RICERCARE ISSN 2346-4879 | e-ISSN 2346-4747 | Núm. 16 (2023) | pp. 27-58 | DOI: 10.17230/ricercare.2023.16.2

SOBRE LA MATEMÁTICA DE LOS COMPASES MUSICALES Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA

ON THE MATHEMATICS OF MUSICAL MEASURES AND THEIR RELATION TO GEOMETRY

Josué Alexis Lugos Abarca*
josuealexis22@gmail.com

Fecha de recibido: 7 de febrero de 2023
Fecha de aprobación: 8 de mayo de 2023

* Centro Universitario de Música Fermatta

Resumen

Los compases musicales han sido de suma importancia durante toda la historia de la música, pues es gracias a esta herramienta que se escribe la música y que a través de ella se ejecuta y se divulga, no obstante, aquellos quienes estudian la música de manera formal entendemos los compases musicales como sólo una herramienta para escribir y representar la música, por tanto, dentro de este artículo se investigan los compases musicales desde otra perspectiva: mediante las matemáticas, se buscaran expresiones que sean capaces de describir los compases musicales y así hallar una nueva forma de estudiarlos, en segunda parte, como consecuencia, se construye un posible análogo al teorema de Pitágoras lo que nos da las bases para empezar a desarrollar parte de la geometría a partir del uso único de variables musicales como el tempo, el quebrado rítmico, el tiempo de una canción y del número de compases.

Palabras claves: Compases musicales, geometría, ecuaciones, figuras rítmicas, áreas de figuras geométricas.

Abstract

Musical measures have been of primary importance throughout the history of music because it is through to this tool that music is written, performed and disseminated. However, those who study music formally, understand musical measures as only a tool to write and represent music. Therefore, in this article we investigate the musical measures from another perspective: through mathematics, we will look for expressions that are able to describe the musical measures and thus find a new way to study them. In the second part of the article, as a result, a possible analogy to the Pythagorean theorem is constructed, which gives us the basis to begin to develop part of the geometry from the unique use of musical variables such as tempo, the rhythmic break, the time of a song and the number of measures.

Keywords: *Musical measures, geometry, equations, rhythmic figures, areas of geometric figures.*

Introducción

Desde su origen teórico la música ha estado asociada directamente con las matemáticas, donde el caso más conocido es sin lugar a duda el de Pitágoras con su sistema de afinación, la cual estaba muy influenciada por los números, él consideraba que ciertos números permitían sonidos consonantes y otros disonantes, igualmente, matemáticos de gran altura como Descartes, Leibniz e inclusive Euler hacían hincapié en que toda la música podría ser entendida en términos meramente matemáticos, además destacaban que la estructura musical era totalmente influenciada por un orden meramente matemático (Bertos, 2009), sin embargo, no sería hasta la mitad del siglo XX que se empezarían a retomar seriamente estos conceptos y sobre todo a surgir investigaciones de índole matemática-musical con el único propósito de que estos descubrimientos pudiesen ser aplicados directamente a la composición musical, es aquí donde la geometría toma un gran papel dentro de esta labor ya que los compositores y teóricos musicales emplearon dicha rama de la matemática para desarrollar herramientas creativas como los ejes axiales de Bartok, los *Coltrané s Changes* (Porter, De Vito, Wild, Fujioka & Schmaler, 2013), *Weber's Key Space* (Burgoyne & Saul, 2005), *Tonnetz* (Yust, 2019), *Cohn's Tonnetz* (Cohn, 1996), los trabajos de Jack Douthett y Peter Steinbach respecto a la armonía musical (Douthett & Steinbach, 1998), *Tonnetz* tridimensional de Edward Gollin (Callender, 2004) y *scale lattice* de Dmitri Tymocko (Tymoczko, 2006).

Así, poco a poco los compositores y teóricos musicales empezaron a encontrar dentro de la matemática una herramienta creativa que resultó ser práctica y eficiente al momento de crear progresiones armónicas y melodías. Aquí hay un patrón que resalta, y es el hecho de que todas estas investigaciones se enfocan en estudiar los términos de armonía y melodía usando como herramienta principal la geometría, respecto al ritmo, por supuesto que hay investigaciones, tales son por ejemplo, los ritmos euclidianos usados en forma de algoritmo para la creación de ritmos modernos (Toussaint, 2005) y una aplicación móvil que permite hacer ritmos por medio de la geometría (Holmes, 2015), aun así, queda en plena vista que el centro de mayor interés está puesto en la armonía, además, se añade otro hecho, y es que todos aquellos estudios jamás se han esforzado en encontrar una ecuación que describa los parámetros musicales, es decir, ecuaciones que busquen explicar dichos conceptos en términos matemáticos o físicos (Villaveces, 2017), el objetivo de estudio de las mencionadas investigaciones han sido meramente con fines de aumentar la creatividad de la composición musical buscando nuevos sonidos o metodologías de creación musical, es bajo esta razón que no es de extrañarse el uso de la geometría, pues es unas de las pocas ramas de las matemáticas que se pueden estudiar y comprender con sólo visualizar figuras geométricas sin la necesidad de recurrir al empleo de ecuaciones o fórmulas. Es bajo este contexto que surgen dos preguntas que construyen nuestra hipótesis: ¿Y si en lugar de enfocarnos en buscar nuevas formas de potenciar la creatividad musical, realmente buscamos ecuaciones que definan la música? ¿Encontraremos relación con la geometría de igual manera?

Por tanto, en base de ambas preguntas, en este artículo cambiaremos la línea de investigación que ya se ha trazado, nos centraremos en el objetivo de encontrar ecuaciones que describan los parámetros musicales, y no empezaremos directamente con la armonía o el ritmo, más bien estudiaremos en primer lugar otro concepto importante dentro de la música y que aparentemente ha sido ignorado, nos referimos al compás musical, que se definen como un espacio que se encuentra entre dos barras (Herrera, 2022) usados como una herramienta sólo para escribir música, de hecho, si consideramos esta definición se explica el por qué los compases musicales no han sido tema de investigación, pues en la tarea de buscar nuevas formas de creación musical en el contexto matemático resulta mínima la importancia de los compases musicales, ya que ellos sólo son el medio para preservar la música en el sentido de escritura, por ende, buscaremos la expresión matemática que describa esta herramienta musical, nos alejaremos de cualquier aplicación creativa y estudiaremos si tienen alguna relación con la geometría tal como se ha estado planteando en las últimas investigaciones de índole matemática y musical.

La justificación de estudiar los compases musicales se basa en que si queremos explicar toda la música en términos matemáticos tal como lo consideraba Descartes, Leibniz y Euler, debemos empezar con los compases debido a que esta herramienta se comporta como una base en donde se sustenta toda la información melódica, rítmica y armónica que contiene una pieza musical, de modo que al tener la música definida en un lenguaje matemático quizá la tarea de involucrar la armonía, melodía y el ritmo sea más fácil de desarrollar. Es importante tener en cuenta que solo nos referimos a uno de los tantos modelos empleados en la música para ser estudiada como matemática, pues mucha de la música que se desarrolló durante los siglos XX y XXI no requerían el uso de los compases para definir las alturas sonoras, un patrón rítmico, o un entramado armónico.

En orden de lograr el objetivo de definir matemáticamente los compases musicales nos enfocaremos y guiaremos en construir ecuaciones que nos permitan obtener el número de compases que se deben de escribir para que una canción dure un determinado tiempo en específico mediante el uso de otros parámetros musicales.

