 1977) (Ross et al., 1979) (Christensen et al., 1980) (Caldersmith, 1981) (Dickens, 1981) (Christensen, 1982) (Rossing et al., 1985) (Elejabarrieta et al., 2002) (Fletcher et al., 2010). No sólo sus orígenes son similares; también el principio detrás de la producción sonora es el mismo: vibraciones que se establecen en las cuerdas y el cuerpo del instrumento y que estimulan el aire que lo rodea, produciendo ondas sonoras que llegan a nuestros oídos.

La bandola andina colombiana, al igual que la guitarra, puede entenderse como un sistema mecánico complejo, es decir, un sistema cuya respuesta dinámica puede ser descrita por la interacción de múltiples sistemas individuales. Los instrumentos de cuerda, no sólo involucran la vibración de las cuerdas sino también la vibración acoplada de placas, barras armónicas (que forman el llamado abanico usualmente detrás de la placa frontal) y las oscilaciones del aire dentro de una cavidad. Cada parte puede considerarse como un subsistema y así las vibraciones de la bandola, como un todo, pueden ser descritas a partir del estudio de cada una de ellas y de su acoplamiento. Por ejemplo, estudios en la guitarra han sido dedicados al tipo de excitación y de fuerza que ejercen las cuerdas en el resto del cuerpo y la respuesta final del instrumento a éstas, los modos de vibración y resonancias de cada elemento constitutivo y el acople entre las vibraciones de las placas con el aire para poder describir la vibración final del instrumento (Fletcher et al., 2010). En la Figura 2, se presenta un esquema que describe el funcionamiento de la guitarra en diferentes rangos de frecuencia y los subsistemas que involucra.

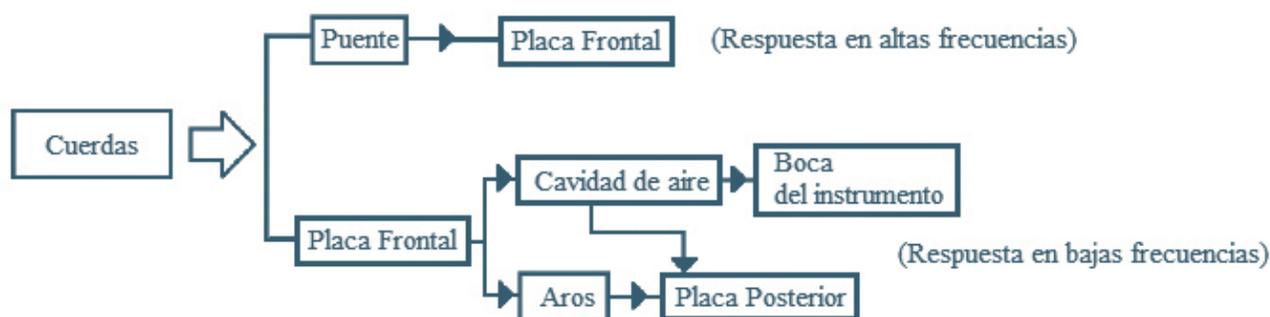


Figura 2. Esquema por subsistemas que representa la respuesta de una guitarra para diferentes frecuencias (Fletcher et al., 2010).

Los modos normales de vibración son parámetros que están ligados a la respuesta vibratoria de un instrumento. Estos son patrones en los que todos los puntos del instrumento se mueven en consonancia y son únicos en cada estructura. Conocer los modos y las frecuencias en las que se presentan (frecuencias naturales), equivale a determinar las características dinámicas completas de un instrumento (Ewins, 2000). En la Figura 3, se presentan algunos modos de vibración en guitarras.

En esta descripción acerca de la acústica de la bandola andina colombiana, se pondrá especial atención a los modos normales de vibración de los elementos de la caja acústica y en el acople de ellos. Un conocimiento de las características dinámicas de la caja de resonancia puede dar una idea de cómo algunos parámetros estructurales influyen el comportamiento del instrumento como un todo. Los detalles que a continuación se presentan son los resultados de una investigación realizada desde comienzos del 2010 y que llevaron a la producción de una tesis de pregrado acerca del acople modal ante bajas frecuencias en una bandola andina colombiana en Do (Rodríguez, 2010) (Rodríguez, 2012) (Rodríguez et al., 2012).

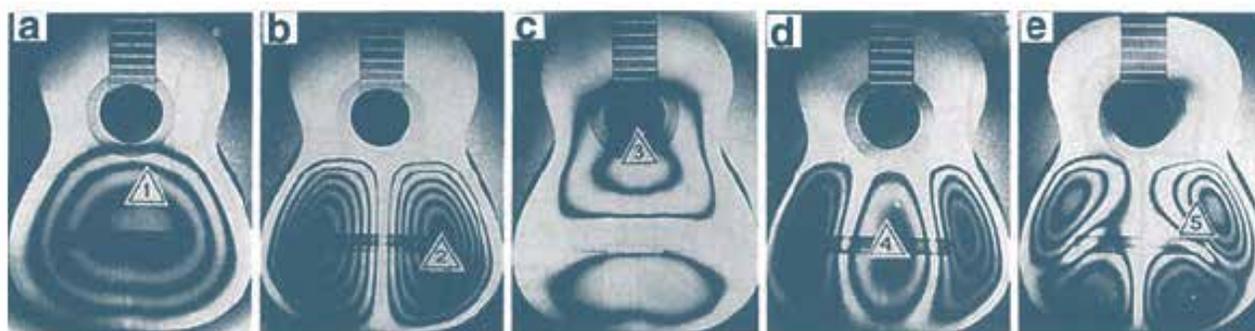


Figura 3. Modos de vibración de la placa frontal de guitarra clásica visualizados con interferometría holográfica. La placa frontal está fija a los aros pero no hay placa posterior (Jansson, 1971).

## 2.1. Modelo mecánico simplificado

Los instrumentos musicales constituyen un sistema vibratorio complejo en los que la energía proviene del ejecutante. En el caso de la bandola, la energía se transforma en vibraciones en las cuerdas que son transmitidas a la placa frontal del instrumento a través del puente. A su vez, las vibraciones de la placa frontal excitan el aire dentro y fuera de la caja acústica y finalmente alcanzan la placa posterior mediante las oscilaciones del aire dentro de la cavidad y algunas vibraciones —muy pequeñas— que llegan por los aros del instrumento. Después de un momento, todas estas vibraciones se acoplan para producir la respuesta del instrumento completo.

