

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y ALGEBRAICOS DE LA TEORÍA NEORIEMANNIANA Y *PITCH-CLASS SET*

GEOMETRIC AND ALGEBRAIC ASPECTS OF
NEO-RIEMANNIAN AND PITCH-CLASS SET
THEORY

Josué Alexis Lugos Abarca

josuealexis22@gmail.com

Centro Universitario de Música Fermatta

Recibido: 05/10/2023

Aceptado: 24/03/2024

Resumen

En este artículo, por medio del álgebra lineal, se propone un método matemático para representar y componer progresiones armónicas. Primero, en relación con los acordes y los conjuntos de notas, se retoman los conceptos matemáticos de la teoría neoriemanniana y *pitch-class set*, para obtener las respectivas ecuaciones. En segundo lugar, con la fórmula de la distancia entre dos puntos, se interpretan las notas como puntos en un plano cartesiano con sus vectores bidimensionales. En tercer lugar, estos sirven de base para construir polígonos a partir de los conjuntos *pitch-class set*. En cuarto lugar, similar a lo realizado con las notas, se definen los acordes triádicos como vectores tridimensionales y tetradimensionales (esto es, de cuatro variables: x , y , z y t) en los acordes con séptima. Por último, se introducen las transformaciones lineales como herramienta matemática para expresar y generar progresiones armónicas.

Palabras claves: Álgebra lineal, progresiones armónicas, teoría neoriemanniana, teoría *pitch class set*, transformaciones lineales.

Abstract

In this article, a mathematical method based on lineal algebra is proposed to represent and compose harmonic progressions. First, in relation to chords and sets of notes, the mathematical concepts of the Neo-Riemannian and Pitch-Class-Set Theory are leveraged to obtain the respective equations. Second, with the formula of the distance between two points, the notes are interpreted as points in a Cartesian plane with their two-dimensional vectors. Third, these points serve as a basis for constructing polygons from the pitch-class sets. Fourth, as with notes, the triadic chords are defined as three-dimensional and four-dimensional (i.e., with four variables: x , y , z and t) vectors in seventh chords. Finally, linear transformations are introduced as a mathematical tool to express and generate harmonic progressions.

Keywords: Harmonic progressions, linear algebra, linear transformations, Neo-Riemannian theory, pitch class set theory.

Introducción

La teoría *pitch-class set*, o de conjuntos de clases tónicas, es un lenguaje musical construido con el propósito de sistematizar el análisis atonal (Perle, 1972). Esta teoría busca, por medio del concepto de conjunto, analizar las relaciones interválicas entre las notas (Schuijjer, 2008). En esa medida, desde su origen, ese lenguaje guarda una relación directa con las matemáticas, concretamente, con la teoría de conjuntos (Suppes, 1972). De este modo, las notas musicales pasan a ser comprendidas como números y, así mismo, a ser trabajadas con el álgebra de conjuntos como, por ejemplo, la unión, la intersección, etcétera (Forte, 1974; Vázquez, 2006).

Por su parte, la teoría neoriemanniana, *grosso modo*, es un método de análisis armónico cromático propuesto por Hugo Riemann y desarrollado por los teóricos musicales Richard Cohn y David Lewin en los años 80 (Gollin & Rehding, 2014); uno de sus objetivos es estudiar la conducción de voces mediante el concepto de la transformación (Cohn, 1997; Tymoczko, 2012). Tanto la teoría neoriemanniana y la de conjuntos de clases tónicas han empleado la geometría como base matemática (Hoffman, 2008; Purwins *et al.*, 2007; Roeder, 1987; Tymoczko, 2006).

No obstante, el campo matemático aplicado a ambas teorías no se ha ampliado más allá del contexto anterior. Con ello en mente, en este artículo extendemos dichos conceptos al álgebra lineal, en particular a las transformaciones lineales, ya que con ellas se pueden describir con facilidad las progresiones armónicas, al igual que con vectores y matrices. Del mismo modo, con el desarrollo de esta investigación buscamos encontrar nuevos métodos para componer progresiones armónicas.

1. Preliminares

En primer lugar, vamos a presentar y a explicar los conceptos matemáticos de la teoría de conjuntos de clases tónicas y

de la neoriemanniana que se emplean en esta investigación, con el propósito de ilustrar cómo se ha tratado la armonía como objeto matemático.

1.1. Teoría de conjuntos de clases tónicas

Forma original: Se define como cualquier conjunto de notas cuyo cardinal $|\pi_0^o|$ no es mayor a seis notas, ni menor a tres notas.

$$\pi_0^o = (n_0, n_1, n_2 \dots n_5) \quad (1.1)$$

Donde n_i es cualquier nota musical, representada numéricamente según los valores establecidos en la teoría *pitch-class set* (Vázquez, 2006).

Forma ideal original: Hace referencia al conjunto de la forma original ordenada cuyos elementos tengan entre ellos la menor distancia interválica.

Para conocer la distancia entre dos notas, se emplea la siguiente fórmula (Vázquez, 2006):

$$\langle x, y \rangle = y - x = n_1 - n_0 \quad (1.2)$$

Encontrar la forma ideal original implica un proceso relativamente complejo; a continuación, proponemos una serie de pasos. Supongamos un conjunto de notas $\widetilde{\pi}_0^o$. Primero, se deben poner sus elementos con el siguiente orden de combinatoria (Grimaldi, 1998):

$$\widetilde{\pi}_0^o = (n_0, n_1, n_2), \quad \widetilde{\pi}_1^o = (n_1, n_2, n_0), \quad \widetilde{\pi}_2^o = (n_2, n_0, n_1) \quad (1.3)$$

Como se puede observar, este paso es simple; solo tenemos que recorrer nota por nota. Después, con la fórmula 1.2, operamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(n_1 - n_0) + (n_2 - n_1) &= d_0 \\ (n_2 - n_1) + (n_0 - n_2) &= d_1 \quad (1.4) \\ (n_0 - n_2) + (n_1 - n_0) &= d_2\end{aligned}$$

Donde d_i corresponde a la distancia interválica de cada conjunto. Algunas soluciones pueden ser números negativos; en ese caso, debe sumarse o restarse doce de acuerdo con el método *mod12* (Chapman, 1981). Por ende, para satisfacer esta condición interválica, construimos la siguiente función que será aplicada a las soluciones de 1.4:

$$\text{mod}12 = \begin{cases} \text{si } d_i \in \mathbb{N}^- \Rightarrow d_i + 12 \\ \text{si } d_i \in \mathbb{N}^+ / d_i < 12 \Rightarrow d_i + 0 \\ \text{si } d_i \in \mathbb{N}^+ / d_i > 12 \Rightarrow d_i - 12 \end{cases} \quad (1.5)$$

Veamos un ejemplo. Encontramos la forma ideal original del conjunto (4,7,11):

$$\begin{aligned}(7 - 4) + (11 - 7) &= 7 \\ (11 - 7) + (4 - 11) &= (-3 + 12) = 9 \\ (4 - 11) + (7 - 4) &= (-4 + 12) = 8 \quad (1.6)\end{aligned}$$

De este modo, el conjunto de la forma ideal original es (4,7,11) ya que su distancia es la menor.

Forma invertida de la forma ideal: Es el conjunto invertido del conjunto de la forma ideal original. Su fórmula es:

$$f_{(n)} = 12 - n_i \quad (1.7)$$

Retomemos ahora el conjunto (4,7,11) y encontremos su forma invertida.

$$(12 - 4), (12 - 7), (12 - 11) = (8, 5, 1) \quad (1.8)$$

Así, el conjunto de la forma invertida es:

$$(8, 5, 1) \quad (1.9)$$

La forma generalizada de la forma invertida de un conjunto es:

$$\#_0^0 = (\#_0, \#_1, \#_2 \dots \#_5) \quad (1.10)$$

Forma ideal invertida: Es el conjunto de la forma invertida de la forma ideal cuyos elementos tengan la menor distancia interválica. Para encontrarlo se aplica el mismo procedimiento visto en 1.6.

En este caso, el conjunto de la forma ideal invertida para el conjunto es:

$$\widetilde{\#}_0^0 = (1, 5, 8) \quad (1.11)$$

1.2. Teoría neoriemanniana

Respecto a la teoría neoriemanniana, nos interesa la representación matemática de las cualidades de los acordes tonales (Herrera, 2022), así como de sus transformaciones. Usando una variación de la notación utilizada por Cannas (2018), expresamos cada cualidad de acorde triádico (tabla 1) y tetrádico (tabla 2).

Acordes triádicos	Fórmula
Acorde mayor	$A^M = [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12)$
Acorde menor	$A^m = [(n_0 + 0) + (n_0 + 3) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12)$
Acorde disminuido	$A^D = [(n_0 + 0) + (n_0 + 3) + (n_0 + 6)](\text{mod } 12)$
Acorde aumentado	$A^A = [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 8)](\text{mod } 12)$
Acorde suspendido dos	$A^{s2} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 2) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12)$
Acorde suspendido cuatro	$A^{s4} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 5) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12)$

Tabla 1. Fórmulas para los acordes triádicos

Acordes tetrádicos	Fórmula
Acorde mayor con séptima mayor	$A_M^{\Delta 7} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 7) + (n_0 + 11)]$
Acorde de dominante siete	$A_{\square}^7 = [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 7) + (n_0 + 10)]$
Acorde mayor con séptima menor, bemol cinco	$A_{\square}^{7b5} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 6) + (n_0 + 10)]$
Acorde menor con séptima menor	$A_m^7 = [(n_0 + 0) + (n_0 + 3) + (n_0 + 7) + (n_0 + 10)]$
Acorde menor con séptima mayor	$A_m^{\pm 7} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 3) + (n_0 + 7) + (n_0 + 11)]$
Acorde semidisminuido siete	$A_{\square}^{\flat 7} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 3) + (n_0 + 6) + (n_0 + 10)]$

Acorde disminuido siete	$A_{\square}^{o7} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 3) + (n_0 + 6) + (n_0 + 9)]$
Acorde aumentado con séptima mayor	$A_{\square}^{A7} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 8) + (n_0 + 11)]$
Acorde aumentado con séptima menor	$A_{\square}^{A-7} = [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 8) + (n_0 + 10)]$

Tabla 2. Fórmulas para los acordes tetrádicos

En cuanto a las transformaciones *neo-riemannianas* (Gollin & Rehding, 2014; Hughes, 2021), utilizamos la notación de Tymoczko, la cual indica el movimiento interválico en la conducción de voces (Tymoczko, 2011):

$$\begin{aligned}
 R &= \xrightarrow{0, 0, +2}, & P &= \xrightarrow{0, -1, 0}, & L &= \xrightarrow{-1, 0, 0} \\
 S &= \xrightarrow{+1, 0, +1}, & N &= \xrightarrow{0, +1, +1}, & H &= \xrightarrow{-1, -1, +1} \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

Las transformaciones 1.13, en su forma inversa son (Fiore *et al.*, 2013):

$$\begin{aligned}
 R' &= \xrightarrow{0, 0, -2}, & P' &= \xrightarrow{0, +1, 0}, & L' &= \xrightarrow{+1, 0, 0} \\
 S' &= \xrightarrow{-1, 0, -1}, & N' &= \xrightarrow{0, -1, -1}, & H' &= \xrightarrow{+1, +1, -1} \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

De modo que, combinando ambas notaciones, obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 R &= [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12) \xrightarrow{0, 0, +2} \\
 P &= [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12) \xrightarrow{0, -1, 0} \\
 L &= [(n_0 + 0) + (n_0 + 4) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12) \xrightarrow{-1, 0, 0} \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo de solución. Tomemos el acorde mayor cuando $n_0=3$ y operemos las transformaciones R , P y L :

$$\begin{aligned} R &= [3 + 7 + 10](\text{mod } 12) \xrightarrow{0, 0, +2} [3 + 7 + 12] \\ P &= [3 + 7 + 10](\text{mod } 12) \xrightarrow{0, -1, 0} [3 + 6 + 10] \\ L &= [3 + 7 + 10](\text{mod } 12) \xrightarrow{-1, 0, 0} [2 + 7 + 10] \quad (1.15) \end{aligned}$$

2. El movimiento melódico como un vector

Ahora enfoquémonos en el procedimiento para calcular el conjunto de la forma ideal original en 1.2. Resulta peculiar que la forma de la ecuación \mathfrak{N}_j^i se parece bastante a la fórmula de la distancia entre dos puntos (De Oteyza, 2005), la cual es:

$$d^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.1)$$

Podemos reescribir la fórmula de la distancia interválica de 1.2, de esta manera:

$$d_0 = (n_1 - n_0) + (n_2 - n_1) \quad (2.2)$$

Al comparar 2.1 y 2.2, se nota aún más la similitud entre ambas expresiones, pues basta con elevar al cuadrado e incluir una raíz cuadrada en los términos $(n_1 - n_0)$ y $(n_2 - n_1)$ para obtener una ecuación análoga a 2.1:

$$d_0 = \sqrt{(n_1 - n_0)^2 + (n_2 - n_1)^2} \quad (2.3)$$

En consecuencia, cabe la interpretación de que en 2.3 las notas musicales n_i sean puntos en el plano cartesiano. Entonces, a partir del conjunto:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (n_0, n_1, n_2) \quad (2.4)$$

se podrían formar los siguientes puntos cartesianos (Coxeter, 1969):

$$\widetilde{\pi}_0^1 = (n_0, n_1), \quad \widetilde{\pi}_0^2 = (n_1, n_2) \quad (2.5)$$

De este modo, para el punto $\widetilde{\pi}_0^1$, las notas simbolizan: $n_0=x_1$, $n_1=y_1$; en cambio, para el punto $\widetilde{\pi}_0^2$ las notas representan: $n_1=x_2$, $n_2=y_2$.