Compases musicales con un quebrado rítmico simple

Ahora presentaremos los parámetros musicales a utilizar dentro de esta investigación, que para fines de más congruencia a este contexto de ahora en adelante las llamaremos variables musicales, igualmente, señalaremos la notación que se le ha asignado a cada una de ellas. La duración de una canción, es decir, el tiempo, será designada con t, el *tempo* de la canción con T, los pulsos del quebrado rítmico con β, y el número de compases musicales serán representados con la letra μ_{mar}.

La deducción de una ecuación que calcule el número de compases musicales de una canción se basa en el siguiente razonamiento: Empezamos con el *tempo*, el cual es el número de pulsos que hay dentro de una canción por minuto, por tanto, el *tempo* al ser multiplicado por la duración total de una canción hace que el producto final de dicha operación nos dé como resultado los números totales de los pulsos dentro de una canción. Lo que se expresa como:

$$Tt \qquad (1)$$

En seguida, la ecuación 1 pasa a ser divida por el número de pulsos que hay por compás, es decir, los pulsos del quebrado rítmico, ello es para saber cuántas veces todos los pulsos de una canción se dividen por compás, de modo que la operación final nos da el número total de compases musicales, de ahí que los compases musicales se expresen con la siguiente ecuación:

$$\mu_{mar} = \frac{Tt}{\beta} \qquad (2)$$

La expresión 2 tiene dos propiedades de gran importancia, la primera es que sólo sirve para canciones cuyo *tempo* y quebrado rítmico son constantes, por ejemplo, canciones como: *As It Was* de Harry Styles o *Unintended* de *Muse* entran dentro de esta categoría.

En segundo lugar, esta fórmula sirve para quebrados rítmicos simples, entendiéndose como aquellos quebrados rítmicos cuyos tiempos son binarios y que la figura que representa el tiempo es una figura simple (Herrera, 2022).

Los pulsos pertenecientes a esta clase de quebrados rítmicos son:

$$\frac{2}{4} = 2\,\mathrm{b},\ \frac{3}{4} = 3\,\mathrm{b},\ \frac{4}{4} = 4\,b,\ \frac{5}{4} = 5\,b,\ \frac{6}{4} = 6\,b \qquad (3)$$

Conversión del tiempo

Un factor a considerar mientras se trabaja con la ecuación 2 es el tiempo, la razón de ello se debe a que claramente la manera en cómo se mide el tiempo es distinguible a cómo se cuentan los números y esto conflictúa con la ecuación 2, pues se obtienen resultados erróneos, de modo que debemos definir una conversión de tiempo, describamos la cuestión un poco más a detalle; si observamos en cualquier reproductor musical nos percatamos que el contador va de esta manera: 0:01, 0:02, 0:59 hasta 0:60, es decir, el contador llega hasta 0:59 y a partir de ahí se repite el mismo ciclo de medición, de modo que se entiende que 0:60 *s* = 1:00 *min,* a este sistema de medición se le conoce como sexagesimal (de Vicente Abad, 2011). Por otro lado, los decimales se cuentan así: 0.01, 0.59, 0.60, 0.88, hasta 0.99 y se reinicia la cuenta, bien, es aquí donde se nos presentan dos situaciones totalmente diferentes que se pueden comprender bajo la situación donde 0:60 *s* es el 100%, y la otra es donde 1:00 *min* es el 100%, por tanto, tenemos que asociar ambos conceptos mediante una conversión.

Consideremos el tiempo 0:30 *s*, al saber que 0:60 *s* equivale a un minuto podemos intuir de manera sencilla que 0:30 *s* es la mitad, eso nos permite aceptar el hecho de que 0:30 *s* = 0.5 y que 0:60 *s* = 1, ahora tenemos que buscar una operación que satisfaga esta característica, dicha operación sería multiplicar 1/6 por el decimal, debido que al operar de esta manera obtenemos los resultados que se adecuan a lo que se busca:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6},\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3},\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2},\\ &\frac{1}{6}\times 4=\frac{2}{3},\frac{1}{6}\times 5=\frac{5}{6},\frac{1}{6}\times 6=1 \end{aligned} \tag{4}$$

Véase que $\frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$ y que $\frac{1}{6} \times 6 = 1$, entonces, la condición que estábamos buscando se encuentra eficientemente en esta operación, a lo que si generalizamos ello llegamos a la expresión:

$$\frac{1}{6} D \tag{5}$$

Donde *D* son los decimales del tiempo que se ubican aquí:

$$\underbrace{2}_{\text{Entero}}:\underbrace{30}_{\text{Decimal}} \tag{6}$$

En el caso de que *D* fuera por ejemplo: $t = 2{:}35$, la manera en cómo se operarían los decimales sería así:

$$\frac{1}{6} \times 3.5 = \frac{7}{12} \tag{7}$$

Para finalizar la conversión, el entero perteneciente al tiempo pasa a sumarse de este modo:

$$2 + \left(\frac{1}{6} \times 3.5\right) = 2.583\ldots\ min \tag{8}$$

Al construirse la fórmula completa se concluye con:

$$t = E + \left(\frac{1}{6} D\right) \tag{9}$$

Donde *E* es el entero del tiempo señalado en 6.

De esa manera, cuando se solucione la ecuación 2 y sus ecuaciones derivadas tenemos primero que convertir el tiempo usando la expresión 9.

Compases musicales con un quebrado rítmico compuesto

Como habíamos establecido, la expresión 2 funciona eficientemente cuando se aplica a quebrados rítmicos simples, ahora, tenemos que desarrollar una fórmula que permita este cálculo pero con quebrados rítmicos compuestos, que se definen como aquellos compases cuyos tiempos son ternarios, es decir, divididos en tercios y que la figura que representa el tiempo es con puntillo (Herrera, 2022). Los pulsos para esta clase de quebrados rítmicos son:

$$\frac{3}{8}=3\ b,\ \frac{6}{8}=6\ b,\ \frac{9}{8}=9\ b,\frac{12}{8}=12\ b \qquad (10)$$

Si analizamos la subdivisión rítmica podemos darnos cuenta de que el quebrado rítmico compuesto es la mitad del quebrado rítmico simple, lo que nos hace intuir que la ecuación 2 sólo nos da la mitad de los compases musicales en la situación de un quebrado rítmico compuesto, entonces, la expresión para los compases compuestos se da como:

$$\mu_{mar}=2\frac{Tt}{\beta} \qquad (11)$$

Tiempo correspondiente a un quebrado rítmico variado

Hasta el momento tenemos dos ecuaciones que sirven para quebrados rítmicos simples y compuestos, a pesar de ello dichas expresiones funcionan únicamente para canciones con *tempo* y quebrado rítmico constante, y si bien es cierto que últimamente las canciones comerciales comparten esta característica no todas la canciones lo hacen, se sabe de antemano que en una canción durante el transcurso de ella el *tempo* y el quebrado rítmico pueden variar, por tanto, debemos construir ecuaciones que satisfagan estas condiciones.

Vamos a empezar estudiando la situación en donde el quebrado rítmico cambia, para ello vamos a introducir dos términos nuevos, el primero lo llamaremos quebrado rítmico establecido, el cual se refiere al quebrado principal de la canción, después está el quebrado rítmico variado, que hace mención del nuevo quebrado que se remplaza por el quebrado principal (establecido), por de pronto carece de importancia si el quebrado rítmico variado es simple o compuesto.