El caso más simple de oscilación se puede representar con un sistema masa-resorte (ver Figura 4) que, al ser deformado (comprimido o alargado), almacena energía que luego se convierte en movimiento. La masa en movimiento lleva el sistema de nuevo a su estado sin deformar pero, por motivos inerciales, vuelve a deformarse y así sucesivamente. El movimiento que describe dicha oscilación es sinusoidal.

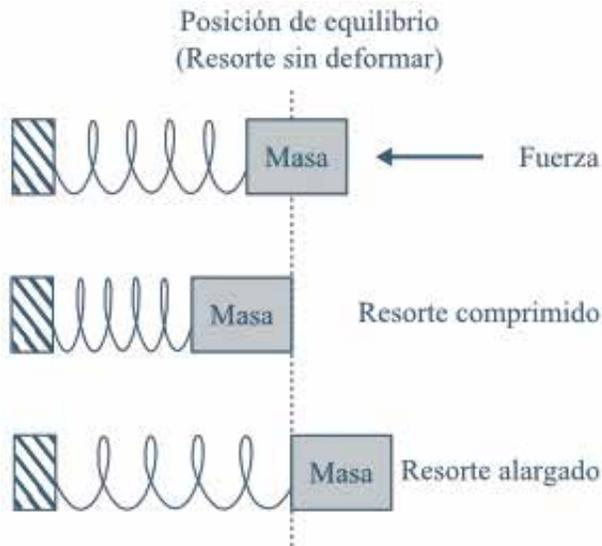


Figura 4. Oscilador armónico simple: sistema masa-resorte.

Como primera aproximación, se puede considerar el cuerpo de la bandola como un conjunto de osciladores armónicos acoplados. Christensen y Vistisen (1980) presentaron el modelo de la Figura 5 para describir las vibraciones de la caja acústica de la guitarra en sus primeras dos resonancias.

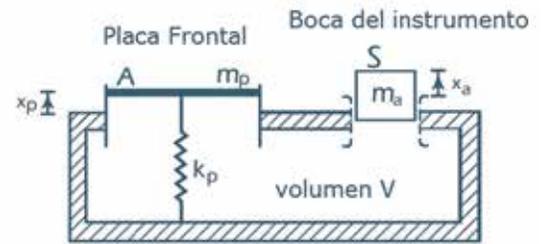


Figura 5. Modelo de la caja de resonancia como sistema acoplado de dos resonadores.

Este modelo considera la interacción de las primeras resonancias de dos osciladores: el aire encerrado que funciona como un resonador de Helmholtz y la placa frontal que vibra en su primer modo fundamental (Figura 3, imagen a). El aire dentro de la cavidad sería el primer sistema masa-resorte: la masa de aire ( $m_a$ ) que vibra como un pistón a través de la boca del instrumento (con área transversal  $S$ ) y el aire dentro de la caja que se asume como un resorte ó colchón de aire; el segundo sistema sería la placa frontal, cuyas características elásticas corresponden al resorte ( $k_p$ ) y su masa ( $m_p$ ) que es la equivalente del sistema; la placa posterior es considerada rígida. A partir de este modelo, se pueden estimar las primeras dos frecuencias de resonancia de una guitarra como , donde  $f_1$  y  $f_2$  son la primera y la segunda frecuencias de resonancia del instrumento completo; la frecuencia de resonancia de la placa unida a la cavidad sin boca y la frecuencia de resonancia del resonador de Helmholtz. Tanto como son dependientes de la geometría y los materiales del instrumento.

Adicionalmente, Christensen (1982) presentó un modelo en donde acopla las vibraciones de las tapas frontal y posterior además del aire encerrado y, a partir de éstas, describe las primeras tres resonancias del instrumento (ver Figura 6).

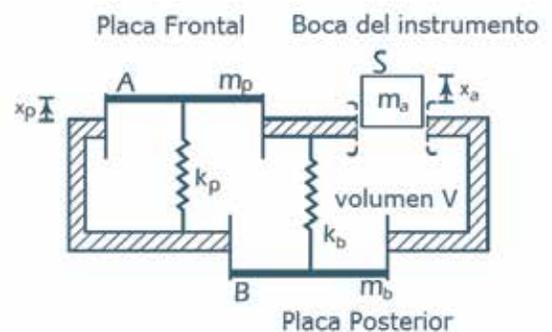


Figura 6. Modelo de la caja de resonancia como sistema acoplado de tres resonadores.

Este modelo añade otro sistema más de masa-resorte: la placa posterior, cuyas propiedades elásticas corresponden al resorte ( $k_p$ ) y su masa ( $m_p$ ) que es la equivalente del sistema. Esta vez, las primeras tres resonancias son halladas a través de la relación, donde es la frecuencia de resonancia de la placa posterior unida a la cavidad sin boca. Nuevamente, estos parámetros están determinados por la geometría y materiales de construcción del instrumento. Es importante aclarar que, en estos modelos, se toman en cuenta los primeros modos de vibración de cada sistema pues son los que contienen más energía (Ewins, 2000); además, son los que presentan mayor transmisión de energía al fluido circundante ya que todos los puntos, de la placa o el aire, se están moviendo en fase (Williams, 1999).

En el caso de la bandola andina colombiana, se tiene un instrumento musical cuya construcción es similar a la guitarra. Es entonces razonable considerar este tipo de modelos para tener un estimado de la dinámica del instrumento para bajas frecuencias.

### 2.2. Resultados obtenidos por FEM

El Método de los Elementos Finitos (FEM), es una método numérico ampliamente usado en ingeniería para determinar el comportamiento de sistemas físicos (Zienkiewicz et al., 2005). Con el uso de FEM se calcularon las frecuencias y los modos de vibración para la bandola en el rango de 0 a 800 Hz, teniendo en cuenta valores reportados de las propiedades elásticas de un cedro para la placa frontal y palo de rosa para la posterior (Elejabarrieta et al., 2002) (Torres, 2008) (Torres, 2006). Se utilizó el siguiente modelo CAD de la bandola.