La interpretación de que dos notas musicales sean puntos en el plano cartesiano coincide con el trabajo de Tymoczko (2011); la diferencia estriba en que Tymoczko emplea la notación musical anglosajona, mientras que, en este artículo, recurrimos a la representación numérica de la teoría *pitch-class set*. Esto permite utilizar valores reales en el plano cartesiano.

Si interpretamos el movimiento melódico (Assinnato & Musicco, 2013) de un conjunto de notas como uno cíclico, dicho movimiento se visualizaría de la siguiente forma:

$$n_0 \rightarrow n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow n_0 \quad (2.6)$$

Así, tendríamos tres puntos, en lugar de dos, los cuales son:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (n_0, n_1, n_2), \quad \widetilde{\pi}_0^1 = (n_0, n_1), \quad \widetilde{\pi}_0^2 = (n_1, n_2), \quad \widetilde{\pi}_0^3 = (n_2, n_0) \quad (2.7)$$

Una melodía puede ser representada mediante secuencias de vectores (Song *et al.*, 2002), pues cuenta con dirección, módulo y sentido. De modo que, aceptando dicha interpretación, podemos formar los siguientes vectores:

$$\vec{V}_a = \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2, \quad \vec{V}_b = \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3, \quad \vec{V}_c = \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1 \quad (2.8)$$

Donde $n_0=11$, $n_1=4$, $n_2=7$ para el conjunto y los puntos del conjunto 2.7. Los vectores 2.8 graficados con el *software* GeoGebra se visualizan de la siguiente forma (figura 1):

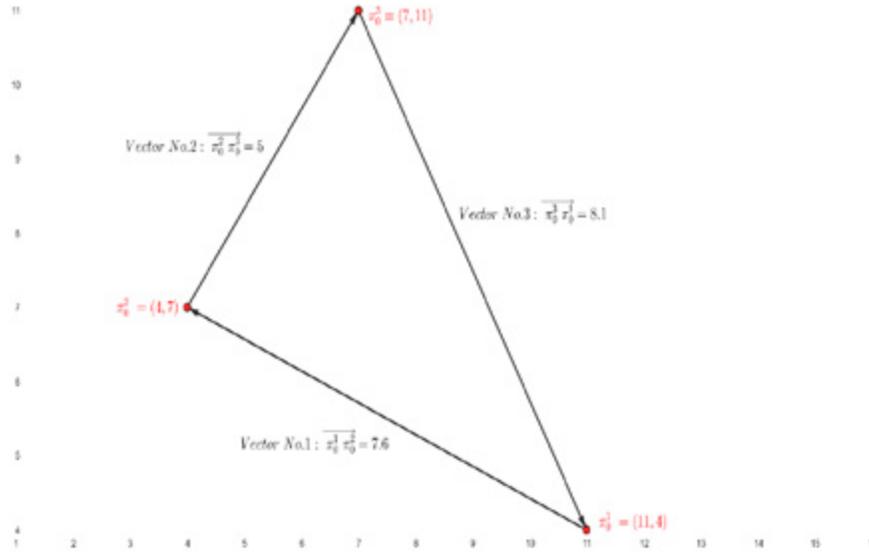


Figura 1. Vectores del conjunto 2.7

El concepto visto en las ecuaciones 2.7 y 2.8 puede extenderse al conjunto de la forma ideal invertida, como también al conjunto retrógrado de la forma ideal original $\overline{\pi_0^0}$ y al de la forma ideal invertida $\overline{\pi_0^0}$, respectivamente. Así, en total obtenemos:

(A) Puntos y vectores del conjunto de la forma ideal original:

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi_0^0} &= (n_0, n_1, n_2), & \widetilde{\pi_0^1} &= (n_0, n_1), & \widetilde{\pi_0^2} &= (n_1, n_2), & \widetilde{\pi_0^3} &= (n_2, n_0) \\ \vec{V}_a &= \widetilde{\pi_0^1} \widetilde{\pi_0^2}, & \vec{V}_b &= \widetilde{\pi_0^2} \widetilde{\pi_0^3}, & \vec{V}_c &= \widetilde{\pi_0^3} \widetilde{\pi_0^1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

(B) Puntos y vectores del conjunto retrógrado de la forma ideal original:

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{\pi_0^0}} &= (n_2, n_1, n_0), & \overline{\widetilde{\pi_0^1}} &= (n_2, n_1), & \overline{\widetilde{\pi_0^2}} &= (n_1, n_0), & \overline{\widetilde{\pi_0^3}} &= (n_0, n_2) \\ \vec{V}_d &= \overline{\widetilde{\pi_0^1}} \overline{\widetilde{\pi_0^2}}, & \vec{V}_e &= \overline{\widetilde{\pi_0^2}} \overline{\widetilde{\pi_0^3}}, & \vec{V}_f &= \overline{\widetilde{\pi_0^3}} \overline{\widetilde{\pi_0^1}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

(C) Puntos y vectores del conjunto de la forma ideal invertida:

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_0^0 &= (n_0, n_1, n_2), & \widetilde{\pi}_0^1 &= (n_0, n_1), & \widetilde{\pi}_0^2 &= (n_1, n_2), & \widetilde{\pi}_0^3 &= (n_2, n_0) \\ \vec{V}_g &= \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2, & \vec{V}_h &= \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3, & \vec{V}_l &= \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

(D) Puntos y vectores del conjunto retrógrado de la forma ideal invertida:

$$\begin{aligned} \widetilde{\square\pi}_0^0 &= (n_2, n_1, n_0), & \widetilde{\square\pi}_0^1 &= (n_2, n_1), & \widetilde{\square\pi}_0^2 &= (n_1, n_0), & \widetilde{\square\pi}_0^3 &= (n_0, n_2) \\ \vec{V}_j &= \widetilde{\square\pi}_0^1 \widetilde{\square\pi}_0^2, & \vec{V}_k &= \widetilde{\square\pi}_0^2 \widetilde{\square\pi}_0^3, & \vec{V}_l &= \widetilde{\square\pi}_0^3 \widetilde{\square\pi}_0^1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por lo tanto, la ecuación 2.3 describe la trayectoria del movimiento melódico J de un conjunto de notas musicales.

El cual se expresa del siguiente modo:

$$J = [(n_1 - n_0)^2 + (n_2 - n_1)^2] + [(n_2 - n_1)^2 + (n_0 - n_2)^2] + [(n_0 - n_2)^2 + (n_1 - n_0)^2] \tag{2.13}$$

3. Polígonos de la teoría *Pitch-Class Set*

Regresemos a la representación visual de la trayectoria J en la figura 1. Otra manera de estudiarla es trazando un polígono entre los puntos de las coordenadas, de modo que obtenemos (figura 2):

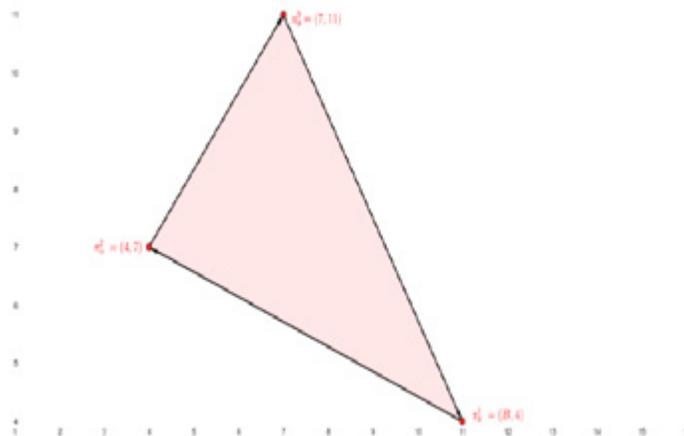


Figura 2. Polígono formado por los puntos del conjunto 2.7

De esta manera, ahora el análisis se centra en el polígono, en lugar de los vectores. A continuación, graficamos los otros puntos de los conjuntos: $\widetilde{\square}\pi_0^0$, $\widetilde{\pi}_0^0$ y $\widetilde{\square}\pi_0^0$, y obtenemos las siguientes figuras geométricas (figura 3):

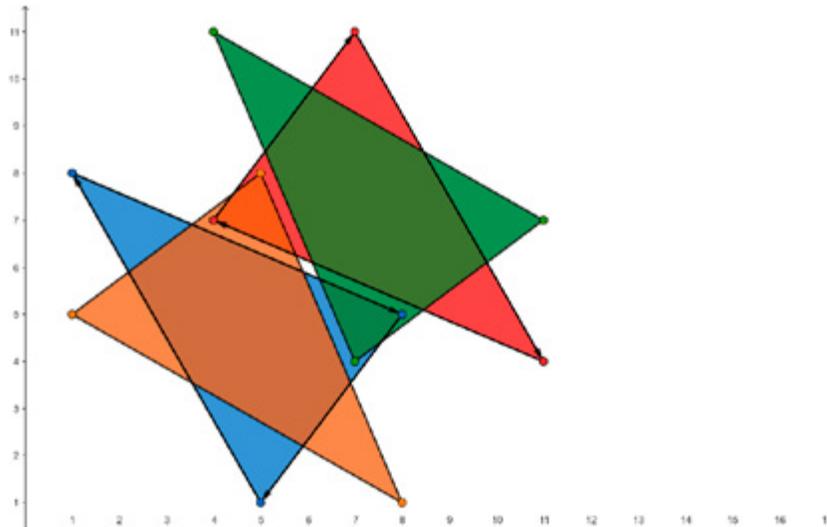


Figura 3. Polígonos formados por los puntos de los conjuntos $\widetilde{\pi}_0^0$, $\widetilde{\pi}_0^0$, $\widetilde{\square}\pi_0^0$ y $\widetilde{\square}\pi_0^0$

Claramente, se observa el patrón geométrico que se forma en las cuatro figuras, donde el polígono rojo está formado por los puntos del conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$, el azul por los del conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$, el verde por los del conjunto $\widetilde{\square}\pi_0^0$, y el naranja por los del conjunto $\widetilde{\square}\pi_0^0$, respectivamente.

Una de las propiedades que comparten estos polígonos es que, en los cuatro, se obtienen los mismos valores de áreas y ángulos (figura 4).

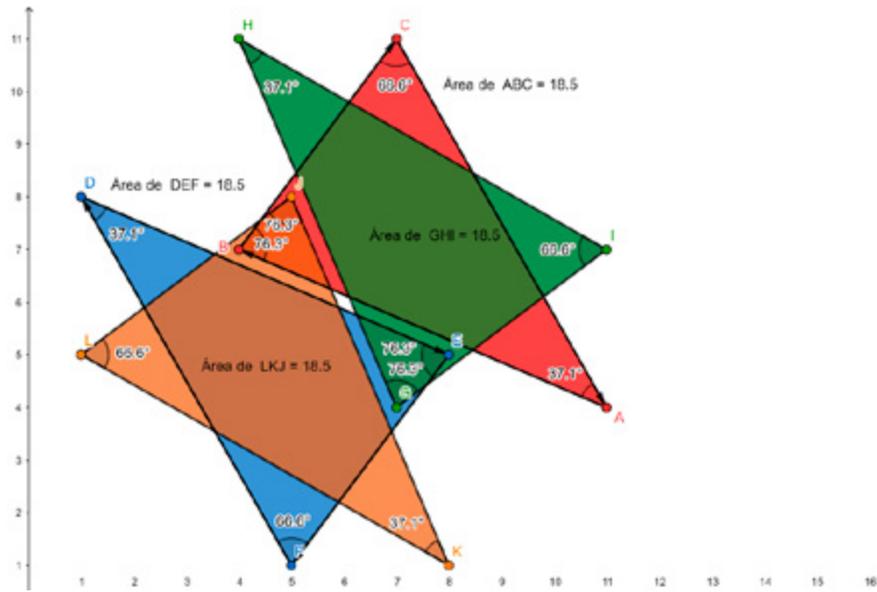


Figura 4. Áreas y ángulos de cada polígono

Por último, tomemos el polígono de la figura 3 y unamos los vértices fronterizos, para construir así un nuevo polígono (figura 5):

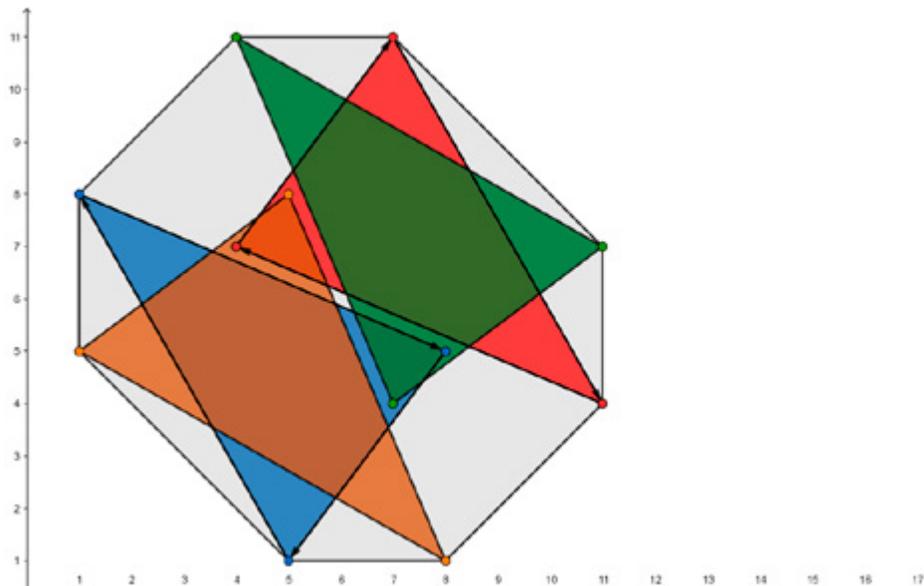


Figura 5. Polígonos formados por los puntos de los conjuntos $\widetilde{\pi}_0^0$, $\widetilde{\pi}_0^0$, $\widetilde{r}_1\pi_0^0$ y $\widetilde{r}_2\pi_0^0$ con sus vértices fronterizos unidos