Con 12 calculamos el número total de pulsos que tiene el quebrado rítmico variado ya que es la multiplicación de los números de cambios del compás variado N_1 es decir, cuantos compases el quebrado rítmico variado permanece en la partitura, ello se multiplica por los pulsos del quebrado rítmico variado B_1, de ahí que:

$$N_1 B_1 \qquad (12)$$

Aun así, la ecuación resulta incompleta porque falta el parámetro temporal, el cual está dado con la relación:

$$\frac{1}{T} \qquad (13)$$

El producto de ambas expresiones nos permite obtener el tiempo que añade un quebrado rítmico variado a una canción, siendo:

$$t_0 = N_1 B_1 \frac{1}{T} \qquad (14)$$

Compases musicales con un quebrado rítmico variado

Junto a la expresión 14 llegamos a la formulación de 15, esta nos ayuda a obtener el número de compases que se deben escribir para una canción donde se encuentra sólo un quebrado rítmico variado, en otras palabras, si se empieza con $\frac{4}{4}$ siendo este el quebrado rítmico establecido y luego cambiamos a $\frac{3}{4}$ que es el quebrado rítmico variado y a partir de aquí ya no hay cambios de quebrado, este es nuestro contexto para la ecuación 15.

Por ende, como el quebrado rítmico variado amerita su propio tiempo de ejecución que así mismo afecta al tiempo perteneciente al quebrado rítmico establecido se tendrá que obtener la diferencia entre el tiempo del quebrado rítmico variado con el tiempo del quebrado rítmico establecido, esto nos va a dar como resultado el número de compases que satisfacen al quebrado rítmico establecido sin los números de cambios del quebrado rítmico variado, el cual pasa a ser sumado finalmente.

De ahí que:

$$\mu_{mar} = \frac{\mathrm{T}\left[t - \left(\frac{N_1 B_1}{T}\right)\right]}{\beta} + N_1 \qquad (15)$$

Compases musicales con múltiples quebrado rítmicos variados

El evento anterior es un acontecimiento muy poco recurrente, lo regular es que en una canción se varíe con diferentes quebrados rítmicos, o mejor dicho, cambiar al establecido para ir a uno variado con el fin de volver nuevamente al establecido, por ejemplo, empezar en $\frac{4}{4}$, luego cambiar a $\frac{2}{4}$ y por último regresar $\frac{4}{4}$.

En consecuencia, se remplaza en 15 las sumatorias totales de los resultados de la fórmula de los quebrados rítmicos variados 14 y los números de cambios de los quebrados rítmicos variados N_1. Entonces las sumatorias serían:

$$\gamma = \sum (t_{0\text{-}1}, t_{0\text{-}2} \ldots), \;\; \delta \sum (N_1, N_2 \ldots) \qquad (16)$$

Así se reconstruye 15 como:

$$\mu_{mar} = \frac{T\,[t - \Sigma(t_{0\text{-}1}, t_{0\text{-}2} \ldots)]}{\beta} + \Sigma(N_1, N_2, \ldots) \qquad (17)$$

Compases musicales con un *tempo* variado

Hasta el momento tenemos expresiones matemáticas para calcular el número de compases cuando únicamente tenemos quebrados rítmicos establecidos y variados que tienen un sólo *tempo*, que ahora denominaremos *tempo* establecido, claramente, debemos recalcar que existen piezas donde el *tempo* varía tal como los quebrados, a este *tempo* que remplaza al *tempo* establecido lo llamaremos *tempo* variado.

Partiendo de 14, la siguiente expresión nos ayuda a calcular el tiempo que genera el *tempo* variado, nótese que sólo cambiamos las variables de la ecuación 14 ya que 14 y 18 son ecuaciones equivalentes.

$$t_1 = (n\beta)\,\frac{1}{T_1} \tag{18}$$

Donde n es el número de quebrados rítmicos con un *tempo* variado y β sus respectivos pulsos. Por tanto, 18 toma el siguiente lugar en 2 de este modo:

$$\mu_{mar} = \left[\frac{T\left[t - (n\beta)\left(\frac{1}{T_1}\right)\right]}{\beta}\right] + n, \tag{19}$$

Compases musicales con múltiples tempos variados

La distinción de este evento al anterior es que en el primero sólo había un cambio de *tempo*, aquí hallamos diferentes cambios de *tempo* usando un quebrado rítmico simple o compuesto.

Para lograr el objetivo, se requiere calcular la sumatoria de t_1, que es referente al tiempo que genera el *tempo* variado 18 y el de n el cual es el número de quebrados rítmicos con un *tempo* variado.

$$\gamma = \Sigma(t_{1\text{-}1}, t_{1\text{-}2} \ldots),\ \delta = \Sigma(n_1, n_2 \ldots) \tag{20}$$

Entonces:

$$\mu_{mar} = \frac{T\left[t - \Sigma(t_{1\text{-}1}, t_{1\text{-}2}, \ldots)\right]}{\beta} + \Sigma(n_1, n_2, \ldots) \tag{21}$$

Compases musicales con tempos y quebrados rítmicos variados

A continuación presentamos 22, la cual es la fórmula que une las expresiones que hemos propuesto previamente, dicha expresión nos ayuda a saber cuántos compases debemos escribir para una canción que tenga: *tempos* variados, quebrados rítmicos variados, ya sea el quebrado rítmico establecido simple o compuesto.

Entonces tenemos:

$$\mu_{mar} = \left[\frac{T(t - \gamma)}{\beta}\right] + \delta \qquad (22)$$

Donde

$$\gamma = \Sigma(t_{0\text{-}1}, t_{0\text{-}2} \ldots)(t_{1\text{-}1}, t_{1\text{-}2} \ldots) \ \delta = \Sigma(N_1, N_2 \ldots)(n_1, n_2 \ldots) \qquad (23)$$

Con la ecuación 22 tenemos todos los posibles contextos que se pueden hallar en una canción, de ese modo, finalizamos con la exposición de estas expresiones matemáticas cuya función es determinar el número de compases musicales en una canción y que a su vez, describen los compases musicales en términos matemáticos.

Figuras rítmicas

Una de las consecuencias de la ecuación 2 es que si la despejamos para el tiempo obtenemos una ecuación que puede definir matemáticamente la duración de las figuras rítmicas σ en función de los pulsos de cada una de ellas en lugar de usar el pulso del quebrado rítmico.

$$\sigma = \frac{\beta\mu_{mar}}{T} \qquad (24)$$

Los pulsos pertenecientes a las figuras rítmicas los denotaremos con la letra γ, y que para cada figura le corresponden los siguientes pulsos, cabe mencionar que los siguientes valores son correctos en el caso de que el valor del denominador del compás es 4, ya que los valores de pulso son relativos con respecto a la unidad de compás que se esté utilizando y que está a su vez definida por el denominador de la cifra de compás.

Redonda

$$\gamma_4 = 4b \tag{25}$$

Blanca con tresillo

$$\gamma_3 = 3b \tag{26}$$

Blanca

$$\gamma_2 = 2b \tag{27}$$

Negra

$$\gamma_1 = 1b \tag{28}$$

Corchea

$$\gamma_5 = \frac{1}{2}b \tag{29}$$

Semicorchea

$$\gamma_6 = \frac{1}{4}b \tag{30}$$

Fusa

$$\gamma_7 = \frac{1}{6}b \tag{31}$$

Semifusa

$$\gamma_8 = \frac{1}{8}b \tag{32}$$

Silencio

$$\gamma_0 = 0b \tag{33}$$

Las ecuaciones 25, 26, 27, 28 y 33 se pueden generalizar con la siguiente sumatoria:

$$\sigma_{(\gamma)} = \sum_{\gamma=0}^{4} \frac{\mu_{mar}}{T} \gamma \qquad (34)$$

Donde $\gamma \in N$. Para satisfacer la corchea, semi corchea, fusa y semi fusa, escribimos:

$$\sigma_{(\gamma)} = \sum_{\gamma=2}^{8} \frac{\mu_{mar}}{T} \left(\frac{1}{\gamma}\right) \qquad (35)$$

En 35 cuando $\gamma = 3$ representa el tresillo de corchea, y al ser $\gamma = 5$ es el quintillo de corchea.