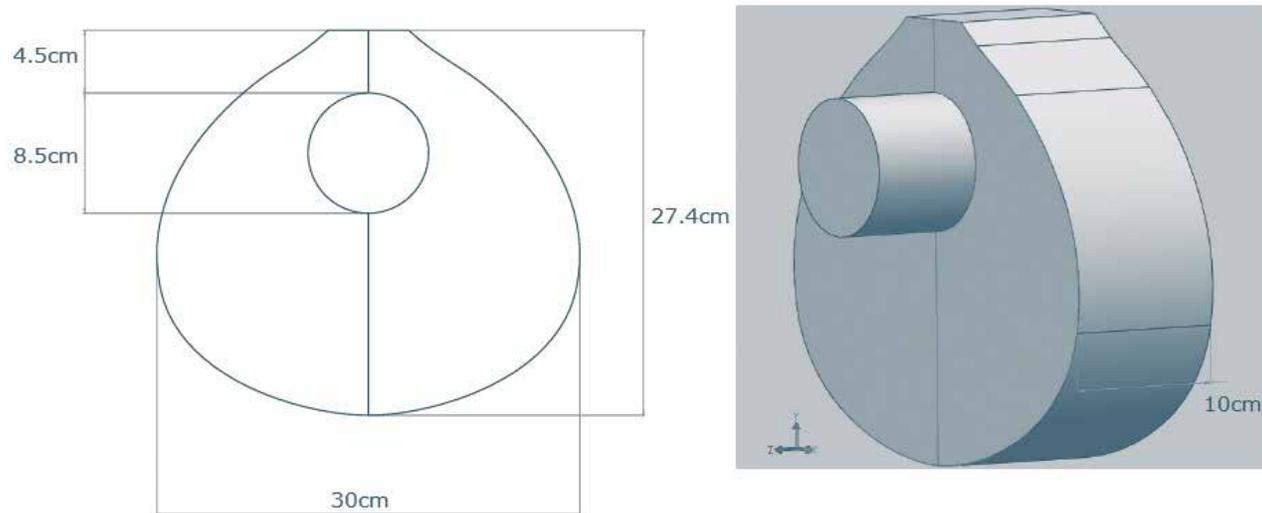


Figura 7. Dimensiones del modelo CAD (Computer-aided design) de la bandola.

Los modos normales de vibración encontrados para la placa frontal y posterior se presentan en las figuras 8 y 9, en donde la variable graficada es el desplazamiento en cada punto y los colores indican valores entre máximos y mínimos como indica la barra a la derecha.

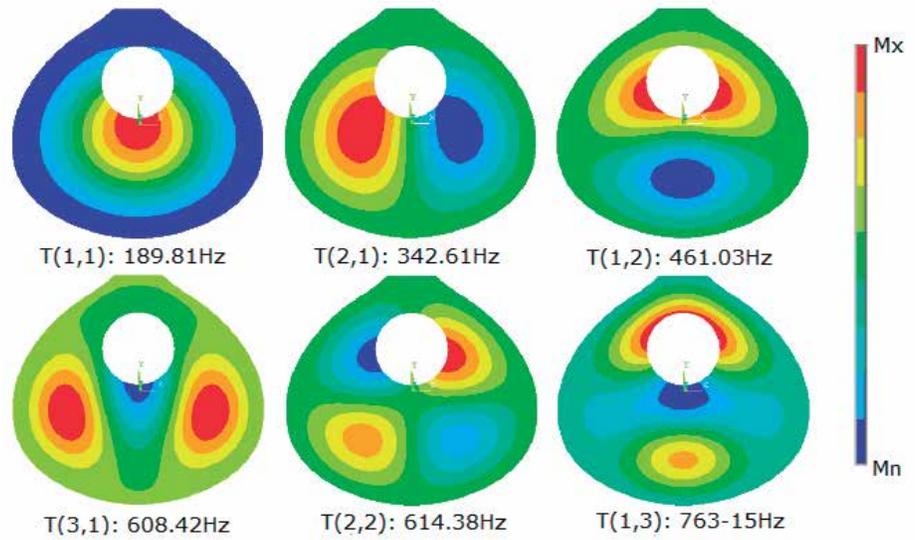


Figura 8. Modos normales de vibración de la placa frontal de la bandola en un rango de 0-800 Hz.

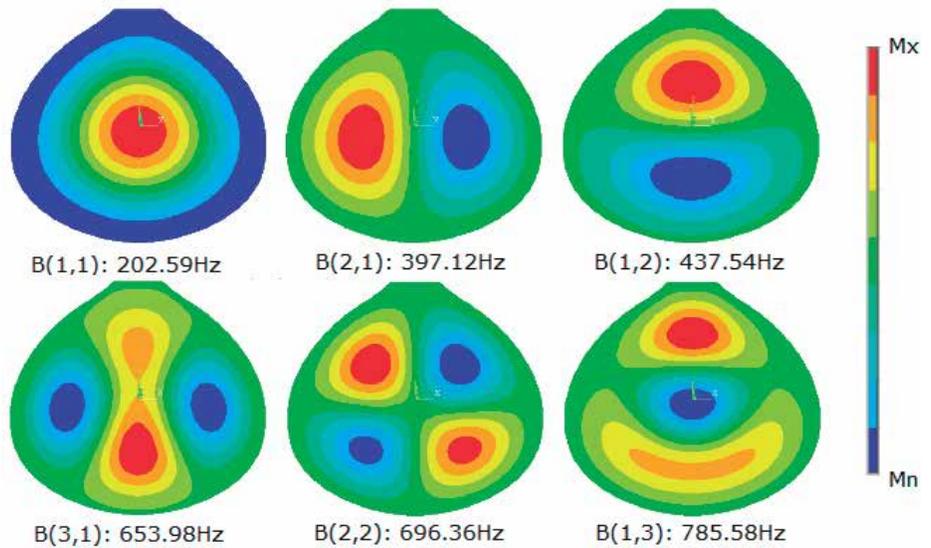


Figura 9. Modos normales de vibración de la placa posterior de la bandola en un rango de 0-800 Hz.

Se puede observar cómo el primer modo de cada placa, T(1,1) y B(1,1), se caracteriza (como en las guitarras) por una variación simétrica de la amplitud en toda su área. Este resultado soporta la idea de los modelos de acople, en donde las placas se modelan como osciladores armónicos simples que representan el desplazamiento conjunto de la placa y se considera su masa efectiva. Fuera del modo fundamental, los modos restantes pueden dar cuenta, un poco, de los esfuerzos experimentados; por ejemplo, los modos (2,1) y (3,1) son reconocidos como los

“modos de flexión transversales”, los modos (1,2) y (1,3) son los “modos de flexión longitudinal” y el modo (2,2) es llamado “modo de cizalla”.

La Figura 10 muestra los modos obtenidos para el aire dentro de la cavidad, denominados A0, A1 y A2. Esta vez, la variable graficada corresponde al valor de la presión en cada punto dentro de la cavidad.