Veamos los polígonos que se forman con los siguientes conjuntos:

(A) Puntos y vectores del conjunto de la forma ideal original:

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_0^0 &= (0, 5, 11), & \widetilde{\pi}_0^1 &= (0, 5), & \widetilde{\pi}_0^2 &= (5, 11), & \widetilde{\pi}_0^3 &= (11, 0) \\ \vec{V}_a &= \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2, & \vec{V}_b &= \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3, & \vec{V}_c &= \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1\end{aligned}\quad (3.1)$$

(B) Puntos y vectores del conjunto retrógrado de la forma ideal original:

$$\begin{aligned}\overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^0 &= (11, 5, 0), & \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^1 &= (11, 5), & \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^2 &= (5, 0), & \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^3 &= (0, 11) \\ \vec{V}_d &= \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^1 \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^2, & \vec{V}_e &= \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^2 \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^3, & \vec{V}_f &= \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^3 \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^1\end{aligned}\quad (3.2)$$

(C) Puntos y vectores del conjunto de la forma ideal invertida:

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_0^0 &= (12, 7, 1), & \widetilde{\pi}_0^1 &= (12, 7), & \widetilde{\pi}_0^2 &= (7, 1), & \widetilde{\pi}_0^3 &= (1, 12) \\ \vec{V}_g &= \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2, & \vec{V}_h &= \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3, & \vec{V}_i &= \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1\end{aligned}\quad (3.3)$$

(D) Puntos y vectores del conjunto retrógrado de la forma ideal invertida:

$$\begin{aligned}\overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^0 &= (1, 7, 12), & \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^1 &= (1, 7), & \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^2 &= (7, 12), & \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^3 &= (12, 1) \\ \vec{V}_j &= \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^1 \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^2, & \vec{V}_k &= \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^2 \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^3, & \vec{V}_l &= \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^3 \overset{r}{\square}\widetilde{\pi}_0^1\end{aligned}\quad (3.4)$$

Graficando los puntos de coordenada, obtenemos el siguiente resultado (figura 6):

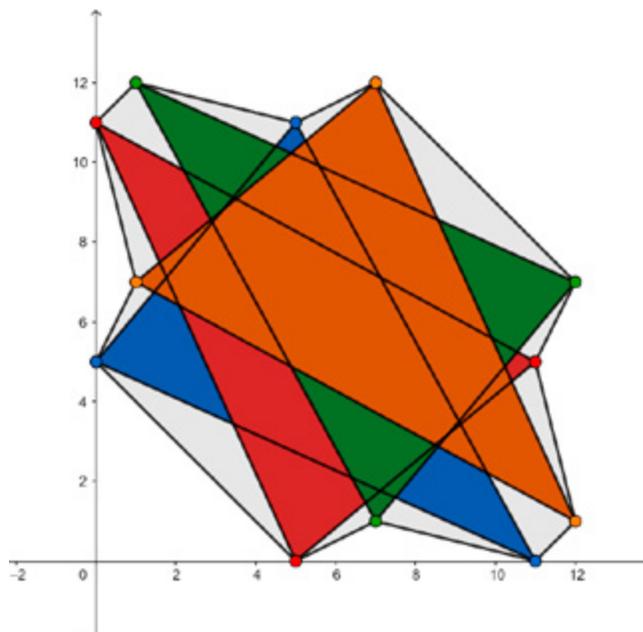


Figura 6. Polígonos formados por los puntos de los conjuntos 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4, con sus vértices fronterizos unidos

El Apéndice 1 del libro *Structure of Atonal Music* de Allen Forte (1974) presenta una lista de conjuntos. En el Anexo 1 al final del presente artículo se puede apreciar la visualización geométrica de los primeros doce conjuntos, los cuales presentan simetrías. Así mismo, el Anexo 2 incluye los polígonos que se forman para cada cualidad de los acordes.

El área de cada polígono se puede calcular con la siguiente fórmula (Física46, 2011):

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2] - [n_0n_2 + n_1n_0 + n_2n_1] \quad (3.5)$$

Esta fórmula funciona si y solo si $|\pi_0^0| = 3$.

A continuación, presentamos las fórmulas para calcular el área cuando los conjuntos tienen diferentes números cardinales.

Si $|\pi_0^0|=4$, entonces, se utiliza:

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2] - [n_0n_2 + n_1n_3 + n_2n_0 + n_3n_1] \quad (3.6)$$

Si $|\pi_0^0|=5$, entonces, se utiliza:

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2] - [n_0n_2 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_0 + n_4n_1] \quad (3.7)$$

Si $|\pi_0^0|=6$, entonces, se utiliza:

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 + (n_5)^2] - [n_0n_1 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_0 + n_5n_1] \quad (3.8)$$

Si $|\pi_0^0|=7$, entonces, se utiliza:

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 + (n_5)^2 + (n_6)^2] - [n_0n_1 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_6 + n_5n_1 + n_6n_1] \quad (3.9)$$

Si $|\pi_0^0|=8$, entonces, se utiliza:

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 + (n_5)^2 + (n_6)^2 + (n_7)^2] - [n_0n_1 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_6 + n_5n_7 + n_6n_0 + n_7n_1] \quad (3.10)$$

Para concluir esta sección, planteamos la siguiente conjetura descubierta en la investigación de la ecuación 3.5:

Sea π_0^0 el conjunto de la forma ideal original, tal que $|\pi_0^0| = 3$, y $\#_0^0$ el conjunto de la forma invertida de la forma ideal, tal que $|\#_0^0| = 3$. La suma de los elementos de π_0^0 y $\#_0^0$ es igual al producto de $|\pi_0^0| \bmod 12$.

$$(n_0 + n_1 + n_2) + (\#_0 + \#_1 + \#_2) = |\pi_0^0| \bmod 12 \quad (3.11)$$

Sean tres conjuntos $\pi_0^0 = (9, 2, 6)$, $\pi_1^0 = (4, 11, 0)$, $\pi_2^0 = (5, 1, 8)$, cuya forma ideal original es: $\widetilde{\pi}_0^0 = (2, 6, 9)$, $\widetilde{\pi}_1^0 = (11, 0, 4)$, $\widetilde{\pi}_2^0 = (1, 5, 8)$, y la forma invertida de la forma ideal de los tres conjuntos es: $\#_0^0 = (10, 6, 3)$, $\#_1^0 = (1, 12, 8)$, $\#_2^0 = (11, 7, 4)$.

Al aplicar la ecuación 3.11, obtenemos:

$$\begin{aligned} \{(2 + 6 + 9) + (10 + 6 + 3) = |\pi_0^0| \bmod 12\} &\rightarrow (3.12) \\ \{17 + 19 = 3 \times 12\} &\rightarrow \\ \{36 = 36\} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(11 + 0 + 4) + (1 + 12 + 8) = |\pi_0^0| \bmod 12\} &\rightarrow \\ \{15 + 21 = 3 \times 12\} &\rightarrow \\ \{36 = 36\} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(1 + 5 + 8) + (11 + 7 + 4) = |\pi_0^0| \bmod 12\} &\rightarrow \\ \{14 + 22 = 3 \times 12\} &\rightarrow \\ \{36 = 36\} & \end{aligned}$$

Si bien es cierto que estos resultados no pueden demostrar o refutar la conjetura propuesta en 3.11, dicho patrón

numérico anima, en futuros trabajos, a una investigación más profunda.

4. Sobre las transformaciones lineales y las progresiones armónicas

Una transformación lineal se define como una función relacionada con la multiplicación de matrices, la cual tiene la siguiente forma (Anton, 2010):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Donde $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es un vector; la matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ es la función, y $\begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix}$ es la fórmula para calcular el nuevo vector.

En términos algebraicos, los conceptos de *función* y *transformación* son similares; sin embargo, el segundo introduce la noción de movimiento (Kolman & Hill, 2006), el cual se percibe en la melodía, pero también en la progresión de acordes (Granja, 2021). En esta sección estudiaremos las progresiones armónicas mediante este concepto matemático. Para ello, tenemos que definir los acordes musicales como vectores.

Anteriormente se presentó la fórmula de un acorde menor, la cual es:

$$A^m = [(n_0 + 0) + (n_0 + 3) + (n_0 + 7)](\text{mod } 12) \quad (4.2)$$

Al resolver la ecuación 4.2, siendo $n_0=0$, la fórmula se simplifica:

$$A^m = [0 + 3 + 7](mod\ 12) \quad (4.3)$$

Generalizando esta notación, obtenemos la siguiente fórmula:

$$A^m = [n_0 + n_1 + n_2](mod\ 12) \quad (4.4)$$

Donde $n_0 = x$, $n_1 = y$ y $n_2 = z$. Ante esta nueva definición, el acorde de Do menor es:

$$A^m = (x + 3y + 7z) \quad (4.5)$$

De este modo, podemos expresar el acorde 4.3 como un vector en el espacio tridimensional (figura 7):

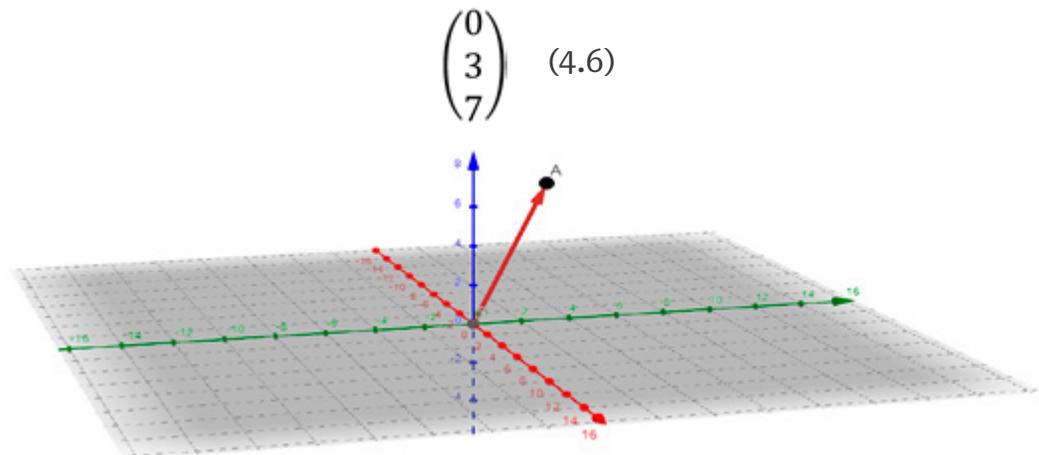


Figura 7. Vector 4.6 representado en tres dimensiones

Ahora, proponemos la siguiente transformación para el vector 4.6:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Que resolvemos con la fórmula 4.1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 \times 0) + (1 \times 3) + (1 \times 7) = (0 + 3 + 7) = 10 \\ (0 \times 0) + (1 \times 3) + (0 \times 7) = (0 + 3 + 0) = 3 \\ (0 \times 0) + (0 \times 3) + (1 \times 7) = (0 + 0 + 7) = 7 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Es decir, obtenemos el vector:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

El cual, en el lenguaje *pitch-class set*, se traduce en el acorde de Eb mayor. De este modo, la transformación lineal 4.7 representa la siguiente progresión armónica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

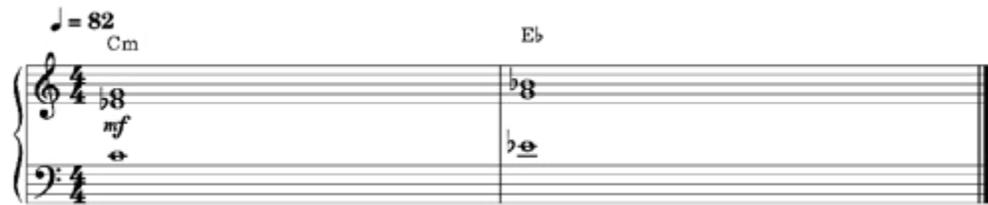


Figura 8. Progresión armónica de la transformación lineal 4.