Para considerar el tresillo o quintillo de negra la expresión a operar debe ser:

$$\sigma_{(\gamma)} = \sum_{\gamma=2}^{8} \frac{\mu_{mar}}{T} \left(2\frac{1}{\gamma}\right) \qquad (36)$$

Con el objetivo de encontrar una ecuación que exprese las figuras rítmicas tomando en cuenta las propiedades de 35 y 36, proponemos la siguiente sumatoria:

$$\sigma_{(\gamma)} = \sum_{\gamma=0}^{4} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\mu_{mar}}{T} (\alpha\gamma) \qquad (37)$$

Donde $\alpha \in N$, $\gamma \in R$

El hecho de que $\gamma \in R$ ayuda a que las figuras 29, 30, 31 y 32 sean consideradas entre el intervalo de 0 a 1, no obstante, abre la oportunidad a otra clases de figuras cuyo valor pueden ser $\gamma = 2.3b$ o $\gamma = 3.6b$. Cabe señalar que las ecuaciones 34, 35, 36 y 37 para poder funcionar bajo el contexto de las figuras rítmicas se debe cumplir que $\mu_{mar} = 1$, debido que se desarrollan dentro de un sólo compás.

La relación de μ_{mar} con la geometría

A continuación vamos a estudiar si existe alguna relación geométrica con μ_{mar}, nos asistiremos del programa *GeoGebra* siguiendo la hipótesis de que si al graficar los resultados de la ecuación 2 para cualquier canción obtendremos propiedades geométricas que se relacionen con algunas de las variables musicales, siendo dichas variables *T*, β, *t* y μ_{mar} , esta hipótesis se fundamenta principalmente con los pensamientos de Descartes, Leibniz y Euler referentes a que la música puede ser expresada con términos matemáticos (Bertos, 2009). Cabe mencionar que estamos usando la ecuación 2 con el propósito de facilitar las operaciones, aunque se debe entender que esta hipótesis se extiende para las demás ecuación derivadas de μ_{mar} .

Primero resolvamos la canción "*And I Love Her – The Beatles*", donde tenemos los siguientes datos.

$$T = 112\ b \bullet min,\ \ \beta = 4b,\ \ t = 2{:}29\ min \rightarrow\ 2.483 \ldots\ min \qquad (38)$$

Al analizar musicalmente la canción nos damos cuenta de que las variables *T y* β se mantienen constantes, por tanto, al ecuación a emplear será 2. Resolviendo con los datos dados de 38 obtenemos:

$$\mu_{mar} = \frac{Tt}{\beta} = \frac{112b \cdot min}{4b} \text{ x } 2.5\ min = 70\ min^2 \qquad (39)$$

De modo que la canción "*And I Love Her*" tiene 70 compases, ahora si en lugar de calcular el número final de compases musicales evaluamos en intervalos de tiempo más pequeños y los insertamos en *GeoGebra* como puntos en el plano cartesiano, asignando los minutos a el eje *x* y los compases musicales al el eje *y* obtenemos:

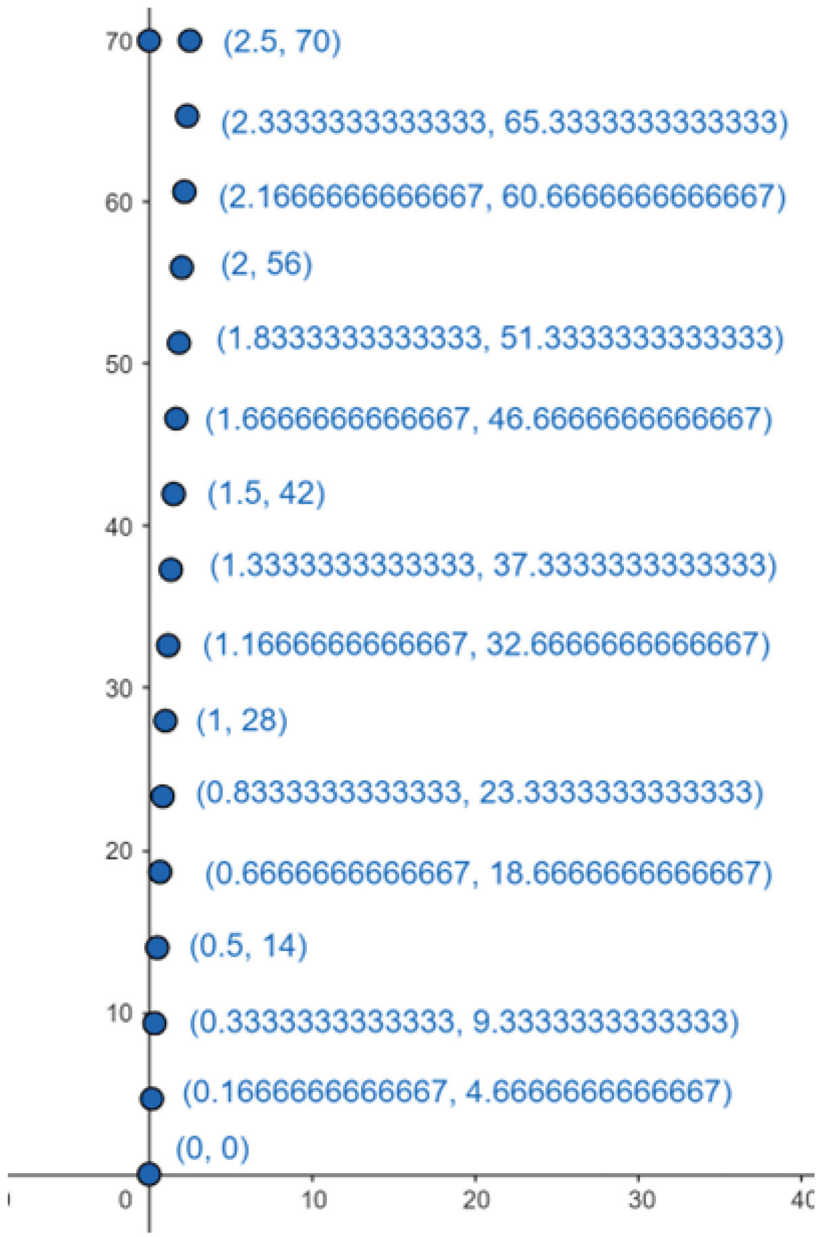

Figura 1. Puntos en el plano cartesiano de los resultados de 39

Al observar la figura 1 nos damos cuenta de que los puntos en el plano cartesiano (exceptuando el punto (0,70)) aparentemente obedecen a una trayectoria trazada por una recta, no es hasta el momento de colocar una recta entre los puntos que se confirma la recta.