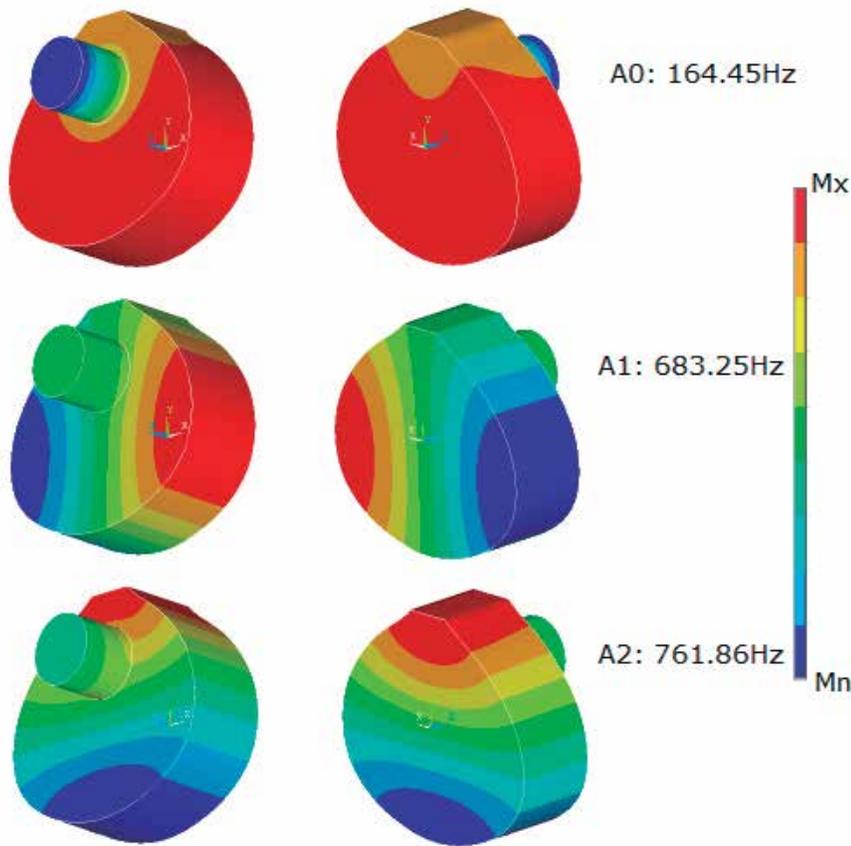


Figura 10. Modos normales de vibración del aire dentro de la cavidad de una bandola en un rango de 0-800 Hz.

Es importante aclarar que el modelo CAD de la bandola presenta un cilindro alargado (cuello) justo en la región de la boca, el cual corresponde a la corrección necesaria para calcular la longitud a lo largo de la cual vibra el pistón de aire y determinar la frecuencia fundamental del resonador de Helmholtz. Lo anterior se conoce como el “efecto de terminación” que también aparece en instrumentos como la flauta y que, en guitarras, se aproxima con una corrección de 1.7 veces el radio de la boca (Rossing, 2010).

El modo A0 es conocido como la resonancia de Helmholtz y, de acuerdo con los modelos de acople, es de gran importancia para la respuesta dinámica de la bandola en bajas frecuencias pues ésta acopla todo el sistema. Un resonador de Helmholtz se caracteriza por su presión máxima constante dentro de la cavidad (que actúa como un colchón de aire) y una variación en la región del cuello que permite la oscilación del pistón de aire. También se observa que la frecuencia de A0 está bastante alejada de las otras frecuencias modales, una diferencia que consti-

tuye casi dos octavas musicales para el modo más cercano A1. Esto podría explicar la gran influencia que tiene este primer modo sobre las primeras resonancias del instrumento, pues su valor está más cercano al de las primeras frecuencias de las placas. Por otro lado, A0 y A1 muestran una distribución transversal de la presión y A2 una distribución longitudinal.

Para el mismo rango, se obtuvieron nueve modos normales de vibración en el modelo acoplado de la tapa frontal con el aire dentro de la caja acústica. En las figuras 11, 12 y 13, se presentan estos modos acoplados, en donde DT, PF y PB corresponden a las gráficas del desplazamiento en placa frontal, la presión vista desde el frente y la presión vista desde atrás.

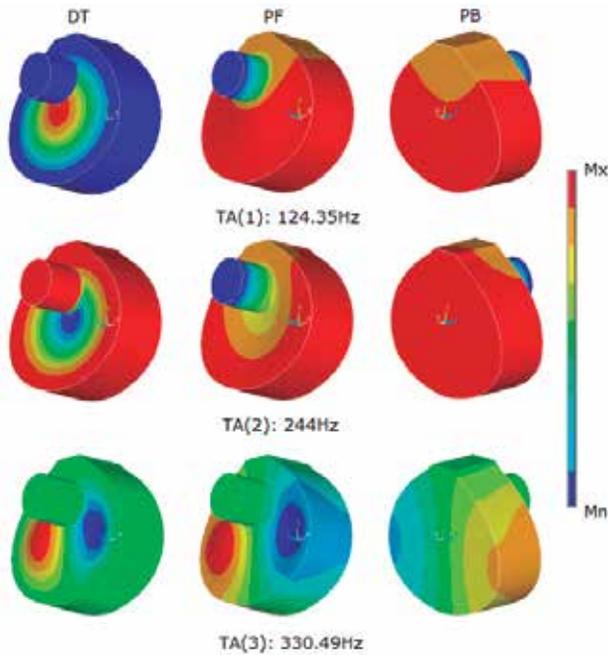


Figura 11. Modos normales de vibración acoplados, del sistema placa frontal-aire encerrado. Modos 1-3.