De modo que la matriz 4.10 es la transformación de la teoría neoriemanniana, que va de Do menor a su relativa, Eb mayor. De esta forma, vamos componiendo una progresión armónica. Luego continuamos con el vector 4.9, para el cual proponemos la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Que resolvemos como se muestra a continuación:

(4.12)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{matrix} (0 \times 10) + (0 \times 3) + (2 \times 7) = (0 + 0 + 14) = 14 \\ (1 \times 10) + (0 \times 3) + (1 \times 7) = (10 + 0 + 7) = 17 \\ (0 \times 10) + (0 \times 3) + (1 \times 7) = (0 + 0 + 7) = 7 \end{matrix}$$

Como resultado, tenemos el vector:

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

No obstante, los números 14 y 17 no se adecúan al lenguaje *pitch-class set*. La solución es aplicar la función del método *mod 12*:

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \text{mod} 12 = \begin{pmatrix} 14 - 12 = 2 \\ 17 - 12 = 5 \\ 7 - 0 = 7 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Por ende, el vector final es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{mod} 12 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Que se traduce en un acorde de Sol siete omitiendo su tercera (Si), y complementa la progresión 4.10 de este modo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{mod} 12 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Figura 9. Progresión armónica de las transformaciones lineales 4.16

Sigamos la operación hasta lograr una progresión más grande. Ahora empleamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Para la siguiente solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} (1 \times 2) + (0 \times 5) + (0 \times 7) = (2 + 0 + 0) = 2 \\ (0 \times 2) + (1 \times 5) + (0 \times 7) = (0 + 5 + 0) = 5 \\ (1 \times 2) + (0 \times 5) + (1 \times 7) = (2 + 0 + 7) = 9 \end{array} \quad (4.18)$$

Con la que obtenemos un acorde de Re menor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Pasemos a una última transformación lineal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} (0 \times 2) + (0 \times 5) + (0 \times 9) = (0 + 0 + 0) = 0 \\ (-1 \times 2) + (0 \times 5) + (2 \times 9) = (-2 + 0 + 18) = 16 \\ (1 \times 2) + (1 \times 5) + (0 \times 9) = (2 + 5 + 0) = 7 \end{array} \quad (4.20a)$$

Debido al número 16, aplicamos el método *mod12*:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \text{mod}12 = \begin{pmatrix} 0 - 0 = 0 \\ 16 - 12 = 4 \\ 7 - 0 = 7 \end{pmatrix} \quad (4.20b)$$

De la ecuación 4.20b, obtenemos el acorde de Do mayor:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{mod}12 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Recapitulando todas las transformaciones lineales, la progresión completa se expresa con

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{mod}12 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{mod}12 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

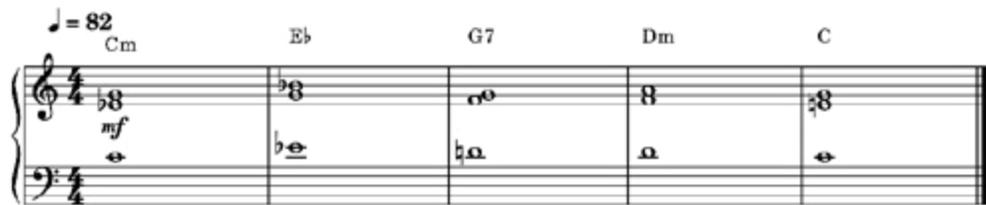


Figura 10. Progresión armónica de las transformaciones lineales 4.22

Estos son los vectores tridimensionales de cada acorde (figura 11):

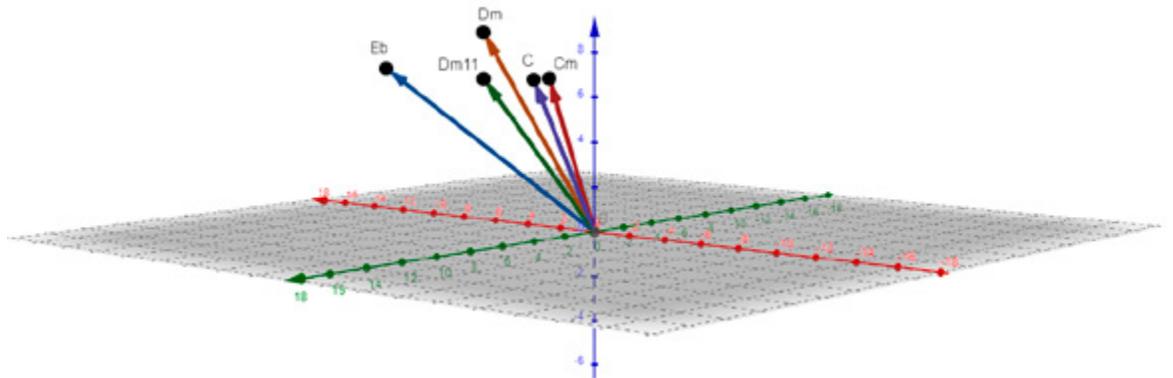


Figura 11. Vectores de los acordes en la progresión 4.22

Todas las matrices que hemos descrito representan las transformaciones neoriemannianas, las cuales pueden ser agrupadas en una sola, denominada matriz de composición de funciones (Anton, 2010); la cual, para la progresión 4.22 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Para corroborarlo, resolvamos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 \times 0) + (0 \times 3) + (0 \times 7) = (0 + 0 + 0) = 0 \\ (0 \times 0) + (0 \times 3) + (4 \times 7) = (0 + 0 + 28) = 28 \\ (0 \times 0) + (1 \times 3) + (4 \times 7) = (0 + 3 + 28) = 31 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Nuevamente, empleamos la función del método *mod12*:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 31 \end{pmatrix} \text{mod}12 = \begin{pmatrix} 0 - 0 = 0 \\ 28 - 12 = 16 \\ 31 - 12 = 19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix} \text{mod}12 = \begin{pmatrix} 0 - 0 = 0 \\ 16 - 12 = 4 \\ 19 - 12 = 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Por lo tanto, otra manera de escribir 4.22 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{mod}12 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Representando así la transformación P' de la teoría neoriemanniana, que va de Do menor a su paralelo, Do mayor.

Hemos visto que una transformación lineal es una función que toma un vector y regresa a otro vector más (Molina & Oktaç, 2007), el cual suele ser diferente. Debido a la adecuación matemática que el lenguaje *pitch-class set* ha introducido en la música, hemos relacionado dicho concepto con las progresiones armónicas. En consecuencia, tal acción requiere darle una nueva interpretación a este concepto, el cual es simple: a medida que una canción o una pieza musical avanzan, los acordes se van transformando en otros más, y así sucesivamente hasta llegar al acorde final.

Al introducir la matriz de composición de funciones MCF, sobresale aún más la noción del acorde inicial y final:

$$\begin{array}{c}
 \text{Método } \textit{mod} 12 \\
 \text{MCF} \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \textit{mod} 12 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Acorde inicial}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Acorde final}}
 \end{array} \right. \quad (4.27)
 \end{array}$$

De modo que en MCF se halla “compactado” el camino o los acordes que nos llevaron al acorde final.

En otras palabras, en la forma 4.27 observamos cuatro elementos: el acorde inicial, el acorde final, la MCF y el método *mod 12*. Ellos conforman una transformación lineal armónica. De acuerdo con el desarrollo realizado, sabemos que se trata de una progresión; sin embargo, ignoramos cuáles son los otros acordes que conforman dicha progresión.

Esto es válido si solo observamos la matriz 4.27, pues conocemos esos acordes. No obstante, esta premisa nos sirve de base para formular las siguientes preguntas:

- 1) Considerando la matriz de composición de funciones, ¿toda progresión armónica de una canción u obra musical se podría compactar dentro de una matriz?
- 2) ¿Toda matriz de composición de funciones tendrá la característica de contener progresiones armónicas?
- 3) Así mismo, en este contexto, ¿se puede tomar una matriz 3x3 y asignar números de manera aleatoria, para después descomponer dicha matriz y encontrar progresiones armónicas?

Es decir, seguir el procedimiento contrario al que empleamos en 4.22; por ejemplo, esta matriz aleatoria que funciona como MCF:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

¿Es posible que con un método matemático podamos encontrar las progresiones armónicas que yacen “compactadas” en esta matriz? De ser así, este sería un método de composición bastante interesante, pues bastaría con poner ciertos números en una matriz 3x3, y descomponerla, para descubrir sus progresiones armónicas.

Ejemplifiquemos ahora este método con las transformaciones lineales del *standard* de “All the things you are” (Rawlins, 2004).

22
(MED.) **ALL THE THINGS YOU ARE**
- JEROME KERN / OSCAR WAMMERSTEIN II

INTRO

HEAD

Chord progression (from top to bottom):
 D7#9, C7#9
 F-7, Bb-7, Eb7, Abmaj7
 D7maj7, G7, Cmaj7
 C-7, F-7, Bb7, Ebmaj7
 Abmaj7, A-7b5, D7, Gmaj7, E7#9
 A-7, D7, Gmaj7
 F#-7b5, B7, Emaj7, C7#5
 F-7, Bb-7, Eb7, Abmaj7
 D7maj7, G7(b9), C-7, Bb7
 Bb-7, Eb7, Abmaj7, (G-7b5 C7b9)

Copyright © 1933 UNIVERSAL - POLYGRAM INTERNATIONAL PUBLISHING, INC.
Copyright Renewed

Figura 11. *Standard* de “All the things you are”. Fuente: *The Real Book. Volume I. Sixth edition (C instruments)*.

Por esta ocasión, omitimos el *intro* del *standard*, comenzando en *head*.

Los vectores que representan los acordes de este *standard* tendrán cuatro variables, esto es, x, y, z y t , debido a que los acordes de séptima contienen cuatro notas (Herrera, 2022). En consecuencia, las matrices de transformación serán 4x4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{mod}12 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \text{mod}12 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{mod}12 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El último acorde es: $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,

lo que corresponde a $Fm7$, ya que estamos considerando la solución de la célula del compás 36.

A continuación, combinemos lo desarrollado en esta sección junto con las anteriores:

Si interpretamos los conjuntos 1.6 y 1.11 como acordes en lugar de melodías, descubrimos que $\widetilde{\pi}_0^0 = (4, 7, 11)$ representa el acorde de Mi menor, y el conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (1, 5, 8)$ el acorde de Do sostenido mayor. Reinterpretemos los puntos y vectores para ambos conjuntos, incluyendo sus retrógrados, a la luz de lo analizado en esta sección:

(A) Puntos del conjunto de la forma ideal original:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (11, 4, 7), \quad \widetilde{\pi}_0^1 = (11, 4), \quad \widetilde{\pi}_0^2 = (4, 7), \quad \widetilde{\pi}_0^3 = (7, 11) \tag{4.30}$$

(A.1) Cuyos vectores son:

$$\vec{V}_a = \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_b = \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_c = \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

(A.2) Sus transformaciones lineales son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

(B) Puntos del conjunto retrógrado de la forma ideal original:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (7, 4, 11), \quad \widetilde{\pi}_0^1 = (7, 4), \quad \widetilde{\pi}_0^2 = (4, 11), \quad \widetilde{\pi}_0^3 = (11, 7) \tag{4.33}$$

(B.1) Cuyos vectores son:

$$\vec{V}_d = \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^1} \\ \widetilde{r\pi_0^2} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_e = \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^2} \\ \widetilde{r\pi_0^3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_f = \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^3} \\ \widetilde{r\pi_0^1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

(B.2) Sus transformaciones lineales son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

(C) Puntos del conjunto de la forma ideal invertida:

$$\widetilde{\pi_0^0} = (1, 8, 5), \quad \widetilde{\pi_0^1} = (1, 8), \quad \widetilde{\pi_0^2} = (8, 5), \quad \widetilde{\pi_0^3} = (5, 1) \quad (4.36)$$

(C.1) Cuyos vectores son:

$$\vec{V}_g = \begin{matrix} \widetilde{\pi_0^1} \\ \widetilde{\pi_0^2} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_h = \begin{matrix} \widetilde{\pi_0^2} \\ \widetilde{\pi_0^3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_i = \begin{matrix} \widetilde{\pi_0^3} \\ \widetilde{\pi_0^1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

(C.2) Sus transformaciones lineales son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

(D) Puntos del conjunto retrógrado de la forma ideal invertida:

$$\begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^0} \\ \widetilde{r\pi_0^1} \end{matrix} = (5, 8, 1), \quad \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^1} \\ \widetilde{r\pi_0^2} \end{matrix} = (5, 8), \quad \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^2} \\ \widetilde{r\pi_0^3} \end{matrix} = (8, 1), \quad \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^3} \\ \widetilde{r\pi_0^1} \end{matrix} = (1, 5) \quad (4.39)$$

(D.1) Cuyos vectores son:

$$\vec{V}_j = \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^1} \\ \widetilde{r\pi_0^2} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_k = \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^2} \\ \widetilde{r\pi_0^3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_l = \begin{matrix} \widetilde{r\pi_0^3} \\ \widetilde{r\pi_0^1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

(D.2) Sus transformaciones lineales son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

En la figura 12 se puede apreciar la representación visual de los vectores de cada conjunto con sus respectivos polígonos:

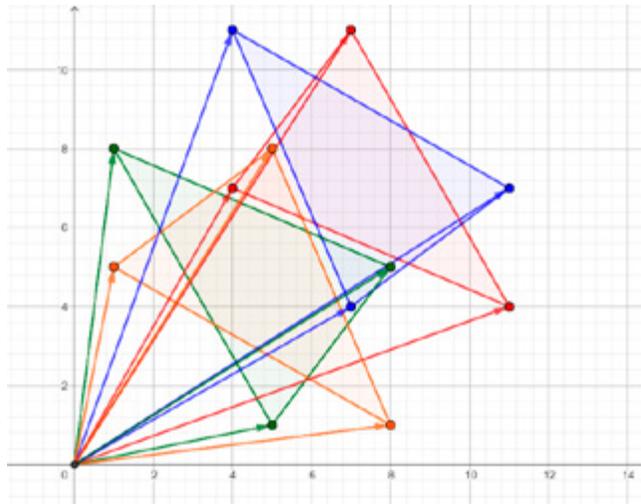


Figura 12. Puntos, vectores y polígonos de los conjuntos 4.30, 4.33, 4.36 y 4.39

En la música, las matrices 4.32, 4.35, 4.38 y 4.41 expresan sucesiones de intervalos armónicos (Herrera, 2022), los cuales son:



Figura 13. Intervalos armónicos de las matrices 4.32



Figura 14. Intervalos armónicos de las matrices 4.35

A partir de la figura 17, similar al trabajo de Tymoczko (2012), se generaliza el *tonnetz* con la notación que vimos en la sección 1. De este modo, con el siguiente diagrama, derivado del *tonnetz*, es posible representar la armonización de cualquier escala mayor, con excepción de la de séptimo grado:

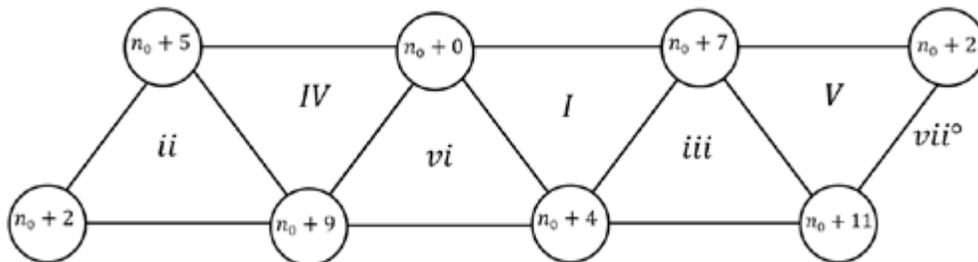


Figura 18. Armonización de una escala mayor, generalizada en el *tonnetz*

Esto se puede replicar en los demás modos o escalas. No obstante, el centro de interés de esta investigación estriba en los acordes; por consiguiente, ignoramos las escalas y presentamos las generalizaciones de algunas cualidades de los acordes.