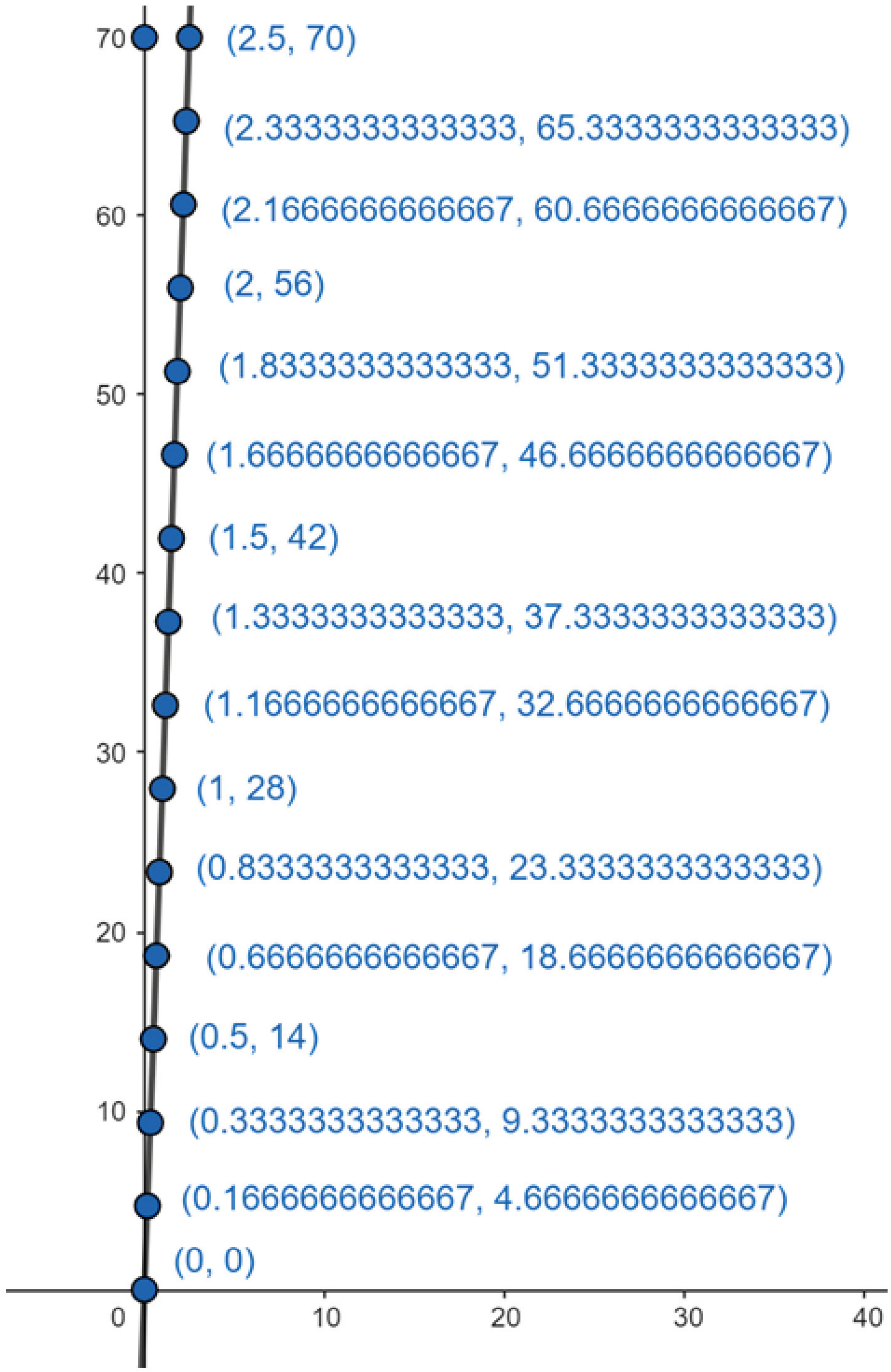

Figura 2. Puntos en el plano cartesiano con una recta tangente

Por otra parte, si pedimos a *GeoGebra* dibujar un polígono a través de todos los puntos en la figura 1 obtendremos aparentemente la forma de un triángulo rectángulo.

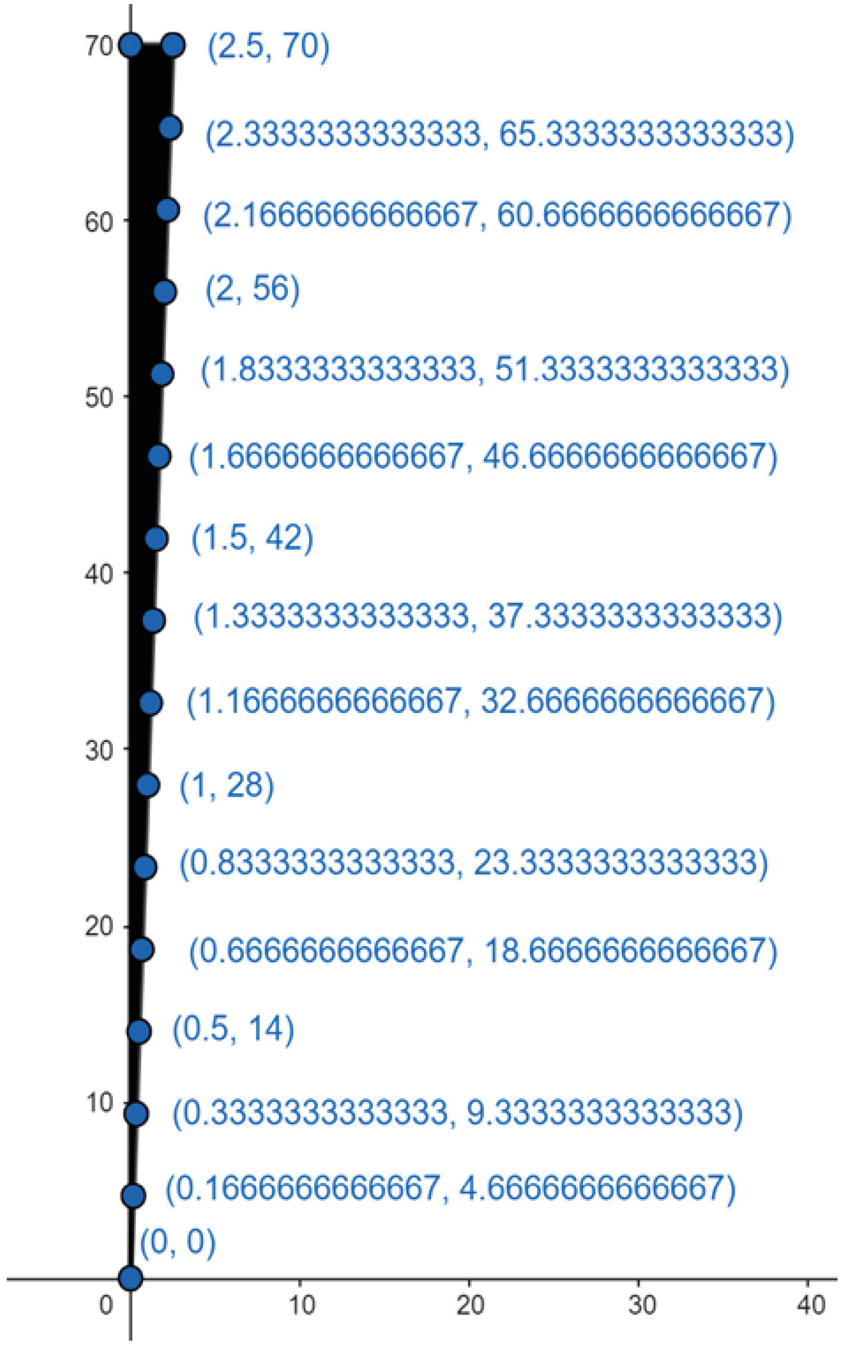

Figura 3. Polígono formado con los puntos en el plano cartesiano

La figura 3 hace que nuestra hipótesis pase a ser una conjetura que dicta que la relación entre los compases musicales de una canción en función de su respectivo tiempo forma un triángulo rectángulo en el plano cartesiano.