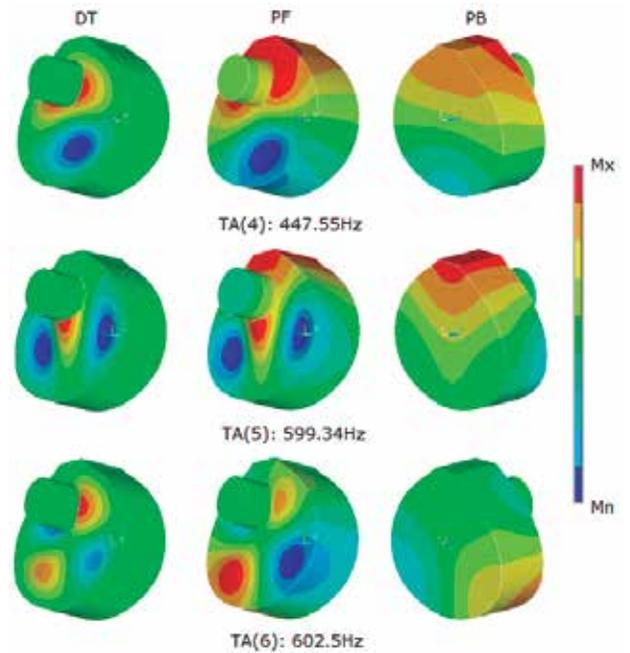


Figura 12. Modos normales de vibración acoplados, del sistema placa frontal-aire encerrado. Modos 4-6.

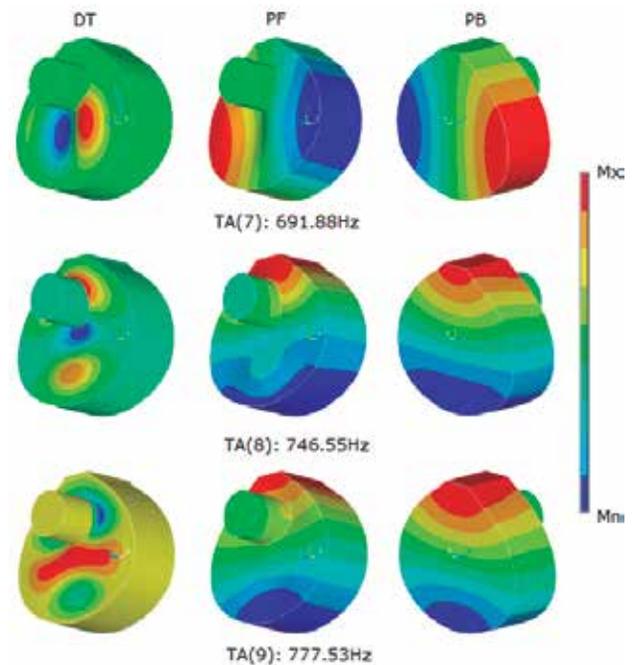


Figura 13. Modos normales de vibración acoplados, del sistema placa frontal-aire encerrado. Modos 7-9.

Considerando que el valor de A0 era más bajo que la frecuencia fundamental de la placa frontal T(1,1) y siguiendo el modelo de Christensen y Vistisen, podemos observar que el acople entre estos dos modos da lugar a una frecuencia más baja que A0 -TA(1) y otra más alta que T(1,1)

- TA(2)- (como se muestra en la Figura 11). Las formas modales de TA(1) y TA(2) sugieren que ellas son radiadores sonoros eficientes pues una gran área de la placa de la bandola podrá excitar el aire en frente de ésta, además de que el aire movido por el pistón de aire tendrá una proyección más uniforme. Por otra parte, estas formas modales son muy parecidas entre sí y lo que se observa es que, en ambos modos acoplados, el instrumento vibra con la forma modal de A0 y T(1,1) planteando una mayor influencia de A0 para el primer modo acoplado y una mayor influencia de T(1,1) para el segundo modo acoplado, como también lo sugieren los datos experimentales en guitarras, de Christensen y Vistisen (Christensen et al., 1980).

Con respecto a los otros siete modos acoplados, se puede observar que éstos son combinaciones de los otros cinco modos de la placa frontal y los dos restantes del aire en la cavidad. Como se esperaba, los modos resultantes son combinaciones de los modos de los elementos desacoplados. En este sentido, modelos más complejos podrían ser considerados para predecir más modos acoplados, usando nuevos osciladores, cada uno para representar un modo de la placa o del aire. Un modelo de nueve osciladores, tres para los modos del aire en la cavidad y seis para los modos de la placa frontal, todos dentro del mismo rango de frecuencias, podrán predecir los nueve modos acoplados que también estarían dentro del mismo rango de frecuencia.

En las figuras 14, 15 y 16, se presentan los modos acoplados, teniendo en cuenta la vibración de la placa posterior y por tanto, correspondientes al modelo de tres osciladores de la Figura 6. Esta vez, los modos resultantes fueron quince (doce de las placas y tres del aire). Las iniciales DT, DB, PF, PB tienen el mismo significado que en las figuras anteriores, y se añade DB para el desplazamiento visto en la placa posterior.

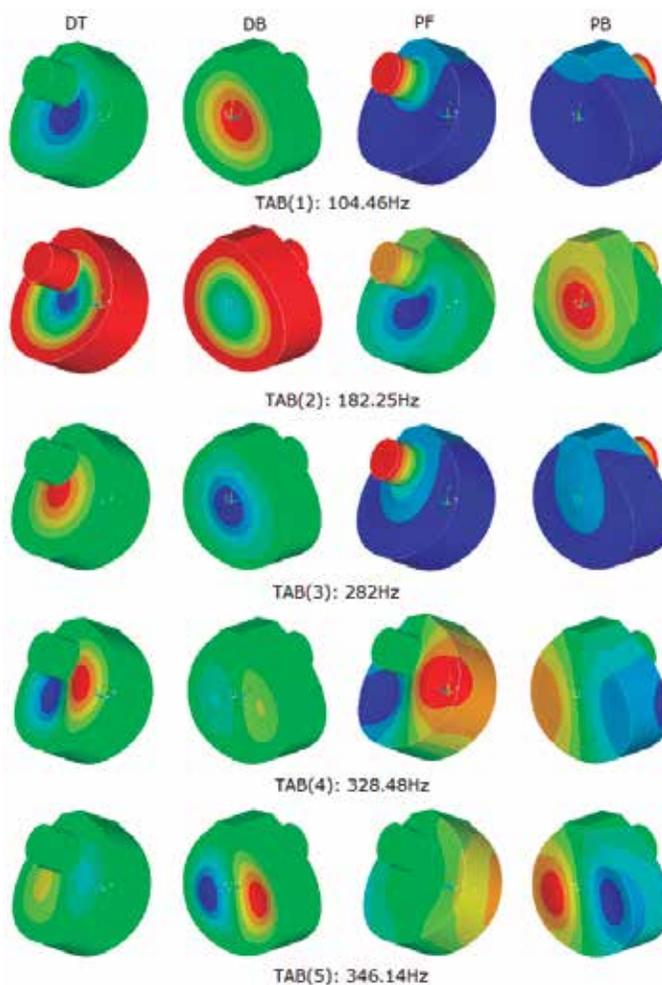
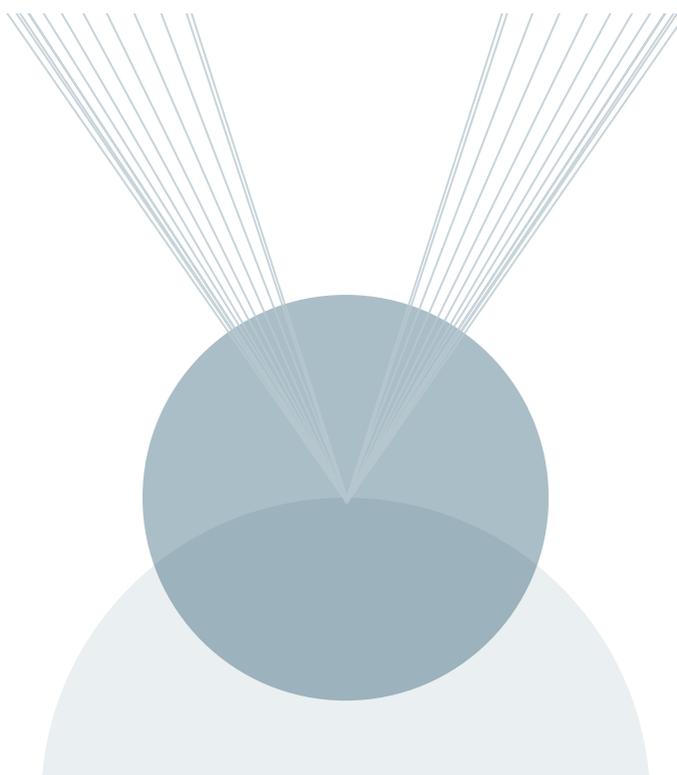