Acordes mayor y menor, respectivamente (figura 19):

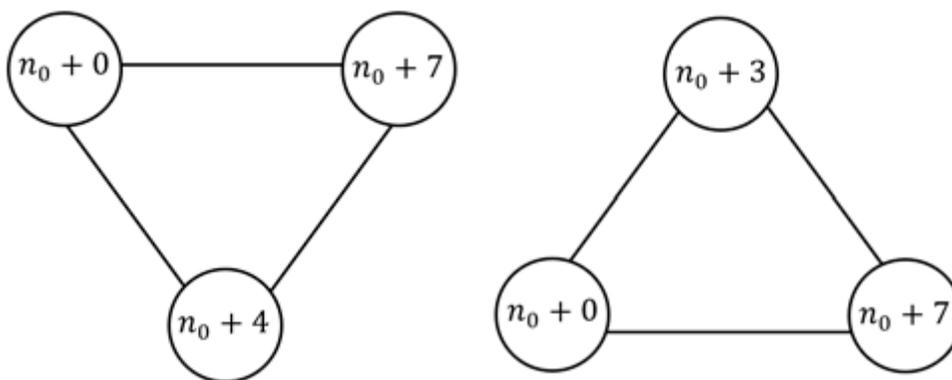


Figura 19. Acordes mayores y menores generalizados en el *tonnetz*

Acorde aumentado y disminuido, respectivamente (figura 20):

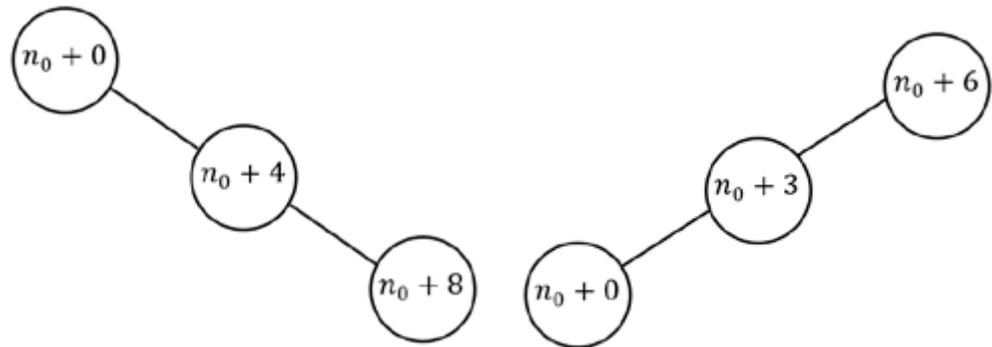


Figura 20. Acordes aumentados y disminuidos generalizados en el tonnetz

Acorde mayor con séptima mayor y acorde menor con séptima menor, respectivamente (figura 21):

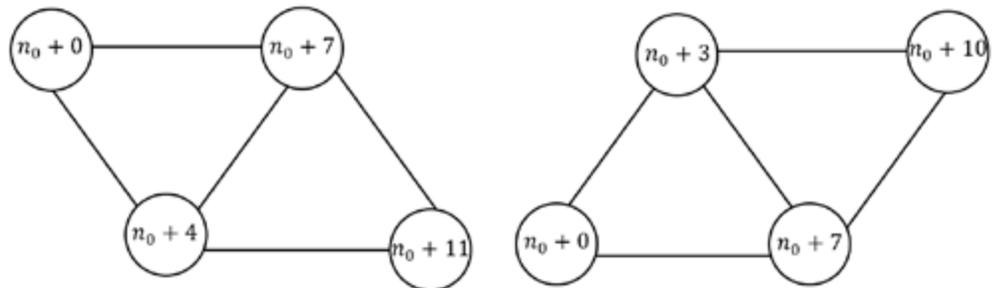


Figura 21. Acordes mayores con séptima mayor y menores con séptima menor generalizados en el tonnetz

Acorde dominante siete (figura 22):

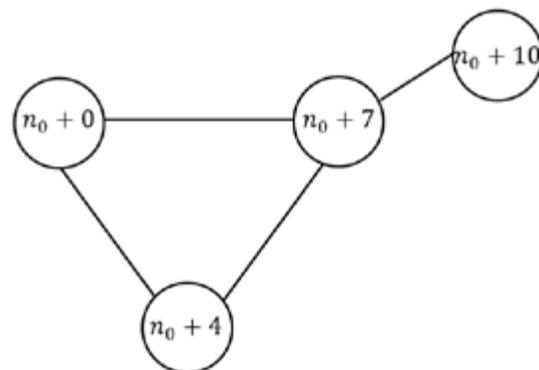


Figura 22. Acorde dominante siete generalizado en el tonnetz

Así mismo, con estas generalizaciones se pueden representar las transformaciones neoriemannianas de la siguiente forma (figura 23):

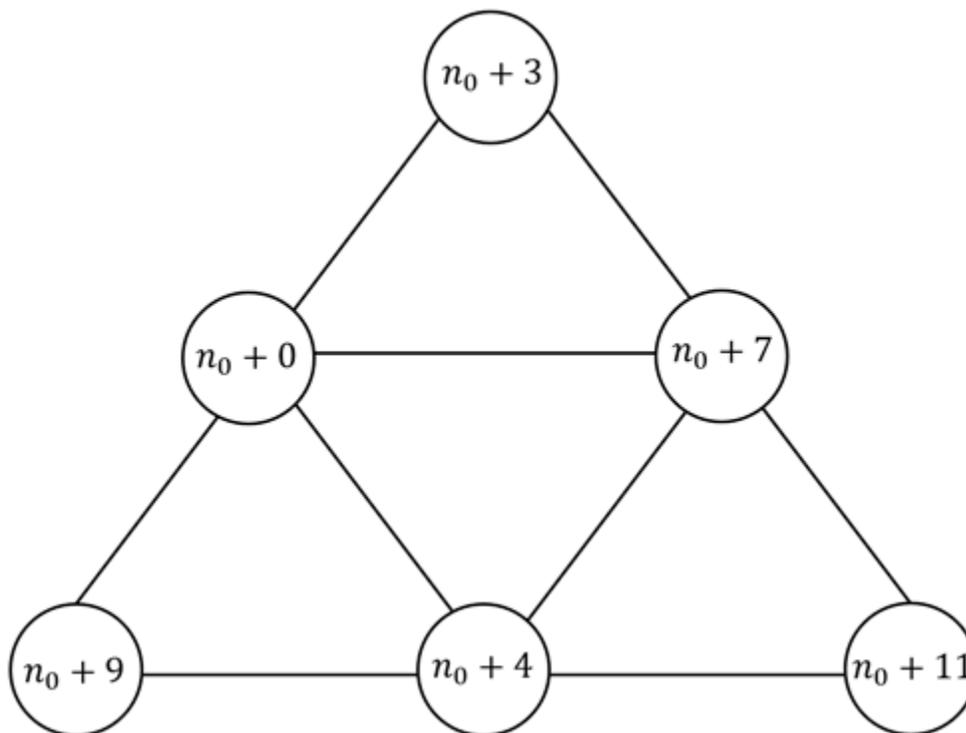


Figura 23. Transformaciones neo-riemannianas generalizadas en el tonnetz

Las transformaciones neoriemannianas de la figura 23 se introducen por medio de funciones. Por ejemplo, para la transformación $P \circ P'$ se requiere la acción de dos operaciones: $(n_0 + 4) - 1$ o $(n_0 + 3) + 1$, respectivamente, mientras que las demás notas pertenecientes al acorde mantienen sus valores, tal como lo observamos en 1.12 y 1.13. Esto lo podemos expresar con las siguientes funciones:

$$P_{(n_0)} = (n_0 + 4) - 1, \quad P'_{(n_0)} = (n_0 + 3) + 1 \quad (5.1)$$

Ahora, con base en la figura 23, la transformación $P_{(n_0)}$ se representa visualmente así (figura 24):

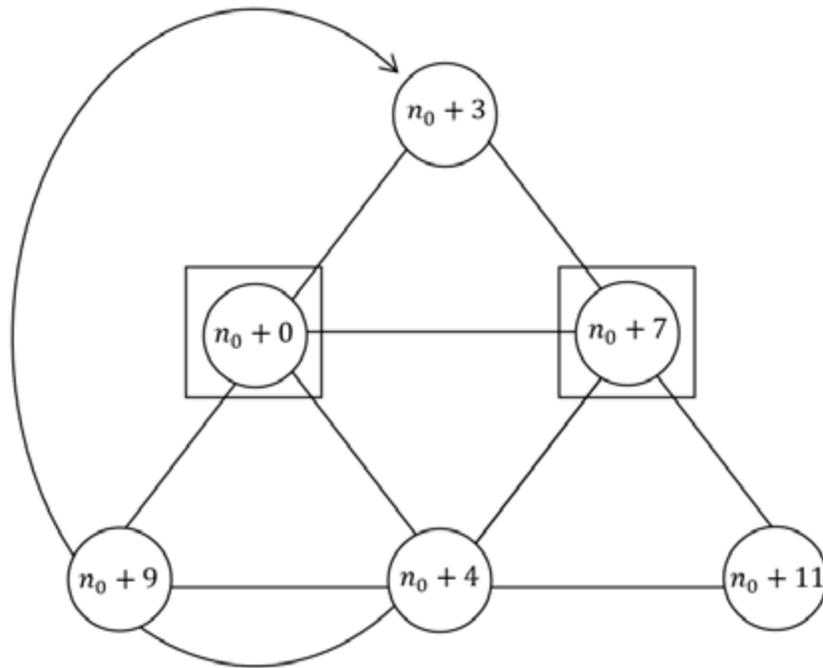


Figura 24. Transformaciones generalizadas en el tonnetz

Los cuadrados significan que las notas no sufren cambios en sus valores, valga decir, se mantienen invariantes. La transformación $P'_{(n_0)}$, visualmente es (figura 25):

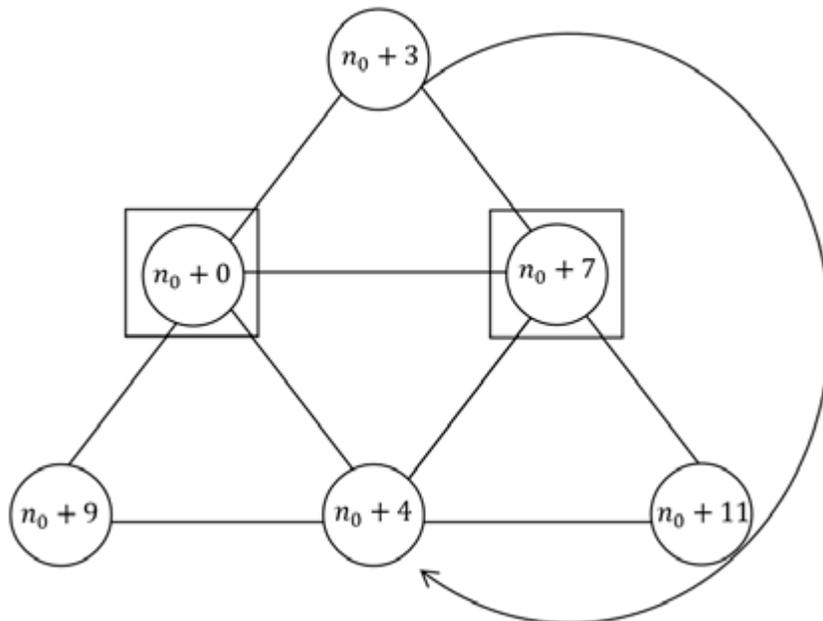


Figura 25. Transformaciones $P'_{(n_0)}$ generalizadas en el tonnetz

Y así sucesivamente con las demás transformaciones. A esta metodología de representación la denominaremos funciones visuales neoriemannianas.