Por tal razón, a partir de aquí hay que demostrar que las propiedades del polígono de la figura 3 realmente pertenecen a las de un triángulo rectángulo, por ello presentaremos las características de esta figura y con ayuda del programa *GeoGebra* iremos corroborando cada una de ellas.

Propiedad No. 1: La hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los catetos (Coxeter, 1969).

$$c > a, \; c > b \qquad (40)$$

Sabiendo que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre el lado opuesto al ángulo recto (Coxeter, 1969), localizamos la hipotenusa aquí.

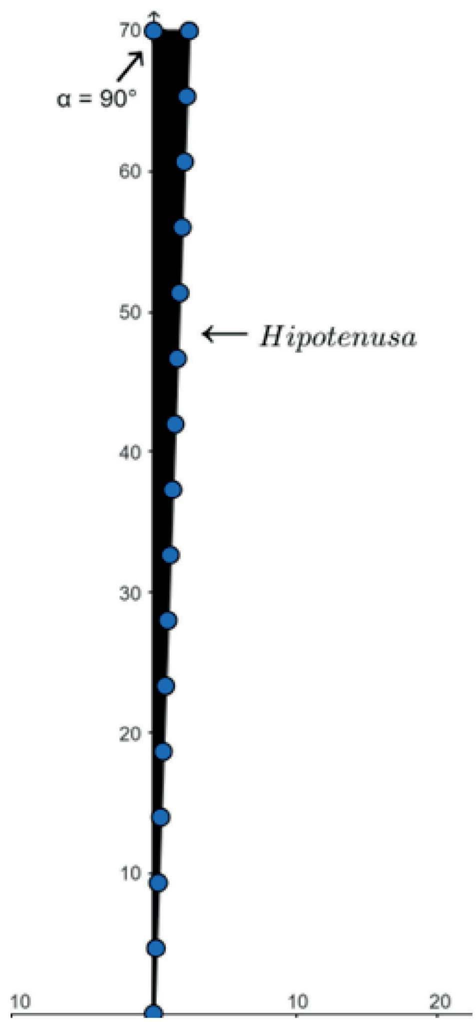

Figura 4. Ángulo recto y posible hipotenusa del polígono formado con los puntos en el plano cartesiano

Ahora, medimos la hipotenusa y los correspondientes catetos a y b con la calculadora de *GeoGebra*.

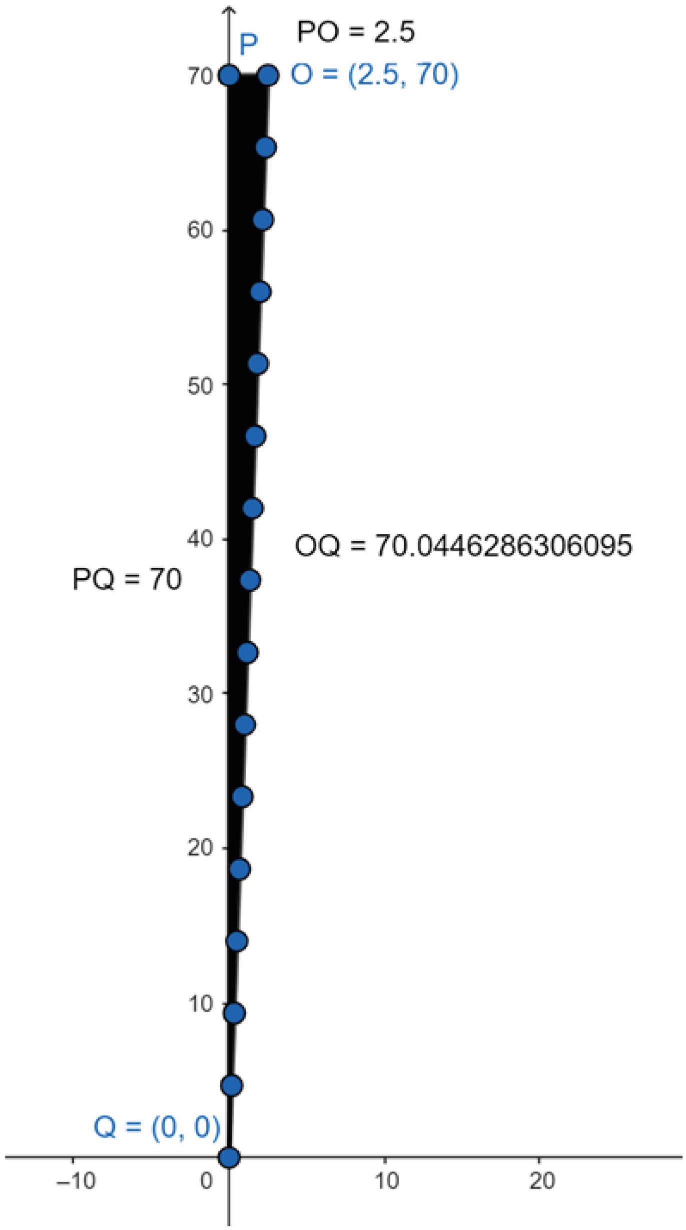

Figura 5. Distancias de los lados del polígono formado con los puntos en el plano cartesiano

Con lo visualizado en la figura 5 y siendo la distancia de los puntos *OQ* la medida de la hipotenusa, la distancia de los puntos *PO* la medida del cateto α y la distancia de los puntos *PQ* la medida del cateto *b*, se comprueba que se cumple la propiedad No.1 ■

Propiedad No. 2: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (Coxeter, 1969).

Considerando que el cateto α es *PO* y el cateto *b* es *PQ*, pasamos a operarlos bajo el teorema de Pitágoras.

$$c = \sqrt{PO^2 + PQ^2} = \sqrt{2.5^2 + 70^2} = \sqrt{6.25 + 4900} =$$

$$\sqrt{4906.25} = 70.0446286306095 \qquad \textbf{(41)}$$

Como el resultado de la hipotenusa en 41 es igual al de la figura 5, entonces se dice que la propiedad No.2 se cumple ■

Propiedad No. 3: Tiene dos ángulos agudos que son complementarios, es decir, que la suma de ambos es de 90 grados (Coxeter, 1969).

Primero, calculamos los ángulos en *GeoGebra*.

En la figura 6 podemos ver que los ángulos β y γ son agudos, es decir, miden menos de 90 grados, a continuación procedemos a sumarlos.

$$\beta + \gamma = 87.95459151^{o} + 2.045408489^{o} = 90^{o} \qquad \textbf{(42)}$$

Por tanto, la propiedad No.3 se cumple ■

Con estas tres propiedades satisfechas se es suficiente para demostrar que el polígono de la figura 3 es un triángulo rectángulo, los demás enunciados o teoremas surgen como corolarios (Coxeter, 1969). A continuación, vamos a formalizar esta relación geométrica con los compases musicales.