Figura 14. Modos normales de vibración acoplados, del sistema placa frontal-  
aire encerrado-placa posterior. Modos 1-5.



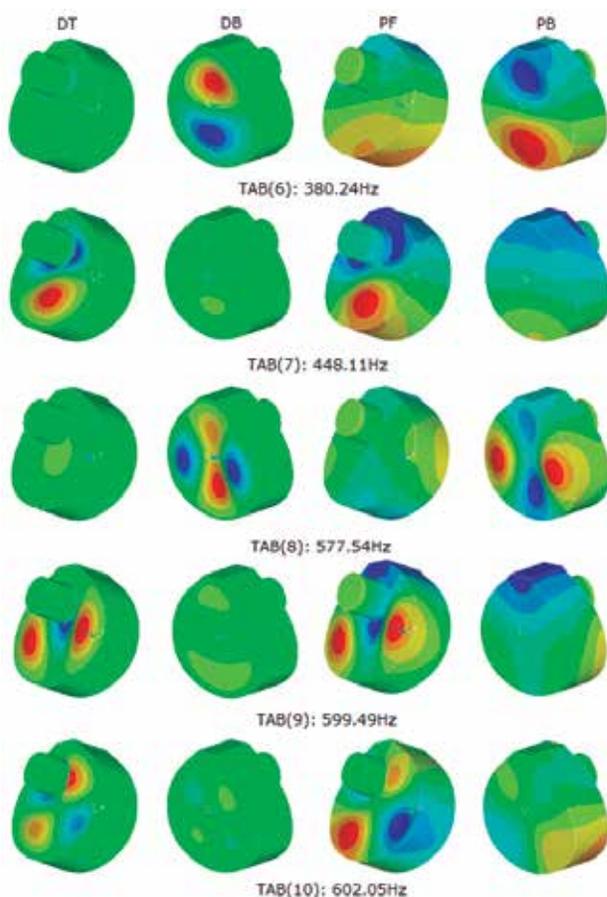


Figura 15. Modos normales de vibración acoplados del sistema placa frontal-aire encerrado-placa posterior. Modos 6-10.

En la Figura 14, se pueden identificar, en los tres primeros modos TAB(1), TAB(2) y TAB(3), las formas modales de A0, T(1,1) y B(1,1). Esto es coherente con el modelo de tres osciladores acoplados de Christensen (Christensen, 1982). TAB(1) y TAB(3) presentan un movimiento en contrafase de las placas frontal y posterior, movimiento que “inhala” y “exhala” el aire como si el instrumento estuviera respirando y, debido a ello, es común encontrar, en otros instrumentos con caja de resonancia, que el modo que presenta mayor amplitud en este movimiento (en este caso el primer modo) es llamado el “modo de respiración”. TAB(2) por otra parte, presenta un movimiento en fase de las dos placas.

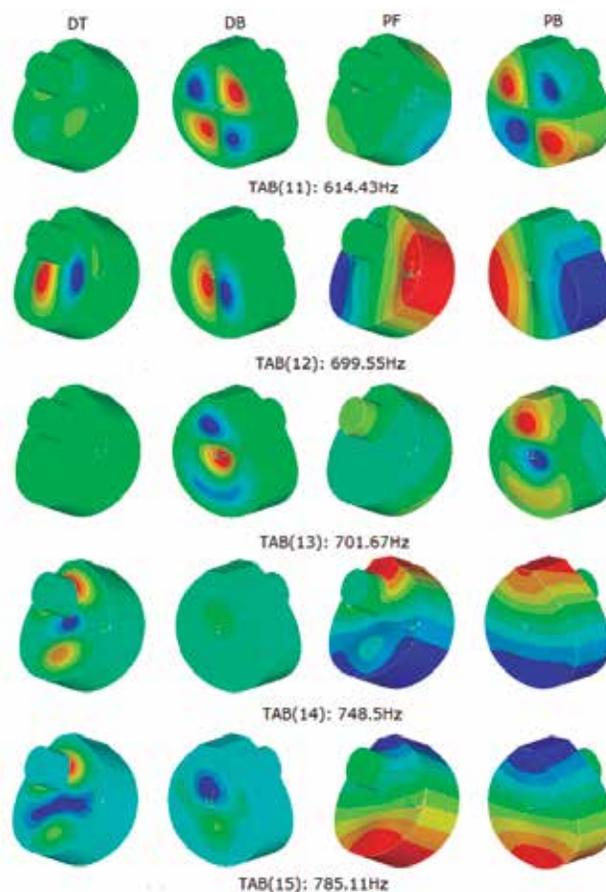


Figura 16. Modos normales de vibración acoplados del sistema placa frontal-aire encerrado-placa posterior. Modos 11-15.