Al observar la MCF de la progresión 4.27, resulta interesante que el acorde inicial es Do menor, mientras que el final es Do mayor, lo que corresponde a la transformación de la figura 25 cuando $n_0 = 0$. Sin embargo, sabemos que, para efectuar la transición entre el acorde inicial al final, hay más acordes de por medio que funcionan como un puente entre ambos. Por ende, la progresión armónica de la figura 10 se puede representar de este modo (figura 26):

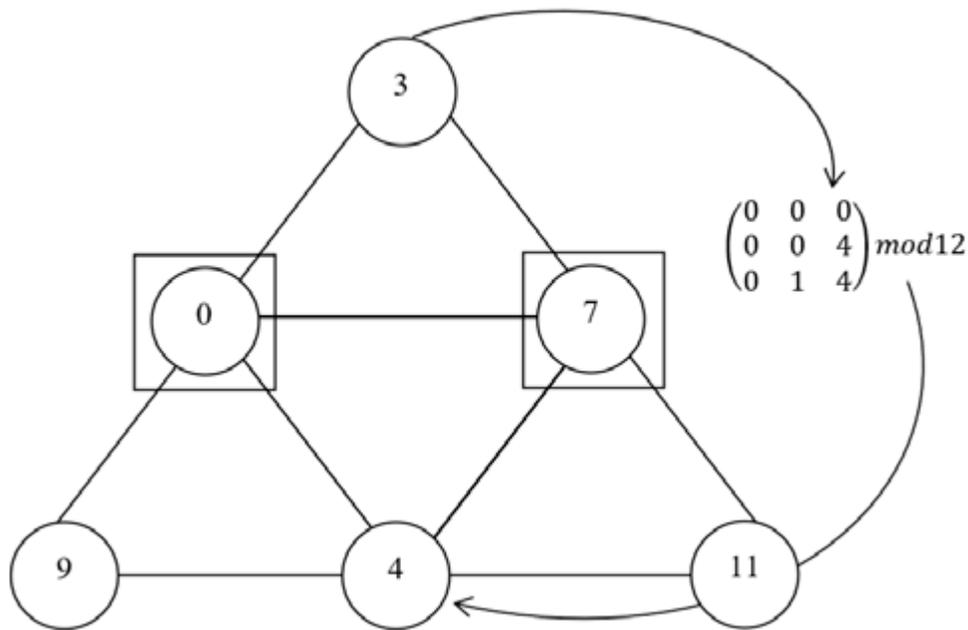


Figura 26. Función visual neoriemanniana de la progresión en la figura 10

La MCF de la figura 26 representa aquellos acordes que funcionan como un puente entre el acorde de Do menor con el de Do mayor, denominados subprogresiones armónicas. En otras palabras, son aquellos acordes que permiten que la transformación se realice.

Del mismo modo en que la mayoría de las canciones comienzan con la tónica, luego pasan al desarrollo armónico, para culminar en la misma tónica, vamos a replicar la misma acción con la progresión armónica de la figura 10: regresar al acorde de Do menor.

Con el procedimiento ya conocido, compongamos una progresión cuyo acorde inicial sea Do mayor, y el final Do menor:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{mod}12 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(5.2)

Lo que, musicalmente, se traduce en la siguiente progresión (figura 27):

♩ = 82
C

E^{maj7} A[°] D^{♯°} C^m

Figura 27. Progresión armónica de las transformaciones lineales 5.2

Entonces, junto con 4.22, la progresión final es (figura 28):



Figura 28. Progresión armónica 4.22 y 5.2

Por consiguiente, la función visual neoriemanniana de la progresión en la figura 28 es:

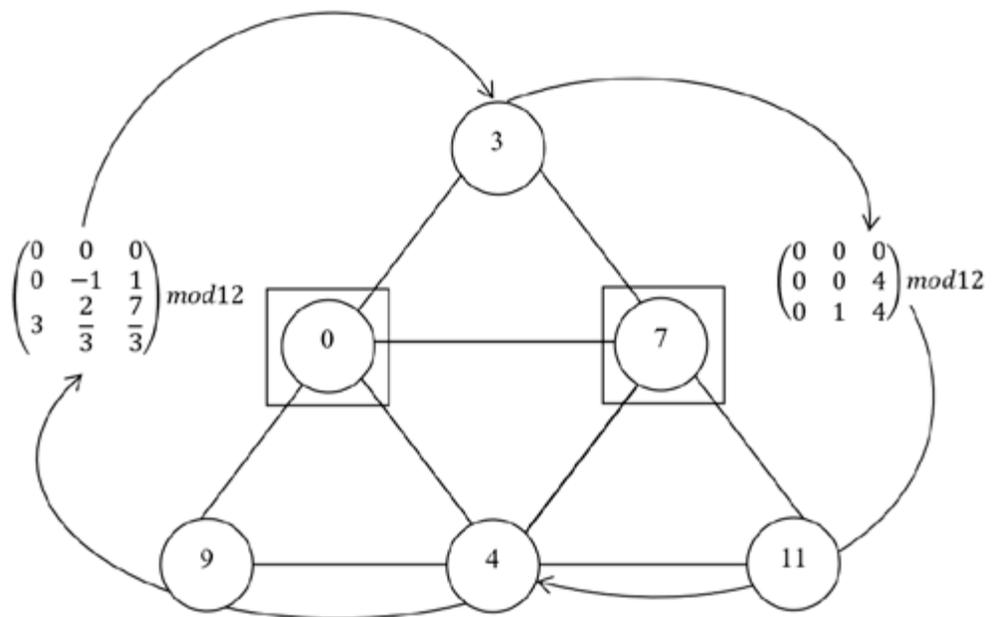


Figura 29. Función visual neoriemanniana de la progresión en la figura 6.12

Conclusión

Iniciamos este trabajo con una formalización matemática de algunos conceptos de la teoría neoriemanniana y *pitch-class set* que sustentan la presente investigación. Esto podría contribuir a que el estudio de ambas teorías sea más fácil de entender y divulgar.

En la primera y la segunda sección, debido a la similitud entre las ecuaciones 2.1 y 2.2, reinterpretamos la fórmula de distancia interválica a partir de la fórmula de la distancia entre dos puntos. Esto nos proveyó el argumento necesario para entender las notas musicales como puntos en el plano cartesiano. Obviamente, esta idea no es nueva; Tymoczko la ha aplicado en varios estudios (2006; 2011; 2012). La diferencia estriba en que él la presenta de manera directa, mientras que aquí surge como una consecuencia de la ecuación 2.3. Pese a ello, el hecho de llegar al mismo resultado refuerza aún más dicho concepto. Teniendo esta nueva definición para las notas, introdujimos el álgebra lineal con vectores que buscan medir la dinámica melódica por medio de sus relaciones interválicas.

En la tercera sección propusimos que todo conjunto de notas musicales puede ser trazado con una figura geométrica, de acuerdo con sus respectivos intervalos. Aunque dicha representación funciona más a modo de apreciación que de análisis, con respecto a los valores del área y los ángulos esta geometría manifiesta propiedades simétricas en los conjuntos de la forma ideal invertida y de sus retrógrados. Así mismo, sugerimos una fórmula para calcular el área de los polígonos según su número cardinal. Esta fórmula nos da a entender que el área de un polígono puede ser calculada mediante notas musicales, lo cual unifica a la música con la geometría más allá de un contexto creativo.

En este sentido, una futura investigación podría analizar si las propiedades geométricas observadas en los polígonos tienen alguna representación musical, es decir, indagar si

el área o los ángulos de la figura 4 representan algo en el contexto musical, que se adentre en la teoría musical o en la interpretación instrumental. A esa premisa le siguen las siguientes preguntas: ¿se pueden formar teselados con estos polígonos? ¿Qué cualidad de acorde forma un cuadrado, un triángulo, un pentágono, etcétera? ¿Cuál es el centro de gravedad de los triángulos de cada tríada? Por último, sería válido extender este análisis a una investigación anterior (Lugos Abarca, 2023), donde también se desarrolló una geometría musical, pero desde una perspectiva rítmica.

En la cuarta sección propusimos las transformaciones lineales como herramienta matemática, con el fin de representar y crear progresiones armónicas por medio de matrices. Para ello, tuvimos que definir los acordes como vectores, los cuales, cuando tienen tres y cuatro notas son tridimensionales y tetradimensionales, respectivamente. Lo que ejemplificamos con las progresiones armónicas del *standard* de “*All the things you are*” de Sonny Rawlins (2004), mediante transformaciones lineales. Por último, se retomó lo desarrollado en las secciones 2 y 3, para descubrir que, mediante las transformaciones lineales, es posible expresar intervalos armónicos.

Por lo anterior, podemos concluir que los acordes se hallan en dimensiones mayores a \mathbb{R}^3 y su dinámica; es decir, la progresión armónica se obtiene mediante transformaciones lineales. Además, la representación matricial que aquí proponemos suscita varios interrogantes para ser estudiados en futuras investigaciones: ¿qué representan las determinantes, los vectores y valores propios de estas matrices? Así mismo, ¿qué pasa con los productos, las proyecciones y el análisis espectral de estas matrices? Y más interesante aún sería saber si existe alguna matriz que ofrezca la transformación entre una tríada y una tétrada.

En la quinta sección formalizamos las transformaciones lineales y las teorías neoriemanniana y *Pitch-class set*, e

introducimos el concepto de la función visual neoriemanniana con la generalización del *tonnetz*. Dichos diagramas (figura 19) corresponden a las partituras en estas teorías.

Este método de composición se puede considerar atonal ya que, como vimos en los ejemplos, no se define un centro tonal, de hecho no se busca, pues lo que nos interesa es observar cómo los acordes evolucionan mediante las transformaciones lineales. Así mismo, dada la naturaleza matemática de este proceso, se recomienda que sea empleado con los recursos informáticos requeridos para dicho efecto.

Por último, no todas las matrices de función producen acordes; a veces, obtenemos notas cuyo orden interválico no determina una cualidad de acorde en específico. Por lo tanto, hay que ser selectivos al momento de componer con las transformaciones lineales; de ahí la recomendación de la asistencia computacional, pues se requiere de más desarrollo matemático para que una computadora pueda usar este método de manera independiente.

Referencias

Anton, H. (2010). *Elementary Linear Algebra* (10.^a ed.). John Wiley & Sons.

Assinnato, M. V., & Musicco, P. (2013). «La melodía: movimiento, direccionalidad y contorno». En F. Shifres y M. I. Burcet (Coords.), *Escuchar y pensar la Música. Bases teóricas y metodológicas* (pp. 205-232). Universidad Nacional de La Plata. <https://www.aacademica.org/maria.ines.burcet/40.pdf>.

Cannas, S. (2018). *Geometric Representation and Algebraic Formalization of Musical Structures*. (Tesis doctoral, Université de Strasbourg; Università degli studi, Pavie, Italia). <https://goo.su/xVqrO>.

Chapman, A. (1981). «Some intervallic aspects of pitch-class set relations». *Journal of Music Theory*, 25(2), 275-290. <https://doi.org/10.2307/843652>.

Cohn, R. (1997). «Neo-riemannian operations, parsimonious trichords, and their “tonnetz” representations». *Journal of Music Theory*, 41(1), 1-66. <https://goo.su/Y4qtUn>.

Coxeter, H. (1969). *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons.

De Oteyza, E. (2005). *Geometría analítica*. Pearson.

Euler, L. (1739). *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*. Ex typographia Academiae scientiarum.

Fiore, T. M., Noll, T., & Satyendra, R. (2013). «Incorporating voice permutations into the theory of neo-Riemannian groups and Lewinian duality». En J. Yust, J. Wild, & J. Ashley Burgoyne (Eds.), *Mathematics and Computation in Music. 4th International Conference, MCM 2013, Montreal, QC, Canada, June 12-14, 2013. Proceedings* (pp. 100-114). Springer. <https://goo.su/kT5KblO>.

Física46. (2011, julio 12). «Área de un triángulo dadas sus coordenadas». [Archivo de video]. *YouTube*. <https://www.youtube.com/watch?v=hC2zIrc8Ty0>.

Forte, A. (1974). *Structure of Atonal Music*. Yale University Press.

Gollin, E., & Rehding, A. (Eds.). (2014). *The Oxford Handbook of Neo-Riemannian Music Theories*. Oxford University Press.

Granja, M. A. Z. (2021). *Análisis armónico y rítmico aplicado al solo ejecutado por John Coltrane en su composición 26-2 del álbum The Coltrane Legacy (1960)*. (Tesis de Maestría, Universidad San Francisco de Quito). <https://core.ac.uk/reader/397483970>.

Grimaldi, R. P. (1998). *Matemáticas discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones* (3.^a ed.). Pearson.

Herrera, E. (2022). *Teoría Musical y Armonía Moderna. Vol. 1*. Antoni Bosch.

Hoffman, J. (2008). «On pitch-class set cartography: Relations between voice-leading spaces and fourier spaces». *Journal of Music Theory*, 52(2), 219-249. <https://doi.org/10.1215/00222909-2009-016>.

Hughes, B. (2021). «Neo-Riemannian triadic progressions». *OpenMusicTheory*. <https://viva.pressbooks.pub/openmusictheory/chapter/neo-riemannian-triadic-progressions/>.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal* (8.^a ed.). Pearson.

Lugos Abarca, J. A. (2023). Sobre la matemática de los compases musicales y su relación con la geometría. *Ricercare*, (16), 27–58. <https://doi.org/10.17230/ricercare.2023.16.2>

Molina, J. G., & Oktaç, A. (2007). «Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273. <https://goo.su/bKU64>.

Perle, G. (1972). *Serial Composition and Atonality. An introduction to the Music of Schoenberg, Berg, and Webern*. University of California Press.

Purwins, H., Blankertz, B., & Obermayer, K. (2007). «Toroidal models in tonal theory and pitch-class analysis». *Computing in musicology*, (15), 73-98. <https://goo.su/Sjff>.

Rawlins, R. (2004). «All the things you are». En VV. AA., *The Real Book. Volume I. Sixth edition (C instruments)*. Hal Leonard Corporation.

Roeder, J. (1987). «A geometric representation of pitch-class series». *Perspectives of New Music*, 25(1/2), 362-409. <https://www.jstor.org/stable/833104>.

Schuijjer, M. (2008). *Analyzing Atonal Music. Pitch-Class Set Theory and Its Contexts*. University of Rochester Press.