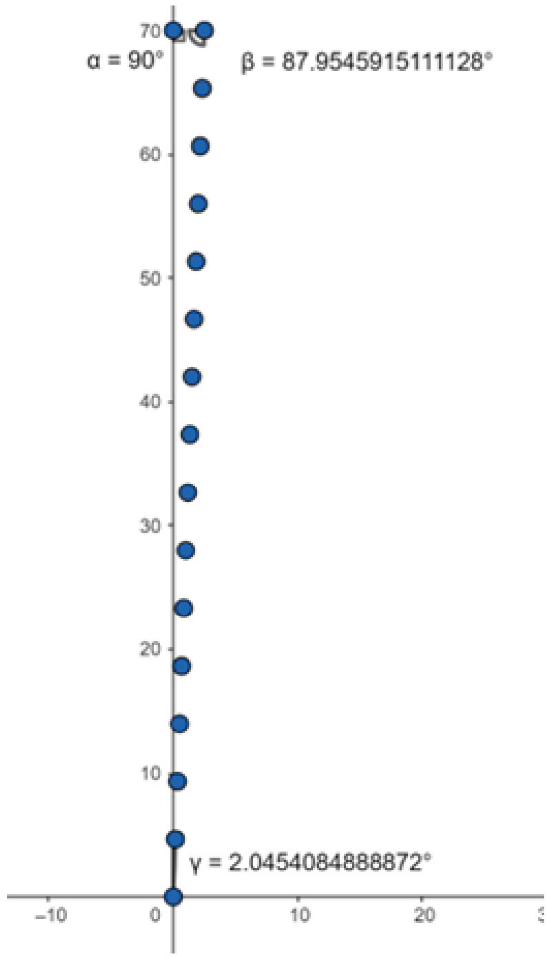

Figura 6. Medidas de los ángulos del polígono formado con los puntos en el plano cartesiano

Geometría con variables musicales

A partir de la figura 5 se establece que el cateto opuesto α equivale análogamente a la variable musical t y el cateto adyacente b es respectivamente μ_{mar}, respecto a la hipotenusa no tenemos un término musical con el cual asemejarlo, por ende, en esta investigación la consideraremos como un nuevo término musical-matemático que se denotará con la letra ψ_{mar}.

$a = t,\ b = \mu_{mar},\ c = \psi_{mar}$

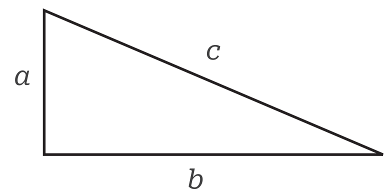

Figura 7. Triángulo rectángulo ubicando sus variables musicales

Partiendo de estas tres variables musicales podemos escribir un posible análogo al teorema de Pitágoras de esta manera:

$$\psi_{mar} = \sqrt{\mu_{mar}{}^{2} + t^{2}} \tag{43}$$

A continuación, basado en todo lo expuesto realizamos preposiciones que busquen asociar las variables musicales con las áreas de ciertas figuras geométricas en R^2.

Preposición No. 1

Sea un triángulo rectángulo ABC con sus respectivas variables musicales:

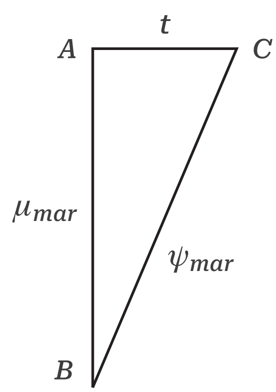

Figura 8. Triángulo rectángulo de la preposición No.1

Se determina que la pendiente de los puntos B y C, es decir, la pendiente de la hipotenusa se da con:

$$m_{BC} = \frac{\mu_{mar}}{t} \tag{44}$$

Así, partiendo de la pendiente m_{BC} se establece que el área del triángulo rectángulo se halla con la siguiente integral:

$$A_{(x)} = \frac{\mu_{mar}}{t} \int_0^t x \, dx \qquad (45)$$

Preposición No. 2

Tomemos el triángulo rectángulo de la preposición No.1 y rotémoslo 90 grados de modo que obtengamos:

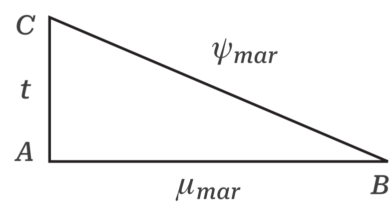

Figura 9. Triángulo rectángulo de la preposición No.2

Se establece que para este triángulo rectángulo la pendiente de la hipotenusa m_{BC} ahora es:

$$m_{BC} = \frac{t}{\mu_{mar}} \qquad (46)$$

Entonces, el área para tal triángulo rectángulo es:

$$A_{(x)} = \frac{t}{\mu_{mar}} \int_0^{\mu_{mar}} x \, dx \qquad (47)$$

Por tanto, si consideramos ciertas las preposiciones No.1 y No.2, se puede construir la siguiente identidad:

$$\frac{\mu_{mar}}{t} \int_0^t x dx = \frac{t}{\mu_{mar}} \int_0^{\mu_{mar}} x dx \qquad (48)$$

Preposición No. 3

La siguiente preposición es un análogo de las preposiciones No.1 y No.2 aplicada al rectángulo.

Donde siendo un rectángulo *ABCD* con sus variables musicales.

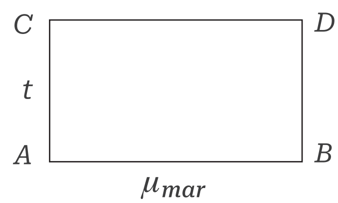

Figura 10. Rectángulo de la preposición No.3

Se determina que su área está dada con la siguiente integral:

$$A_{(x)} = \int_{0}^{\mu_{mar}} t\,dx \tag{49}$$

Y que al rotar 90 grados dicho rectángulo.

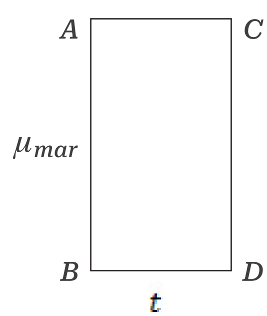

Figura 11. Rectángulo de la preposición No.3

En este contexto su área es:

$$A_{(x)} = \int_{0}^{t} \mu_{mar}\,dx \tag{50}$$

Por ende, formamos una segunda identidad como:

$$\int_{0}^{\mu_{mar}} t\,dx = \int_{0}^{t} \mu_{mar}\,dx \tag{51}$$

Preposición No. 4

Tomemos la ecuación 50, al realizar la siguiente operación al límite superior $\frac{t}{2}$ obtenemos el área de un triángulo rectángulo:

$$A_{(x)} = \int_{0}^{\frac{t}{2}} \mu_{mar}\, dx \tag{52}$$

De esa forma, la ecuación 50 que representa el área de un rectángulo pasa a definir el área de un triángulo rectángulo.

De ahí que:

$$\frac{\mu_{mar}}{t}\int_{0}^{t} x\, dx = \int_{0}^{\frac{t}{2}} \mu_{mar}\, dx \tag{53}$$

Preposición No. 5

Sea un cuadrado cuyo lado es una variable musical.

Figura 12. Cuadrado de la preposición No.5

Se determina que su respectiva área está dada con la siguiente integral:

$$A_{(x)} = \int_{0}^{t} 2x\, dx \tag{54}$$

Preposición No. 6

Dado un círculo cuyo radio es equivalente a una variable musical.