De acuerdo con los modos resultantes del acople entre la placa frontal, el aire encerrado y la placa posterior, los modos A0, T(1,1) y B(1,1) acoplados, producen un primer modo TAB(1) más bajo que A0, un segundo modo TAB(2) más bajo que T(1,1) y un tercer modo más alto que B(1,1). Esto parece apuntar a que, al considerar la placa posterior, se tiene un efecto parecido a añadir más masa al sistema, lo que resulta en disminuir el valor de las frecuencias. Meyer (1982) y Ezcurra et al. (2005) reportaron el mismo comportamiento en las guitarras cuando consideraron el movimiento de la placa posterior. Sin embargo, fue Christensen quien aclaró que la segunda resonancia, TAB(2) en nuestro caso, podría ir arriba o abajo del modo de la placa frontal, dependiendo de si esta última era mayor o menor que la frecuencia de la placa posterior, respectivamente.

Al observar los doce modos restantes, se puede afirmar que éstos son combinaciones de los modos restantes de las placas y el aire encerrado. Una característica que vale la pena mencionar es que, de todos los modos resultantes, sólo los cinco primeros modos presentan un fuerte acoplamiento en el que, tanto las placas como el aire, están vibrando, mientras que, en el resto, se puede observar que casi siempre se acopla una de las placas con el aire y la otra permanece casi sin movimiento. Esto sugiere una ventaja del modelo de acoplamiento de dos osciladores, placa frontal y aire, que muestra un fuerte acople en todos sus modos, añadiendo que es el modelo que más se aproxima a la realidad pues generalmente las vibraciones de la placa posterior son amortiguadas con el cuerpo del ejecutante. Es muy razonable pensar, entonces, que apoyar el instrumento contra el cuerpo no presenta una pérdida considerable en la proyección del sonido pues sólo una tapa al tiempo logrará vibrar, aún si se deja libre la placa posterior.

## CONCLUSIONES

En este artículo, entonces, se discutió acerca de cómo abordar el estudio de la acústica de un instrumento en especial, la bandola andina colombiana. Se dio prioritaria atención al análisis del acople modal ante bajas frecuencias en la caja acústica de la bandola y se presentaron algunos resultados numéricos obtenidos por el método de los elementos finitos, que describen los modos de vibración de la caja acústica como combinación de los modos de la placa frontal, el aire dentro de la cavidad y la placa posterior.

Los modelos numéricos permitieron corroborar que el modelo de Christensen y Vistisen también es aplicable a la bandola. Se observó que la combinación de las primeras resonancias de la placa frontal y el aire producen las primeras dos resonancias de la caja acústica cuando la placa posterior estaba rígida y que la combinación de las primeras resonancias de las dos placas con el aire, producían las primeras tres resonancias de la caja acústica completa. Estos resultados fueron obtenidos sin considerar el puente, elemento que también influye en la dinámica del instrumento. Tomando los resultados de las investigaciones en guitarras, esto debe suceder ante altas frecuencias.

Es importante mencionar que el modelo que considera la placa frontal y el aire presentó un fuerte acoplamiento de estos elementos. Al considerar el modelo de las dos placas y el aire, una de las placas permanecía inmóvil mientras la otra se movía conjuntamente con el aire. Esto permite sugerir que el modelo más aproximado al comportamiento de la bandola, al ser ejecutada, es el que incluye sólo los movimientos de la placa frontal y el aire pues las vibraciones de la placa posterior se amortiguan con el cuerpo del intérprete y no alcanzarían un acople efectivo con el aire del instrumento ni con la placa frontal.

Por otro lado, nos parece importante mencionar que, al considerar la frecuencia de vibración de la cuerda más baja de la bandola, un F#2 de 185 Hz, notamos que las primeras resonancias de la caja acústica están por debajo de la frecuencia de esta cuerda. Los valores presentados corresponden a 124.35 Hz de TA(1) y 244 Hz de TA(2), 104.46 Hz de TAB(1), 182.25 Hz de TAB(2) y 282 Hz de TAB(3). En el primer caso, la frecuencia de la cuerda más grave está entre TA(1) y TA(2) y en el segundo caso, se encuentra por encima de TAB(1) y TAB(2) y por debajo de TAB(3). Se podría pensar que la frecuencia de esta cuerda debe estar más cercana a la primera resonancia del instrumento pues esta última refuerza considerablemente el registro grave. Sin embargo, este aspecto se tratará en una próxima publicación donde se estudiarán estos detalles (Rodríguez et al., 2013).

## CRÉDITOS DE FIGURAS

1. Tomado de la página web de “The Metropolitan Museum of Art” [http://www.metmuseum.org/Collections/search-the-collections/501569?rpp=20&pg=1&rndkey=20131031&ao=on&ft=\\*&deptids=18&what=Violins&who=Felix+Savart&pos=1](http://www.metmuseum.org/Collections/search-the-collections/501569?rpp=20&pg=1&rndkey=20131031&ao=on&ft=*&deptids=18&what=Violins&who=Felix+Savart&pos=1)

3. Tomada de [http://www.speech.kth.se/prod/publications/files/qpsr/1969/1969\\_10\\_2-3\\_036-041.pdf](http://www.speech.kth.se/prod/publications/files/qpsr/1969/1969_10_2-3_036-041.pdf)

## BIBLIOGRAFÍA

ASA's Physical Acoustics Technical Committee (2013). “Physical Acoustics Timeline, 550 BC - Present”. Recuperado de: <http://asa.aip.org/physical/patimeline.pdf>

Beranek, L. L. (1986). *Acoustics*. Acoustical Society of America. ISBN 0-88318-494-X.

Bernal, M. (2003). *Cuerdas más, cuerdas menos: una visión del desarrollo morfológico de la bandola andina colombiana*. Monografía. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Buen, A. (2006). “Violin Acoustics History - a brief introduction”. *Joint Baltic-Nordic Acoustics Meeting*. Gothenburg, Sweden. Recuperado de: [http://www.akutek.info/Papers/AB\\_Violin\\_acoustics\\_history.pdf](http://www.akutek.info/Papers/AB_Violin_acoustics_history.pdf)

Caldersmith, G. (1981). “Plate fundamental coupling and its musical importance”. *Catgut Acoustical Society Newsletter*, 36, pp.21–27.

Christensen, O., y Vistisen, B. B. (1980). “Simple model for low-frequency guitar function”. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68, pp.758–766.