Song, J., Bae, S. Y., & Yoon, K. (2002, octubre). «Mid-Level Music Melody Representation of Polyphonic Audio for Query-by-Humming System». En *ISMIR* (pp. 133-139). <https://goo.su/dzrusF>.

Suppes, P. (1972). *Axiomatic Set Theory*. Dover Publications.

Tymoczko, D. (2006, julio). «The geometry of musical chords». *Science*, 313(5783), 72-74. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1126287>.

Tymoczko, D. (2011). *A Geometry of Music. Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice*. Oxford University Press.

Tymoczko, D. (2012). «The generalized tonnetz». *Journal of Music Theory*, 56(1), 1-52. <https://doi.org/10.1215/00222909-1546958>.

Vázquez, H. (2006). *Fundamentos teóricos de la música atonal*. Universidad Nacional Autónoma de México.

Anexo 1. Polígonos de Allen Forte

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 2)$

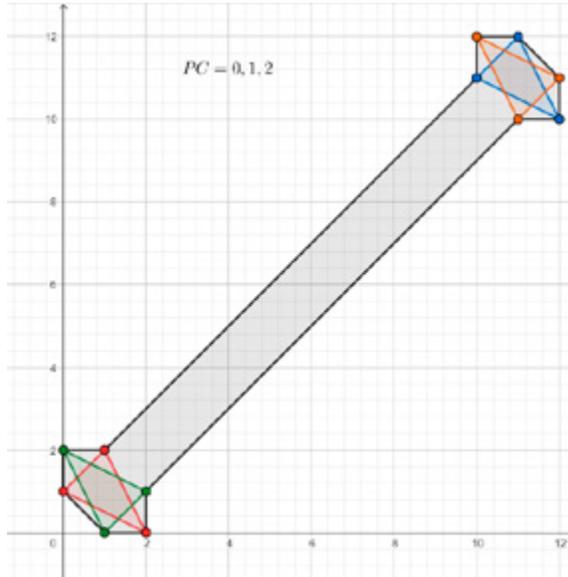


Figura A.1 Conjunto graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 3)$

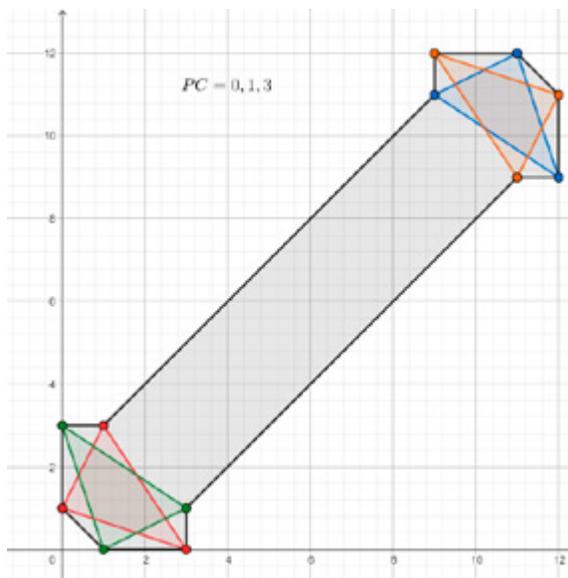


Figura A.2 Conjunto graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 4)$

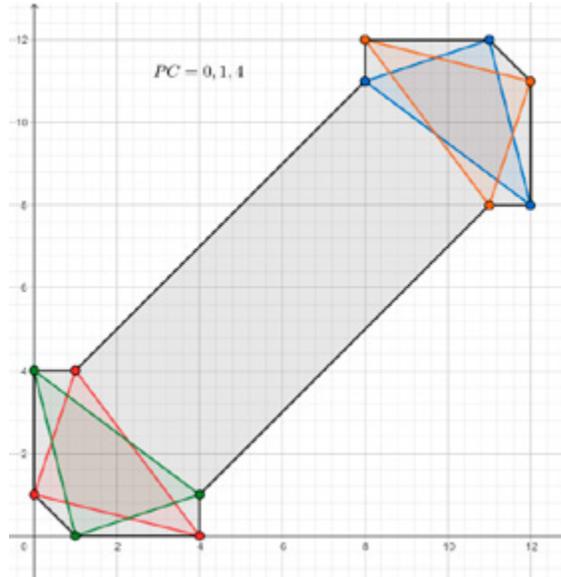


Figura A.3 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 4)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 5)$

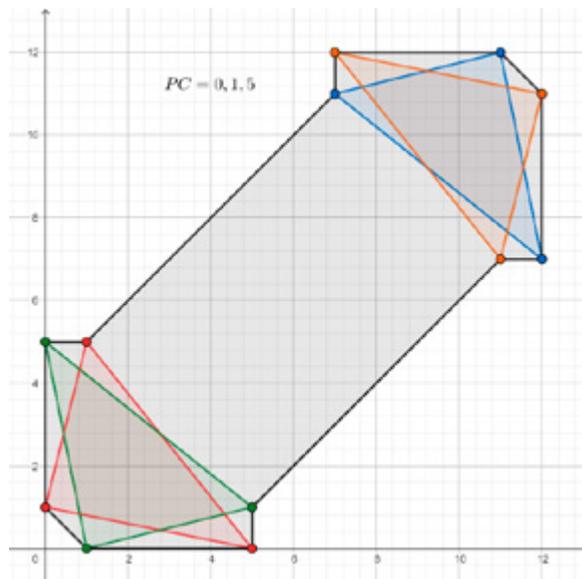


Figura A.4 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 5)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 6)$

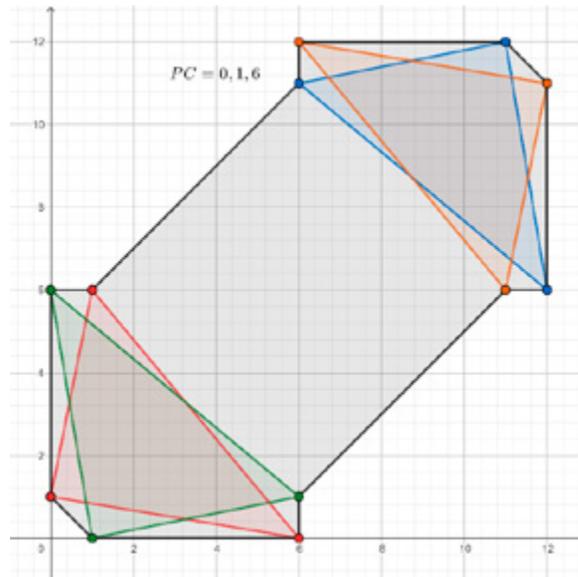


Figura A.5: Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 1, 6)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 4)$

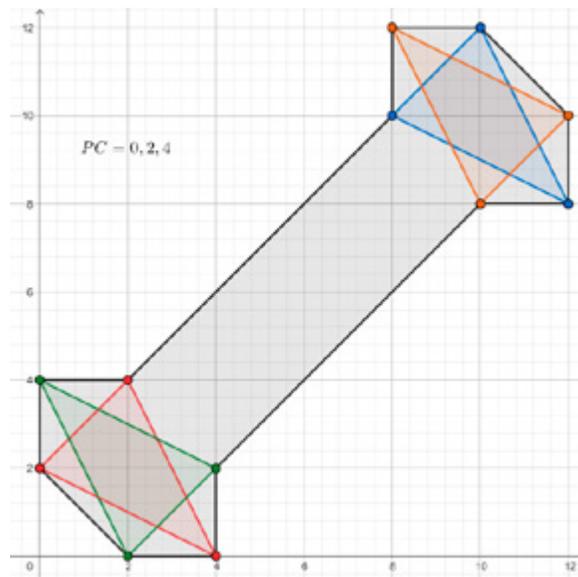


Figura A.6 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 4)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 5)$

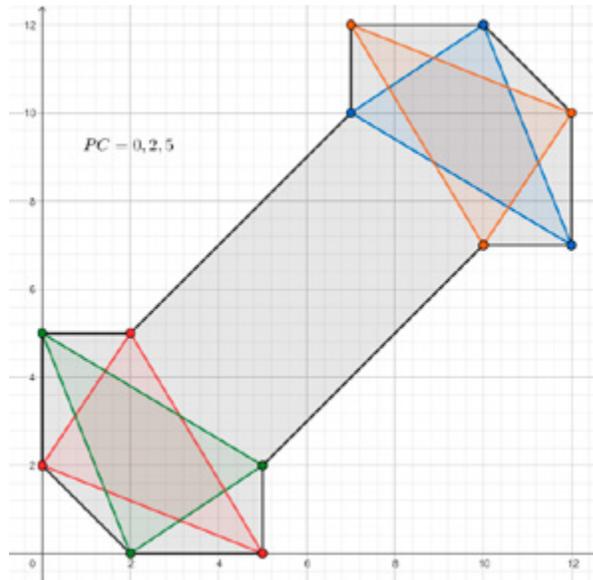


Figura A.7 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 5)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 6)$

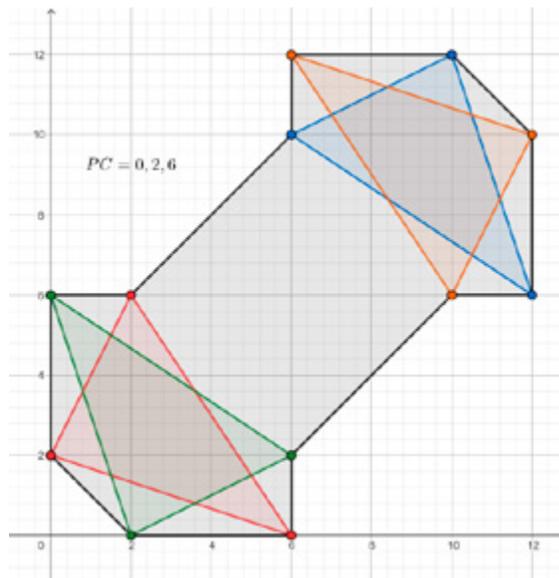


Figura A.8 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 6)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 7)$

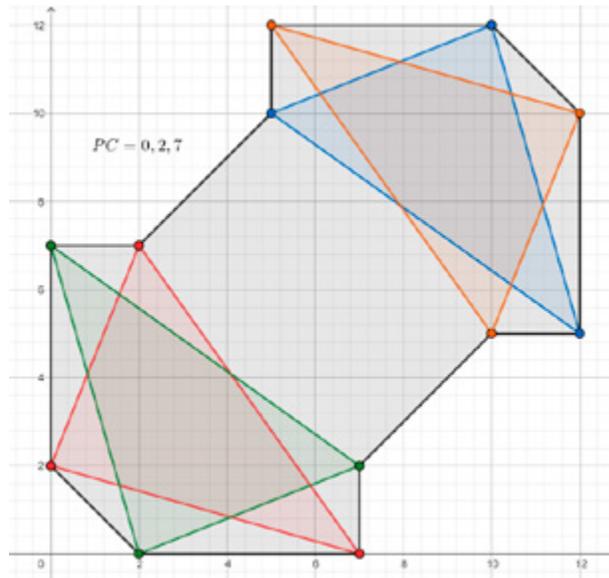


Figura A.9 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 2, 7)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 3, 6)$

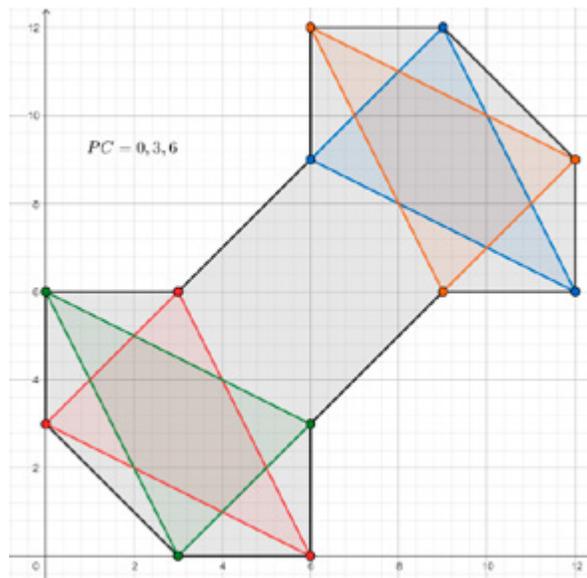


Figura A.10 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 3, 6)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 3, 7)$

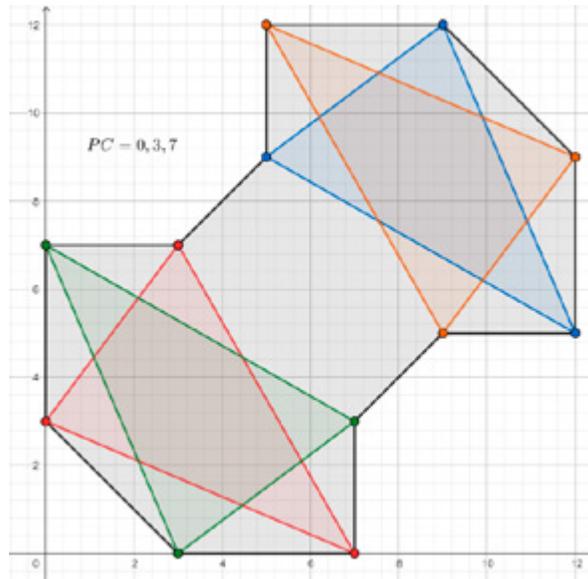


Figura A.11 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 3, 7)$ graficado en el plano cartesiano

Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 4, 8)$

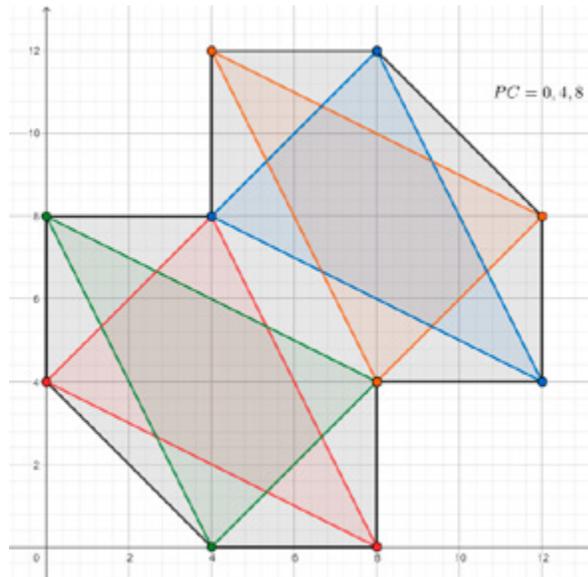


Figura A.12 Conjunto $\widetilde{\pi}_0^0 = (0, 4, 8)$ graficado en el plano cartesiano

Anexo 2. Polígonos de los acordes

Acorde mayor:

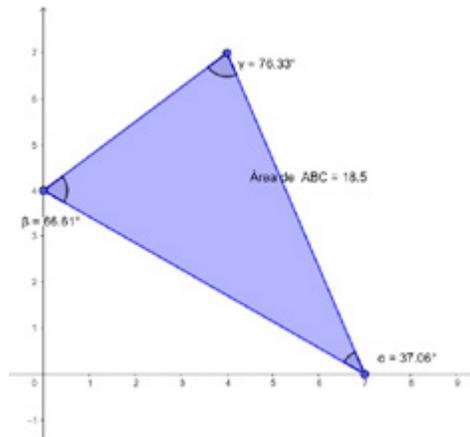


Figura A.1 Acorde mayor graficado en el plano cartesiano

Acorde menor:

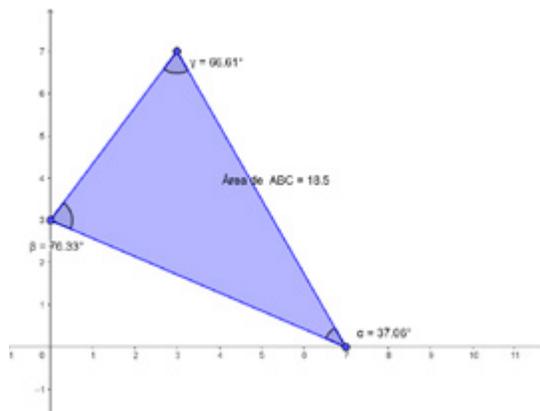


Figura A.2 Acorde menor graficado en el plano cartesiano

Acorde disminuido:

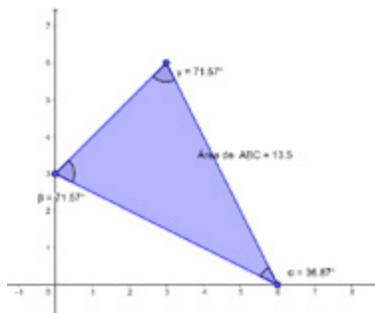


Figura A.3 Acorde disminuido graficado en el plano cartesiano

Acorde aumentado:

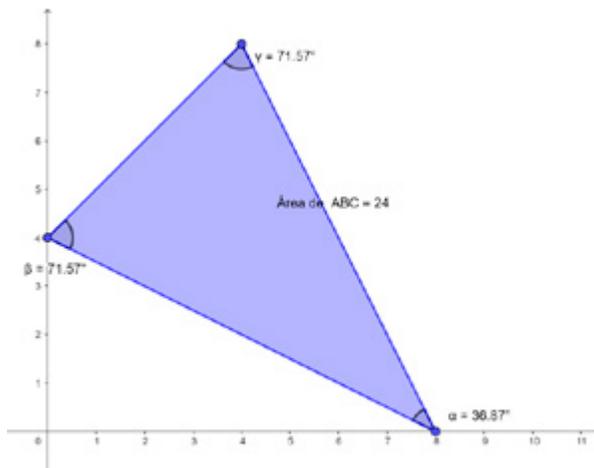


Figura A.4 Acorde aumentado graficado en el plano cartesiano

Acorde suspenso 2:

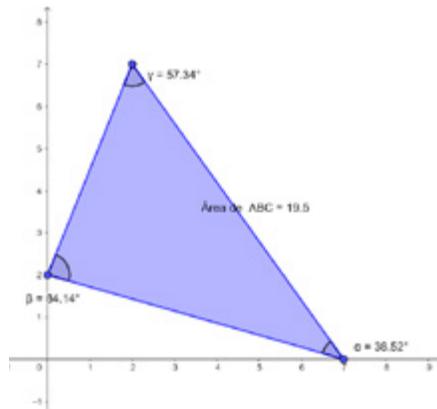


Figura A.5 Acorde suspenso 2 graficado en el plano cartesiano

Acorde suspenso 4:

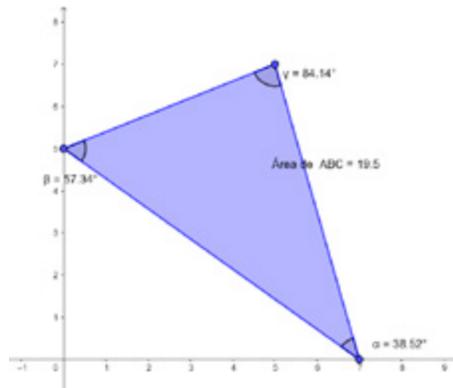


Figura A.6 Acorde suspenso 4 graficado en el plano cartesiano

Acorde mayor con séptima mayor:

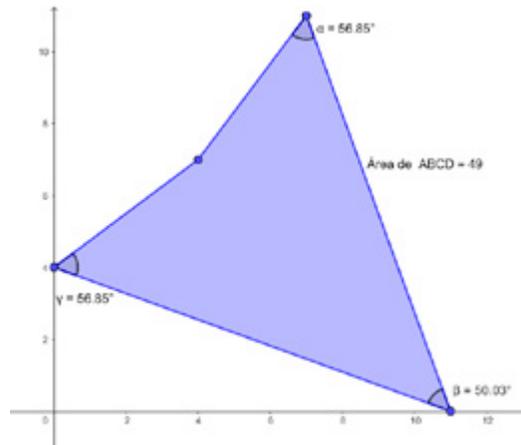


Figura A.7 Acorde mayor, séptima mayor graficado en el plano cartesiano

Acorde de dominante siete:

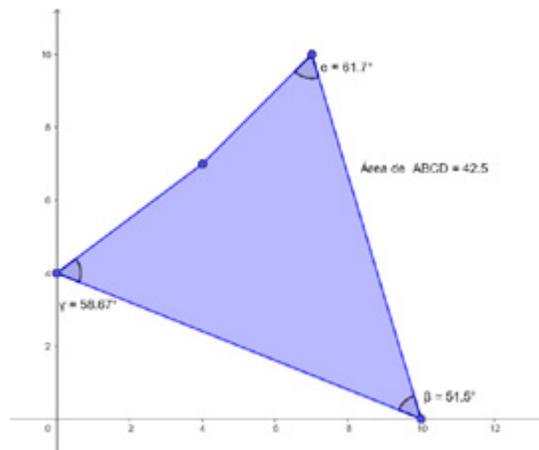


Figura A.8 Acorde de dominante siete graficado en el plano cartesiano

Acorde mayor con séptima menor, bemol cinco:

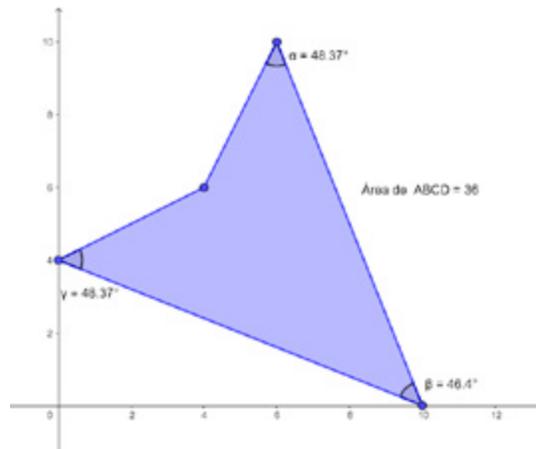


Figura A.9 Acorde maior de sétima menor bemol cinco graficado en el plano cartesiano

Acorde menor com sétima menor:

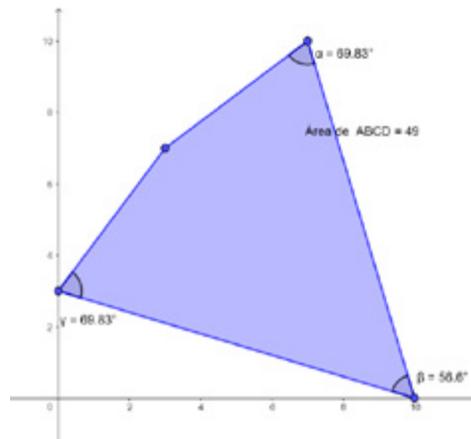


Figura A.10 Acorde menor con séptima menor graficado en el plano cartesiano

Acorde menor con séptima mayor:

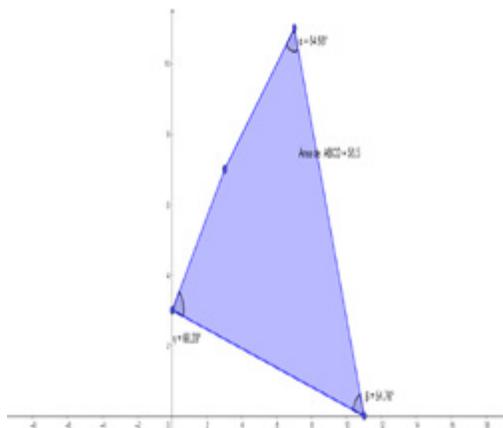


Figura A.11 Acorde menor de séptima mayor graficado en el plano cartesiano

Acorde semi disminuido siete:

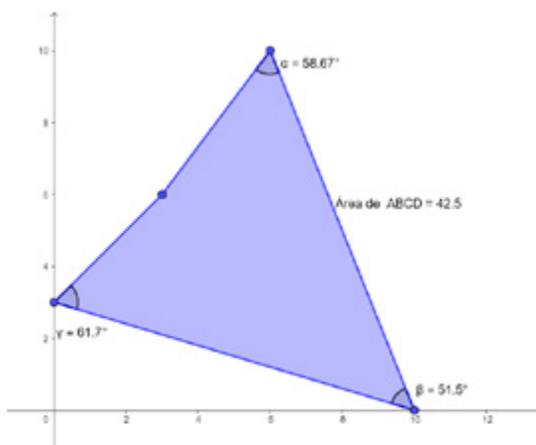


Figura A.12 Acorde semidisminuido siete graficado en el plano cartesiano

Acorde disminuido siete:

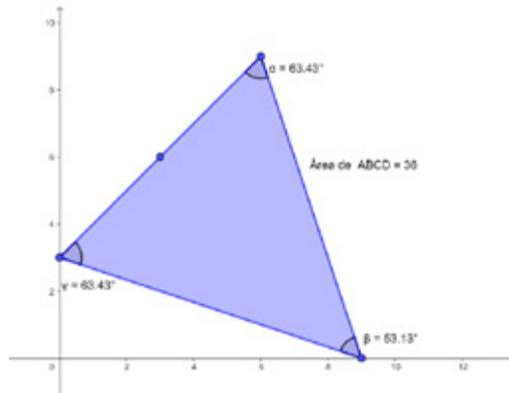


Figura A.13 Acorde disminuido siete graficado en el plano cartesiano

Acorde aumentado con séptima mayor:

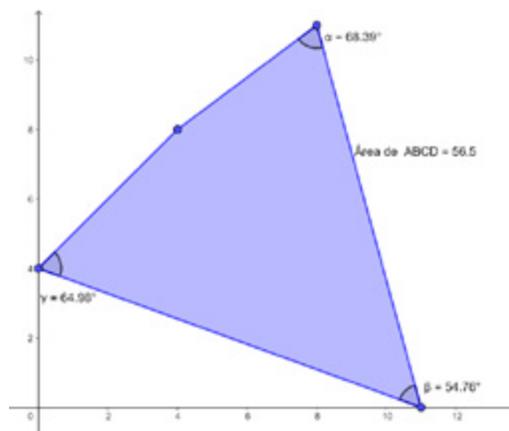


Figura A.14 Acorde aumentado de séptima mayor graficado en el plano cartesiano

Acorde aumentado con séptima menor:

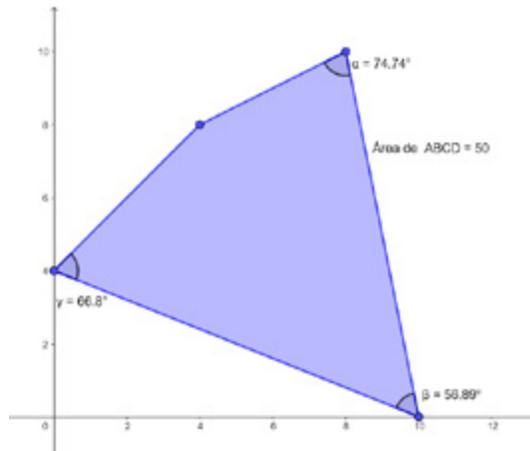


Figura A.15 Acorde aumentado de séptima menor graficado en el plano cartesiano