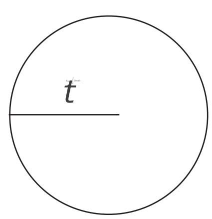

Figura 13. Círculo de la preposición No. 6

Se propone que su área está dada con:

$$A_{(x)} = \int_{0}^{t} 2\pi x \, dx \qquad (55)$$

Preposición No. 7

Sea una elipse cuyos semi ejes son variables musicales.

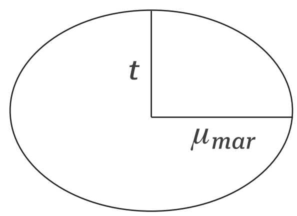

Figura 14. Elipse de la preposición No. 7

Su área está determinada por la siguiente integral:

$$A_{(x)} = \int_{0}^{t} \pi\mu_{mar} \, dx \qquad (56)$$

Preposición No. 8

Sean los ángulos de un triángulo rectángulo β y γ cuya ubicación es:

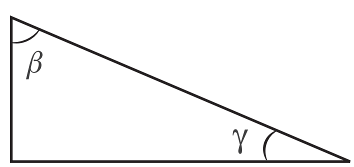

Figura 15. Triángulo rectángulo mostrando los ángulos β y γ

Se considera que el ángulo β se determina con:

$$\angle\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_{mar}}{t}\right) \qquad (57)$$

Respecto al ángulo γ este se deduce con:

$$\angle\gamma = 180 - (\angle\beta + 90^0) \tag{58}$$

E igualmente, se pueden construir expresiones análogas a las funciones trigonométricas con las variables musicales de esta manera:

$$\begin{aligned} &\sin\beta = \frac{\mu_{mar}}{\psi_{mar}},\ \cos\beta = \frac{t}{\psi_{mar}},\ \tan\beta = \frac{\mu_{mar}}{t} \\ &\sin\gamma = \frac{t}{\psi_{mar}},\ \cos\gamma = \frac{\mu_{mar}}{\psi_{mar}},\ \tan\gamma = \frac{t}{\mu_{mar}} \end{aligned} \tag{59}$$

Conclusión

Los resultados de esta investigación dejan en evidencia que es inevitable el hecho de no resaltar y tomar en cuenta las propiedades geométricas que la música tiene naturalmente, más allá de alguna aplicación creativa vemos que las ecuaciones surgen a partir de las variables musicales que describen tanto los compases musicales como la geometría, aunque nos hemos limitado únicamente a definir las áreas de ciertas figuras geométricas planas es probable que se pueda construir toda la geometría y trigonometría con el uso de dichas variables musicales, además, aunque los números de compases musicales varíen entre canciones resulta peculiar que ciertas estructuras simétricas se repitan, tal patrón podría contribuir a la tarea de ampliar el análisis de los compases dentro de la geometría musical, por ejemplo, considerar si el área de la ecuación 45 tiene algún significado en el campo musical y extender esta hipótesis al resto de los elementos geométricos de una figura. Por otro lado, en este artículo solamente nos enfocamos en los términos de escritura musical y el ritmo pero si en trabajos futuros se involucra la melodía a las ecuaciones propuestas, en consecuencia es posible que de acuerdo con la configuración de los contornos melódicos, figuras geométricas como la traslación, la rotación, la transformación, etc., permitirá que se puedan construir nuevas hipótesis relevantes para estudiar.

Por último, tenemos la ecuación 2 cuya consecuencia más importante es la de atribuir una unidad de medida a los compases musicales la cual es min^2, es decir, minutos al cuadrado, este hecho nos lleva a pensar en que los compases musicales van más allá de sólo ser una herramienta de escritura musical, quizá ellos puedan tener la capacidad de manifestar alguna propiedad física dentro de la música.

Es así como la idea de construir la geometría con variables musicales e indagar más en el significado de los compases musicales desde la perspectiva física y geométrica se abordará en futuros trabajos.

Bibliografía

Agustín, O. A. & Lluis, E. E. (2011, abril-junio). «Una invitación a la teoría matemática de la música. II. Armonía y contrapunto». *Ciencias*, 102, Distrito Federal, México (pp. 68-77).

And I Love Her - Remastered 2009 (2018): https://www.youtube.com/watch?v=5tc0gLSSU1M (Enero, 2023).

Bertos, M. (2009). «Música y Matemáticas». *Universidad de Granada*.

Burgoyne, J. A., & Saul, L. K. (2005, September). «Visualization of low dimensional structure in tonal pitch space». *Departmental Papers (CIS)*, 193, Barcelona, España (pp. 5-9).

Callender, C. (2004, September). «Continuous Transformations». *The Online Journal of the Society for Music Theory*, 10 (3).

Callender, C., Quinn, I., & Tymoczko, D. (2008, April). «Generalized voice-leading spaces». *Science*, 320 (5874), New York, N.Y. (pp. 346-348).

Cohn, R. (1996, March). «Maximally smooth cycles, hexatonic systems, and the analysis of late-romantic triadic progressions». *Music Analysis*, 15 (1), (pp. 9-40).

Cohn, R. (1998, Autumn). «Introduction to Neo-Riemannian theory: A survey and a historical perspective». *Journal of Music Theory*, 42 (2), (pp. 167-180).

Coxeter, H. (1969). Introduction to Geometry. Nashville, TN: John Wiley & Sons.

De Oteyza, E. (2005). Geometría analítica. México: Pearson Educacion.

De Vicente Abad, P. (2011). «La medida del tiempo». *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*, 1, (pp. 374-401).

Douthett, J., & Steinbach, P. (1998, September). «Parsimonious graphs: A study in parsimony, contextual transformations, and modes of limited transposition». *Journal of Music Theory*, 42 (2), (pp. 241-263).

Herrera, E. (2022). Teoría Musical y Armonía Moderna vol. 1. Barcelona: Antoni Bosch Editor.

Herzog, D. (2005). Trigonometry. Foster City, CA: Cliffs Notes.

Holmes, K. (2015). «Esta aplicación musical geométrica crea beats complejos de una forma sencilla»:https://www.vice.com/es/article/rnb77b/esta-aplicacion-musical-geometrica-crea-beats-complejos-de-una-forma-sencilla (Enero, 2023).

Mazzola, G., Mannone, M., & Pang, Y. (2018). Cool math for hot music: *A first introduction to mathematics for music theorists*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Porter, L., DeVito, C., Wild, D., Fujioka, Y., & Schmaler, W. (2013). The John Coltrane reference. London, England: Routledge.

SINC (2008). «Los científicos desvelan la geometría de la música»: https://www.agenciasinc.es/Noticias/Los-cientificos-desvelan-la-geometria-de-la-musica (Enero, 2023).

Sparks, F. & Rees, P. (1992). Trigonometría plana. México: Reverte.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012). Precálculo: Matemáticas Para El Cálculo. México: Cengage Learning Editores.

Toussaint, G. (2005, July). «The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms». *In Renaissance Banff: Mathematics, Music, Art, Culture* (pp. 47-56).

Tymoczko, D. (2006, July). «The geometry of musical chords». *Science*, 313 (5783), New York, N.Y. (pp. 72–74).

Tymoczko, D. (2011). A Geometry of Music. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Villaveces, A. (2017). Geometría de la música. *Un Camino Por Las Superficies Tonales*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Yust, J. (2019, January). «Geometric generalizations of the tonnetz and their relation to Fourier phases spaces». *Mathematical Music Theory*, Hackensack, NJ. (pp. 253–277).