Christensen, O. (1982). “Qualitative models for low frequency guitar function”. *Journal of Guitar Acoustics*, 6, pp.10–25.

Cohen, M. R., y Drabkin, I. E. (1948). *A SourceBook in Greek Science*. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc.

Cortés J., y Bernal, M. (2002). “La bandola andina colombiana en las paradojas de la música popular y la identidad nacional”. *IV Congreso de la Rama Latinoamericana de la IASPM*. México.

Dickens, F. T. (1981). “Analysis of the first and second vibration modes in a guitar using an equivalent electrical circuit”. *Catgut Acoustical Society Newsletter*, 35, pp.18–21.

Elejabarrieta, M. J., Ezcurra, y A., Santamaría, C. (2002). “Coupled modes of the resonance box of the guitar”. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111, pp.2283–2292.

Ewins, D. J. (2000). *Modal Testing: Theory, practice and application*. Second Edition. Research Studies Press LTD. ISBN 0 86380 218 4.

Ezcurra, A., Elejabarrieta, M. J., y Santamaría, C. (2005). “Fluid-structure coupling in the guitar box: numerical and experimental comparative study”. *Applied Acoustics*, 66(4), pp.411–425.

Firth, I.M. (1977). “Physics of the guitar at the helmholtz and first top-plate resonances”. *Journal of the Acoustical Society of America*, 61(2), pp.588–593.

Fletcher, N. H., y Rossing, T. D. (2010). *The physics of musical instruments*. 2nd Edition. Springer.

Hutchins, C. M. (1981). “Acústica de las tablas del violín”. *Scientific American* 245, pp. 170. Recuperado de [http://www.afhalifax.ca/magazine/wp-content/sciences/harmoniemusicale/Article\\_by\\_CMH\\_on\\_Violin\\_plates.pdf](http://www.afhalifax.ca/magazine/wp-content/sciences/harmoniemusicale/Article_by_CMH_on_Violin_plates.pdf)

Hutchins, C. M. (1983). “A history of violin research”. *Catgut Acoust. Soc. J.* 4(1), pp.4–10.

Jansson, E. V. (1971). “A study of the acoustical and hologram interferometric measurements on the top plate vibrations of a guitar”. *Acustica*, 25, pp.95–100. Recuperado de:

[http://www.speech.kth.se/prod/publications/files/qpsr/1969/1969\\_10\\_2-3\\_036-041.pdf](http://www.speech.kth.se/prod/publications/files/qpsr/1969/1969_10_2-3_036-041.pdf)

Jansson, E. V. (1977). “Acoustical properties of complex cavities and measurements of resonance properties of violin-shaped and guitar-shaped cavities”. *Acustica*, 37, pp.211–221.

Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., y Sanders, J. V. (2000). *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley y Sons, Inc., 4th Edition. ISBN 0-471-84789-5.

Knott, G. A., Shin, Y. S., y Chargin, M. (1989). "A modal analysis of the violin", *Journal Finite Elements in Analysis and Design- NASTRAN*, 5, pp.269–279.

Lindsay, R.B. (1966). "The story of acoustics". *J. Acoust. Soc.Am.*,39, pp. 629–644.

Marshall, K. D. (1985). "Modal analysis of a violin". *Journal of the Acoustical Society of America*, 77, pp.695–709.

Meyer, J. (1982). "Die abstimmung der grundresonanzen von gitarren". *Das Musikinstrument*, 23, pp.179–186. *Traduction of Journal of Guitar Acoustics*, 19(5).

Rao, S. S. (2007). *Vibration of continuous systems*. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc. ISBN-13 978-0-471-77171-5.

Rodríguez, S. E. (2010). *Planteamiento de una metodología de medida acústica en la bandola andina colombiana*. (Reporte interno). Universidad EAFIT. Medellín.

Rodríguez, S. E. (2010). *Caracterización acústica de la afinación y los modos normales de vibración en bandolas colombianas*. (Reporte interno). Universidad EAFIT. Medellín.

Rodríguez, S. E. (2012). *Numerical analysis of the modal coupling at low resonances in a colombian andean bandola in C using the finite element method*. (Tesis de pregrado). Ingeniería Física, Universidad EAFIT. Medellín.

Rodríguez, S. E., y Guarín, N. (2012). *FEM simulation of normal modes of vibration in a colombian andean bandola in C*. (Reporte interno Semilleros de Investigación). Universidad EAFIT. Medellín.

Rodríguez, S. E., y Guarín, N. (2013). "Finite Element Analysis of the Colombian Andean Bandola". (En preparación).

Ross, R. E., y Rossing, T. D. (1979). "Plate vibrations and resonances of classical and folk guitars". *Journal of the Acoustical Society of America*, 65, S72.

Rossing, T.D. (Ed.), (2007). "Chapter 2: A Brief History of Acoustics". En: *Rossing, T. D. (Ed.), Springer Handbook of Acoustics*. Springer. ISBN 978-0-387-30446-5.

Rossing, T.D. (2010). *The Science of string instruments*. Springer. ISBN 978-1-4419-7109-8

Rossing, T. D., Popp, J., y Polstein, D. (1985). "Acoustical response of guitars". En: *Proceedings SMAC83*, pp. 311 – 332. Stockholm: Royal Swedish Academy of music.

Ruiz-Boullosa, R. (1997). "Algunas Notas sobre la acústica de la guitarra clásica". *Revista Mexicana de Física*, 43(2), pp. 300-313.

Ruiz-Boullosa, R., Orduña-Bustamante, F., y Pérez-López, A. (1999). "Tuning characteristics, radiation efficiency and subjective quality of a set of classical guitars". *Applied Acoustics*, 56, pp.183-97.

Ruiz-Boullosa, R. (2002). "Vibration measurements in the classical guitar". *Applied Acoustics*, 62, pp.311-322.

Torres, J. A. (2006). *Modos de vibración simulados por computadora y experimentales de una tapa de guitarra en sus etapas de construcción*. (Tesis de maestría). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Torres, J. A., y Ruiz-Boullosa, R. (2008). "Identificación a simple vista de patrones de vibración de una tapa de guitarra". *Acústica*. Portugal: Universidad de Coimbra.

Williams, E. G. (1999). *Fourier acoustics: sound radiation and nearfield acoustical holography*. Access Online via Elsevier.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., y Zhu, J. Z. (2005). "Coupled Systems". En: *The Finite Element Method: Its basis and fundamentals*. Sixth Edition. Elsevier.